# ГЛАВА 12.
# ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ

Подготовил студент группы 24406 Муфаздалов Д.З.

Специалистам, работающим на фондовом рынке, приходится принимать решение в рамках неопределенности. Многие важные экономические данные, такие как значение ставки Федеральной резервной системы США, размер запасов нефти и бензина в США, оказывают значительное влияние на динамику финансового рынка, но мало предсказуемы.

Поиском закономерностей, присущих случайным явлениям, занимается **вероятностный анализ**.

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

К основным понятиям теории вероятностей относятся понятия эксперимента, случайного события, множества элементарных исходов эксперимента и классическое определение вероятности. Последовательно познакомимся с каждым из них.

**Экспериментом** называется выполнение определенного комплекса условий, в которых наблюдается то или иное явление. Необходимо отметить, что классическая теория вероятностей имеет дело с идеальными объектами, однако выводы вероятностного анализа применимы и к реальным экспериментам.

Классическая теория вероятностей требует потенциальной повторяемости эксперимента. Только в этом случае возможно нахождение определенных закономерностей.

В самом деле если идеальная монетка подбрасывается один раз, то невозможно предсказать, выпадет ≪орел≫ или ≪решка≫. Если же монетка подбрасывается 100 раз, то скорее всего выпадет 50 ≪орлов≫ и 50 ≪решек≫.

**Случайным событием** называется исход эксперимента, осуществление которого зависит от множества случайных факторов (может произойти или не произойти). Прикладной задачей теории вероятностей является количественная оценка шансов на осуществление того или иного случайного события в будущем

*Вероятность случайного события А* равна отношению числа исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (12.1)$$

где $P(A)$ — вероятность случайного события $A$;

$m$ — число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события $A$;

$n$ — общее число элементарных исходов.

**Пример 12.15.** При бросании кубика возможны шесть элементарных исходов — выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Найти вероятность следующих событий:

$A$ — выпало четное число очков;

$B$ — количество выпавших очков не менее 3.

По формуле (12.1) получаем $P(A) = {}^3/_6 = {}^1/_2$; $P(B) = {}^4/_6 = {}^2/_3$.

# ОПЕРАЦИИ НАД СЛУЧАЙНЫМИ СОБЫТИЯМИ

*Суммой событий* $(A + B)$ называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий.

*Произведением событий* $(A \times B)$ называется событие, состоящее в одновременном наступлении обоих событий.

Понятие *противоположного события* $(\bar{A})$ разберем на примере.

**Пример 12.18.** Рассмотрим эксперимент по подбрасыванию кубика и следующие случайные события:

$A$ — выпало нечетное число очков;

$B$ — количество выпавших очков не менее 4.

Тогда $A + B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ или выпало не менее 5 очков, $A \times B = \{1, 3\}$, $\bar{A}$ — выпало четное число очков и $\bar{B}$ — выпало более 4 очков.

Теоретико-множественная интерпретация:

- сумма событий — объединение множеств элементарных исходов;
- произведение событий — пересечение множеств элементарных исходов;
- нахождения противоположного события — дополнение.

Остановимся на вычислении вероятностей от операций над событиями. Верны следующие формулы:

1. Если события $A$ и $B$ несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме их вероятностей $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
2. Если события $A$ и $B$ совместны, то вероятность суммы событий равна сумме их вероятностей минус вероятность произведения $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \times B)$.
3. Если события $A$ и $B$ независимы, то вероятность произведения событий равна произведению их вероятностей $P(A \times B) = P(A) \times P(B)$.
4. Если события $A$ и $B$ зависимы, то $P(A \times B) = P(A) \times P(B : A)$, где $P(B : A)$ — условная вероятность события $B$ при условии, что событие $A$ уже осуществилось и внесло коррективы в проведение эксперимента.
5. Для любого события $A$ справедливо $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

*Случайной величиной* называется числовая функция, конкретное значение которой зависит от множества случайных факторов.

**Пример 12.19.** Эксперимент заключается в подбрасывании кубика.

Событие $A$ состоит в том, что выпадет 1, событие $B$ — выпадет нечетное число. Случайная величина $X$ — количество выпавших очков.

**Пример 12.20.** Эксперимент состоит в четырехкратном подбрасывании монеты.

Случайная величина $X$ — количество выпавших «решек».

**Пример 12.21.** Случайная величина $X$ — цена на акцию в будущем.

Случайная величина $Y$ — курс доллара к рублю на 25 декабря 2007 г.

Случайные величины бывают дискретными (точечными) и непрерывными.

*Дискретная случайная величина* характеризуется тем, что ее возможные значения разделены промежутками, как в примере 12.19, где $X$ — количество выпавших очков.

*Непрерывная случайная величина* характеризуется тем, что ее возможные значения заполняют некоторый промежуток полностью. В качестве непрерывной случайной величины можно рассматривать рост человека.

Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M[C] = C$.

Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M[CX] = CM[X]$.

Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $M[X + Y] = M[X] + M[Y]$.

Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M[XY] = M[X]M[Y]$.

В качестве характеристики разброса случайной величины относительно ее математического ожидания рассматривают показатель дисперсии.

*Дисперсией* $D[X]$ случайной величины $X$ называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания: $D[X] = M[(X - M[X]^2)$.

При решении прикладных задач используют более простую формулу

$$D[X] = M[X^2] - M[X]^2.$$

Легко заметить, что дисперсия $D[X]$ имеет размерность квадрата случайной величины. Поэтому часто в качестве показателя разброса случайной величины используют *среднее квадратическое отклонение* $\sigma = \sqrt{D[X]}$.

# НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Непрерывная случайная величина не может быть охарактеризована таблицей распределения. Необхолимо задать функцию распределения $F(x) = P(X < x)$ либо плотность – $f(x) = F(x)$.

Случайная величина $X$ называется *непрерывной*, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Наиболее часто на практике встречается нормальный закон распределения. Многие признаки подчиняются нормальному закону, например рост человека, среднегодовая температура воздуха и т.п. В финансовом моделировании часто делается логичное предположение о том, что цена на некоторый актив распределена нормально.

Непрерывная случайная величина $X$ имеет *нормальный закон распределения* с параметрами $a$ и $\sigma^2$, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нетрудно доказать, что математическое ожидание нормально распределенной случайной величины равно числу $a(M[X] = a)$, а показатель дисперсии — $\sigma^2(D[X] = \sigma^2)$. Таким образом, нормально распределенная случайная величина полностью описывается своим математическим ожиданием и дисперсией.

Обратимся к важной прикладной закономерности, присущей случайной величине, распределенной по нормальному закону. В классической теории вероятностей это правило именуется «правилом трех сигм».

Если случайная величина $X$ имеет нормальный закон распределения с параметрами $a$ и $\sigma^2$, то практически достоверно (с вероятностью 99,73%), что ее значения заключены в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

Более подробно:

1) вероятность попадания в интервал $(a - \sigma, a + \sigma)$ составляет 68,27%;

2) вероятность попадания в интервал $(a - 2\sigma, a + 2\sigma)$ составляет 95,45%.

Напомним, что параметр $a$ соответствует математическому ожиданию, а $\sigma$ — среднее квадратическое отклонение. Отметим, что эта закономерность была использована Боллинджером при разработке компьютерного индикатора, носящего его имя.

# ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБЛИГАЦИЙ

Обратимся к детерминированным финансовым расчетам. Рассмотрим типовую задачу: вкладчик оформляет банковский депозит на сумму $P$ руб. сроком на $t$ лет, банк за пользование деньгами вкладчика уплачивает годовой процент. Найдем итоговую сумму вклада 5. Возможность банкротства банка, задержки выплат по вкладу не учитываются.

Необходимо заметить, что финансовые результаты вкладчика в значительной мере зависят от методики начисления процентов. В то же время, обсуждаемые далее формулы носят универсальный характер и могут применяться в других финансовых расчетах (потребительское, ипотечное кредитование, расчет справедливой цены финансовых инструментов с фиксированной доходностью и др.).

Начисление процентов по методике **простого процента** характеризуется тем, что процент начисляется лишь на основную сумму вклада. При прочих равных этот вид начисления процента наименее выгоден для вкладчика. Эту процентную ставку в финансовой математике принято обозначать символом *r (%* годовых).

Рассчитаем финансовый результат для вкладчика при таком начислении процентов. Договоримся значение процента подставлять в долях от единицы. Расчеты оформим в виде таблицы.

| Срок вклада, лет | Итоговая сумма, $S$ |
|---|---|
| 1 | $S = P + P \times r = P \times (1 + r)$ |
| 2 | $S = P \times (1 + r) + P \times r = P \times (1 + 2r)$ |
| 3 | $S = P \times (1 + 2r) + P \times r = P \times (1 + 3r)$ |
| ... | ... |
| $t$ | $S = P \times (1 + tr)$ |

Формула наращения по простым процентам

$$S = P \times (1 + tr), \tag{12.2}$$

где $(1+ tr)$ — множитель наращения. Он показывает, во сколько раз итоговая сумма больше первоначальной.

**Пример 12.30.** Начальная сумма вклада — 30 000 руб. Банк за пользование деньгами вкладчика начисляет простой процент из расчета 12% годовых. Рассчитать итоговую сумму через: а) 3 года; б) 5 лет; в) 8 лет 3 мес.

Используем формулу (12.2):

а) $S = 30\,000 \times (1 + 3 \times 0{,}12) = 40\,800$ руб.;

б) $S = 30\,000 \times (1 + 5 \times 0{,}12) = 48\,000$ руб.;

в) $S = 30\,000 \times (1 + 8{,}25 \times 0{,}12) = 59\,700$ руб.

Нетрудно вывести формулы, позволяющие рассчитать начальную сумму вклада $P$, срок вклада $t$ или ставку простого процента $r$ при прочих известных величинах.

Например, из формулы (12.2) легко вычислить величину начального вклада $P$:

$$P = S : (1 + tr) = S \times \frac{1}{1 + tr}. \tag{12.3}$$

**Пример 12.31.** Через 90 дней после подписания договора должник уплатит 1 000 000 руб. Кредит выдан под 20% годовых (простых). Какова первоначальная сумма и дисконт?

Применяя формулу (12.3), получим:

$$P = 1\,000\,000 \times \frac{1}{1 + 90 : 360 \times 0,2} = 952\,380,95 \text{ руб.}$$

Легко рассчитать дисконт $D = S - P = 1\,000\,000 - 952\,380,95 = 47\,619,05$ руб.

Величина $P$ по праву называется современной ценностью будущей выплаты $S$, а множитель $\frac{1}{1+tr}$ — дисконтирующим множителем.

Аналогично выводятся оставшиеся формулы:

$$r = \frac{S : P - 1}{t},$$

$$t = \frac{S : P - 1}{r}.$$

Сложный процент является более актуальным в сравнении с простым, так как лучше отражает временную стоимость денег.

Методика начисления *сложного процента* подразумевает присоединение ранее начисленных процентов к основной сумме вклада (капитализацию процентов) и как следствие начисление будущих процентов на большую сумму. Ставку сложного процента принято обозначать символом $i$ (в финансовых расчетах подставляют в долях от единицы).

Выведем формулу для итоговой суммы вклада $S$:

| Срок вклада, лет | Итоговая сумма, $S$ |
|---|---|
| 1 | $S = P + P \times i = P \times (1 + i)$ |
| 2 | $S = P \times (1 + i) + P \times (1 + i)i = P(1 + i)(1 + i) = P \times (1 + i)^2$ |
| 3 | $S = P \times (1 + i)^3$ |
| ... | ... |
| $t$ | $S = P \times (1 + i)^t$ |

Итак, формула наращения по сложным процентам имеет вид:

$$S = P \times (1 + i)^t, \qquad (12.4)$$

где $(1 + i)^t$ — множитель наращения.

Решим пример 12.30 в предположении начисления сложного процента:

а) $S = 30\,000 \times (1 + 0{,}12)^3 = 42\,147{,}84$ руб.;

б) $S = 30\,000 \times (1 + 0{,}12)^5 = 52\,870{,}25$ руб.;

в) $S = 30\,000 \times (1 + 0{,}12)^{8,25} = 76\,413{,}47$ руб.

В сравнении с простым процентом видны позитивные финансовые результаты, причем с ростом срока вклада разница в итоговых суммах растет. Отметим, что при использовании бухгалтерских калькуляторов при возведении в степень пользуемся умножением.

Нетрудно вывести соответствующие формулы для расчета остальных величин:

$$P = \frac{S}{(1+i)^t} = S \times \frac{1}{(1+i)^t},$$

где $P$ — современная стоимость будущей выплаты;

$\frac{1}{(1+i)^t}$ — дисконтирующий множитель.

$$i = \sqrt[t]{S : P} - 1, \qquad (12.5)$$

$$t = \log_{1+i} \frac{S}{P}.$$

Решим задачу на нахождение процентной ставки $i$.

**Пример 12.32.** Найти ставку сложного процента, которую должен назначить банк по депозиту на сумму 30 000 руб. для его удвоения в течение четырех лет.

Используем формулу (12.5): $i = \sqrt[4]{60\,000 : 30\,000} - 1 = \sqrt[4]{2} - 1 = 0{,}1892.$

Итак, необходимо назначить ставку в 18,92% годовых.

Ставка сложного процента, начисляемая несколько раз в год, в курсе финансовой математики обозначается символом $j_m$, где $m$ – количество начислений в течение года.

Например, $j_{12}$ = 24% означает, что сложный процент начисляется 12 раз в год (ежемесячно) из расчета 2% в месяц. Приведем формулу наращения итоговой суммы:

$$S = P \times \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{mt}. \qquad (12.6)$$

**Пример 12.33.** Рассчитаем итоговую сумму вклада, если начальная сумма 30 000 руб., срок вклада — пять лет, сложный процент — 12% годовых начисляется ежеквартально. Используем формулу (12.6):

$$S = 30\,000 \times \left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{4\times5} = 30\,000 \times 1{,}03^{20} = 54\,183{,}34 \text{ руб.}$$

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ОБЛИГАЦИЙ

**Облигация** — эмиссионная ценная бумага, закрепляющая за ее держателем право на гарантированный доход, размер и порядок выплаты которого определяется при выпуске, а также на получение ее номинальной стоимости по истечении срока займа. Остановимся на рассмотрении случая государственной купонной облигации, когда эмитентом выступает государственный орган. Будем считать, что государственная облигация обращается без риска дефолта, т.е. купоны выплачиваются своевременно, и у инвестора нет сомнений в погашении облигации по номиналу. Одним из основных вопросов является вопрос о справедливой цене облигации и определение доходности этого финансового инструмента.

Введем следующие обозначения:

С — абсолютная величина годового купона;

п — срок до погашения облигации;

F — номинал облигации;

jm — доходность к погашению, купон начисляется т раз в год;

Р — справедливая цена облигации.

Сделаем упрощающее предположение — облигация покупается в начале купонного периода. Основным принципом определения справедливой цены облигации является приведение к настоящему моменту времени денежного потока, причитающегося владельцу ценной бумаги. Выплата каждого купона в будущем и погашение по номиналу вносит некоторый вклад в современную стоимость облигации. Дисконтирование будем проводить по процентной ставке:

$$P=\frac{C:m}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m\frac{1}{m}}}+\frac{C:m}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m\frac{2}{m}}}+\ldots+\frac{C:m}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}}+\frac{F}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}}. \quad (12.7)$$

Применяя формулу геометрической прогрессии, найдем справедливую цену:

$$P=\frac{C}{j_m}+\frac{F-C:j_m}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}}. \quad (12.8)$$

Необходимо отметить, что, как правило, купон выплачивается либо один раз в год ($m = 1$), либо по полугодиям ($m = 2$). Специфика отечественного рынка инструментов с фиксированной доходностью состоит в весьма небольших сроках обращения облигаций. Обычно облигации выпускаются на срок от одного до трех лет. Поэтому при расчетах можно использовать формулу (12.7).

Если рыночная цена в уравнениях (12.7) или (12.8) известна, то можно поставить задачу на нахождение доходности к погашению ($j_m$) — итоговой доходности инвестора. Этот вид доходности учитывает как купонные выплаты, так и доход инвестора при покупке облигации с дисконтом. Напротив, показатель текущей доходности ($T$) учитывает лишь купонную выплату и рассчитывается по формуле

$$T=\frac{C}{P}\times 100\%. \quad (12.9)$$

Решим ряд типовых примеров.

**Пример 12.34.** Государственная облигация погашается через два года по номиналу (1000 руб.). По облигации выплачивается купон из расчета 8% годовых один раз в год. Доходность по альтернативному вложению, на которую ориентируются инвесторы, составляет 10% годовых. Определить справедливую цену облигации.

Воспользуемся формулой (12.7)

$$P=\frac{80}{(1+0{,}1)}+\frac{80+1000}{(1+0{,}1)^2}=72{,}73+892{,}56=965{,}29 \text{ руб.}$$

Как правило, при работе с облигациями указывают рыночную цену на 100 единиц номинала. В нашем примере это 96,53 — облигация торгуется с дисконтом, и это логично, так как доходность, закладываемая инвестором, 10% годовых, а купон обеспечивает лишь 8%.

Спасибо за внимание!