

# Глава 1

# Излучение и вещество

# 1.1 Кинетическая теория свободных частиц

$P = P(\rho, T)$   
 $u = u(\rho, T)$

Уравнения состояния: описывают поведение вещества  
 $P$  – давление;  $u$  – плотность энергии

$P = nkT$   
 $u = \frac{3}{2}nkT = \frac{3}{2}P$

Уравнения состояния для идеального газа  
 Хорошо описывают большинство звезд на стадии горения водорода

Уравнения состояния можно получить с использованием кинетической теории, как соответствующие моменты функции распределения частиц по энергиям

Для изотропной функции распределения частиц по импульсам  $n(p)$  в кубе с объемом  $L^3$  с числовой плотностью  $n_0 = N/L^3$  выполняется условие нормировки:

$$n_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} n(p) d^3 p = \int_0^{\infty} n(p) 4\pi p^2 dp$$

Давление  $P$  определяется как перенесенный импульс  $d\vec{p}$  за время  $dt$  через площадку  $L^2$ :

$$P = \frac{1}{L^2} F = \frac{1}{L^2} \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$d\vec{p} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2P_x}_{Term1} \underbrace{v_x L^2 dt}_{Term2} \underbrace{n(p) dp_x dp_y dp_z}_{Term3} \quad - \text{импульс, переносимый в } x\text{-направлении}$$

**Term1** – импульс, переносимый одной частицей; **Term2** – общее число частиц, проходящих за  $dt$  через площадку; **Term3** – плотность числа частиц с импульсом  $p$ .

Для изотропного распределения частиц в сферической СК:

$$P = \frac{1}{L^2} \frac{d\tilde{p}}{dt} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2p\nu p^2 n(p) \sin^3 \theta \cos^2 \varphi d\theta d\varphi dp$$
$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty p\nu(p)n(p)4\pi p^2 dp$$

Давление определяется как момент от функции распределения частиц по импульсам

Аналогично:

$$u_{kin} = \int_0^\infty \varepsilon(p)n(p)4\pi p^2 dp$$

где  $\varepsilon = p^2/2m$  или

$$\varepsilon(p) = pc \left( \sqrt{1 + \left( \frac{m_0 c}{p} \right)^2} - \frac{m_0 c}{p} \right), \quad p\nu = \frac{pc}{\sqrt{1 + \left( \frac{m_0 c}{p} \right)^2}}$$

$$n(p) = ???$$

# 1.2 Функция распределения фермионов и бозонов по энергиям

Фермионы – полуцелый спин (электроны, нейтроны, протоны); бозоны – целый спин (фотоны). При высоких температурах и низкой плотности поведение не отличается (идеальный газ)

$$dN = \frac{dg}{e^{-\eta+E/kT} \pm 1} \quad \text{– функция распределения по энергиям фермионов и бозонов при ТР}$$

$E$  – энергия частицы

$dN$  – число частиц в диапазоне  $(E, E+dE)$

$dg = \alpha d^3x d^3p/h^3$  – количество квантовых состояний в диапазоне  $(E, E+dE)$ ,

$\alpha$  – мультипликативность (мультиплетность), определяемая спином  $\alpha=2s+1$

$+1$  – фермионы (действует принцип запрета Паули: только одна частица в фазовой ячейке)

$-1$  – бозоны (принцип Паули не действует)

$\eta$  – параметр вырождения ( $[\text{хим. потенциал } \mu]/kT$ )  $[dU = TdS - PdV + \mu dN]$

Для систем частиц, обладающих массой покоя (частицы не возникают и не уничтожаются),

$\eta$  определяется из закона сохранения

$$N = \int \frac{dg}{e^{-\eta+E/kT} \pm 1} = const$$

Для фотонов  $N$  не сохраняется и  $\eta = 0$ .

$\eta \gg 1$  сильное вырождение

$-5 < \eta < 5$  слабое вырождение

$\eta \ll -1$  невырожденная система

формальный критерий вырождения

# Функция распределения для невырожденных частиц

$$\eta \ll -1 \Rightarrow \exp\left(-\eta + \frac{E}{kT}\right) \gg 1 \Rightarrow dN \propto \exp(\eta) \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$$

$$E_k = \frac{m\nu^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} \quad \text{и} \quad dg = \alpha \frac{d^3x d^3p}{h^3} \quad (\text{для свободных частиц})$$

$$\Rightarrow dN = \alpha \exp(\eta) \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{d^3x d^3p}{h^3} \Rightarrow N = \frac{\alpha}{h^3} \exp(\eta) \nu (2\pi mkT)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \exp(\eta) = Nh^3 \alpha^{-1} \nu^{-1} (2\pi mkT)^{-3/2}$$



$$dN = \frac{N}{V} \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) d^3p dV \quad \text{уравнение Максвелла}$$

Функция распределения по энергиям невырожденных частиц для случая ТР

## Критерий вырождения для газа частиц

$$\lambda_{deBroglie} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

длина волны де Бройля для частицы

$$n = N/V = r_0^{-3}$$

$r_0$  – среднее расстояние между частицами

$$\eta \ll -1: \exp(\eta) = \frac{n h^3}{\alpha (2\pi mkT)^{3/2}} \Rightarrow \eta = \ln\left(\frac{1}{\alpha} \frac{\lambda_{deBroglie}^3}{r_0^3}\right)$$

невыврожденный случай

Критерий невырожденности ( $\eta \ll -1$ ):  $r_0 \gg \lambda_{deBroglie}$

В астрофизике вырождаются обычно фермионные системы:

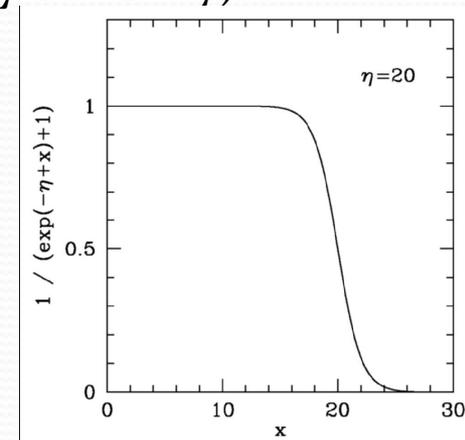
$\alpha/h^3$  – максимальная фазовая плотность (одна частица на фазовую ячейку)

Для нерелятивистских фермионов с  $\varepsilon = p^2/2m$

$$f(\varepsilon) = \left( \exp\left(-\eta + \frac{\varepsilon}{kT}\right) + 1 \right)^{-1} = \left( \exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1 \right)^{-1}, \quad \eta = \frac{\mu}{kT}$$

$$kT \ll \mu \quad (\eta \gg 0): f(\varepsilon) \rightarrow \begin{cases} 1, & \varepsilon < \mu \\ 0, & \varepsilon > \mu \end{cases}$$

вырождение фермионной системы



Система фермионов вырождается, когда температура  $\ll$  хим. потенциала, в таком случае  $f(\varepsilon) = 0$  при  $\mu = \varepsilon_F$  (энергия Ферми (наибольшая энергия частиц в системе) и соответствующий ей импульс Ферми  $p_F$ )

Параметр вырождения определяется из нормировки на сохранение полного числа частиц в системе:

$$N = \frac{\alpha}{h^3} \iint \frac{1}{\exp\left(-\eta + \frac{p^2}{2mkT}\right) + 1} d^3 p d^3 x$$

Для однородного и изотропного распределения частиц в фазовом пространстве:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\alpha}{h^3} \int \frac{1}{\exp\left(-\eta + \frac{p^2}{2mkT}\right) + 1} 4\pi p^2 dp = \left[ x = \frac{p^2}{2mkT} \right] = \frac{\alpha}{h^3} \frac{2}{\pi^{1/2}} (2\pi mkT)^{3/2} \int \frac{x^{1/2} dx}{\exp(-\eta + x) + 1}$$

При  $\eta \gg 1$   $\left( \begin{array}{l} \text{сильное вырождение} \\ \frac{1}{\exp(-\eta + x) + 1} - \text{ступенчатая ф-ия} \end{array} \right) \int \frac{x^{1/2} dx}{\exp(-\eta + x) + 1} = \int_0^\eta x^{1/2} dx = \frac{2}{3} \eta^{3/2}$

Решая относительно  $\eta$  и выражая через  $\lambda_{deBroglie}$  и  $r_0$ , получим

$$\eta = \frac{1.21}{\alpha^{2/3}} \left( \frac{\lambda_{deBroglie}}{r_0} \right)^2 \Rightarrow \eta \gg 1 \text{ при } r_0 \ll \lambda_{deBroglie} \text{ (велика роль квантовых взаимодействий)}$$

$$n = \frac{\alpha}{h^3} \int_0^{p_F} n(p) 4\pi p^2 dp = \frac{\alpha}{h^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3 \Rightarrow p_F = h \left( \frac{3}{\alpha 4\pi} \right)^{1/3} n^{1/3}$$

Для полностью вырожденного состояния. **Импульс зависит ТОЛЬКО от n!!!**

# Характерные астрофизические случаи

Вырождаются в основном фермионные системы. Критерий вырождения:

$$\frac{\lambda_{deBroglie}}{r_0} \begin{cases} \gg 1 - \text{Ферми - газ} \\ \ll 1 - \text{идеальный газ (Максвелл / Больцман)} \end{cases}$$

Для Солнца:  $n = \frac{1}{m_p} \frac{M_{Sun}}{\frac{4\pi}{3} R^3}, \quad T \approx 2 \cdot 10^7 \text{ K}$

| Объект            | R                             | n, см <sup>-3</sup> | $\lambda_{deBroglie}/r_0$ |                     |
|-------------------|-------------------------------|---------------------|---------------------------|---------------------|
|                   |                               |                     | электроны                 | протоны/нейтроны    |
| Солнце            | $7 \cdot 10^{10} \text{ см}$  | $8 \cdot 10^{23}$   | 0.15                      | $3.7 \cdot 10^{-3}$ |
| Белый карлик      | $10^{-2} R_{\odot}$           | $8 \cdot 10^{29}$   | 15                        | 0.37                |
| Нейтронная звезда | $1.4 \cdot 10^{-5} R_{\odot}$ | $3 \cdot 10^{38}$   | -                         | 27                  |

- Солнце – идеальный газ

- **белый карлик** – электроны вырождены, протоны максвелловы
- **нейтронная звезда** – нейтроны вырождены

# 1.3 Функция распределения Планка для фотонов

$$dN = \frac{dg}{\exp(E/kT) - 1} \quad \text{Для фотонов число частиц не сохраняется, } \eta = 0$$

$$dg = 2dV \frac{d^3 p}{h^3} = \frac{2dV}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad \text{для изотропного распределения и двух возможных поляризаций}$$

$$E = h\nu; \quad p = \frac{h\nu}{c}; \quad dp = \frac{h}{c} d\nu$$

$$dn = \frac{dN}{dV} = \frac{4\pi}{c} \frac{2\nu^2}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

плотность энергии

$$U_\nu d\nu = h\nu dn d\nu = \frac{4\pi}{c} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} d\nu \Rightarrow U_\nu = \frac{1}{c} \int_{4\pi} B_\nu d\omega = \frac{4\pi}{c} B_\nu,$$

где интенсивность  $B_\nu$  – энергия, проходящая через единичную поверхность в единицу времени в единичном телесном угле

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad \text{функция Планка}$$

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \sigma_B T^4 \quad \text{закон Стефана-Больцмана}$$

$$\frac{h\nu}{kT} \ll 1 \Rightarrow \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$$

$$\Rightarrow B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT$$

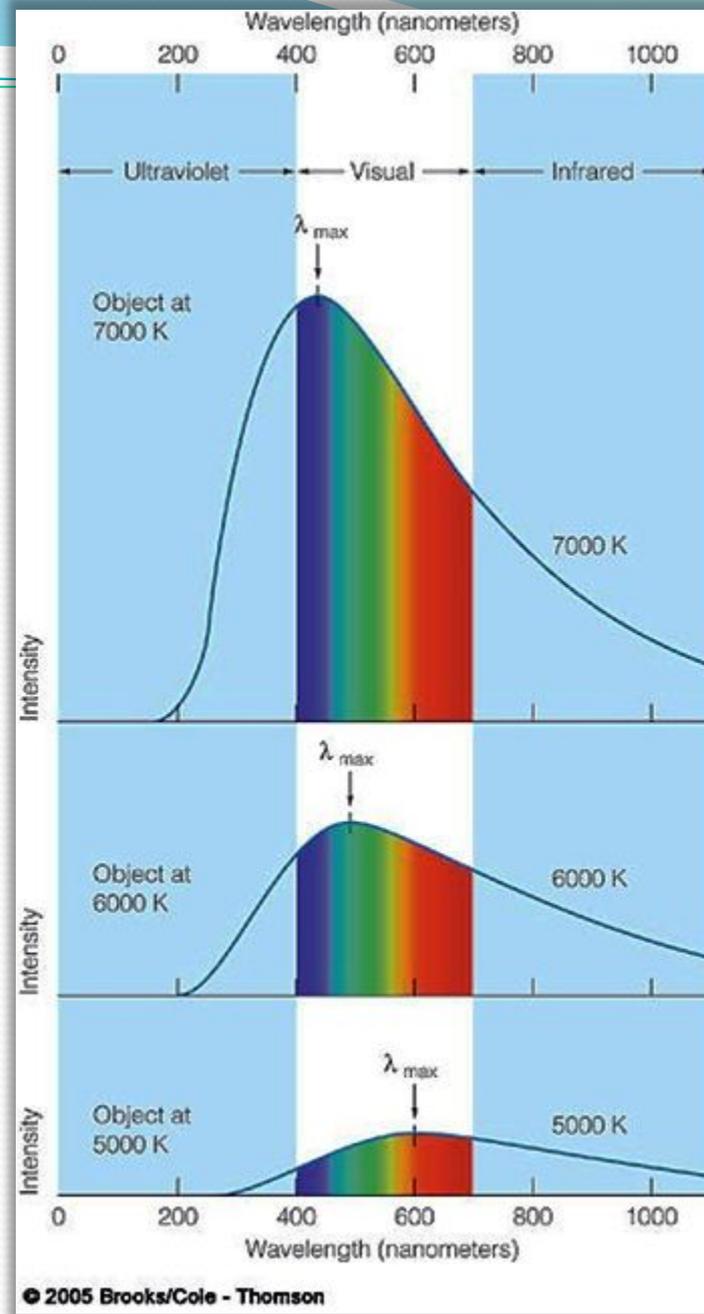
приближение Рэлея-Джинса

$$\frac{h\nu}{kT} \gg 1 \Rightarrow \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \gg 1$$

$$\Rightarrow B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

приближение

Вина



# 1.4 Уравнение СОСТОЯНИЯ

## Классический газ

$$n(p) = \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right); \quad \varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$$

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} p v n(p) 4\pi p^2 dp = nkT, \quad U_{kin} = \int_0^{\infty} \varepsilon(p) n(p) 4\pi p^2 dp = \frac{3}{2} nkT = \frac{3}{2} P$$

## Нерелятивистский вырожденный Ферми-газ

$$P = \frac{1}{3} \frac{2}{h^3} \frac{4\pi}{m} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{1}{3} \frac{2}{h^3} \frac{4\pi}{m} \frac{1}{5} p_F^5$$

$$P = \frac{8\pi}{15} h^2 \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{5/3} \frac{1}{m} n^{5/3} = \frac{2}{3} U_{kin}$$

Релятивистский вырожденный Ферми-газ ( $p_F \gg m_0 c$ ,  $pv(p) = pc(1 - m_0 c^2/2p^2)$ )

$$P = \frac{2}{3} \frac{\pi}{h^3} (p_F^4) \left( 1 - \frac{m_0^2 c^2}{p^2} \right) = \frac{1}{3} U_{kin} \left( 1 + \frac{4m_0 c}{3p_F} \right)$$

$$P = \frac{2}{3} ch \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{4/3} n^{4/3} \left( 1 - n^{-2/3} \frac{m_0^2 c^2}{h^2 \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3}} \right) = \frac{1}{3} U_{kin} \left( 1 + n^{-1/3} \frac{4m_0 c}{3h \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{1/3}} \right)$$

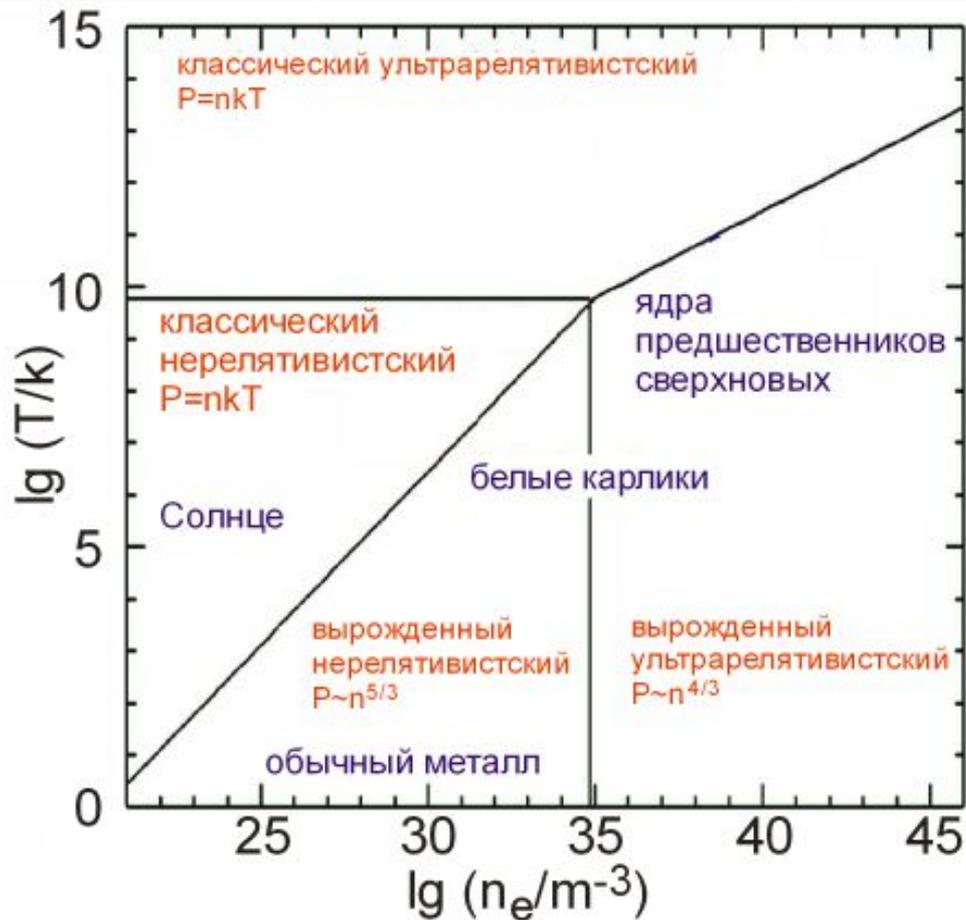
ФОТОНЫ:

$$n(p) = \frac{2}{h^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$P_{phot} = \frac{1}{3} U_{phot}$$

$$U_{phot} = \frac{4\pi}{c} \int B_\nu(T) d\nu \propto T^4$$

# Обобщенная диаграмма Температура – Плотность



## Обычные звезды:

$$P = nkT, \rho = \mu m_p n, U_{\text{kin}} = 3/2 \cdot P$$

( $\mu = \rho / (m_p n)$  – молекулярный вес)

## Белые карлики:

давление вырожденных электронов  
 $n = n_e, \rho = \mu_e m_p n_e, \mu_e = z\mu$ , где  $z$  – число свободных электронов на атом

- нерелятивистское вырождение

$$(\rho < 10^6 \text{ г см}^{-3}):$$

$$P = A_1 \rho^{5/3}, U_{\text{kin}} = 3/2 \cdot P$$

- релятивистское вырождение

$$(\rho > 10^6 \text{ г см}^{-3}):$$

$$P = A_2 (\rho^{4/3} - B_2 \rho^{2/3}),$$

$$P = 1/3 \cdot U_{\text{kin}} (1 + C_2 \rho^{-1/3})$$

## Нейтронные звезды:

давление вырожденных нейтронов  
 $n = n_n, \rho = n m_n$

Уравнение состояния аналогично БК, но с иными  $A, B$  и  $\rho_{\text{cr}}$

# 1.5 Излучение. Базовые понятия

- **Интенсивность**  $I_\nu$  [эрг см<sup>-2</sup> с<sup>-1</sup> Гц<sup>-1</sup> страд<sup>-1</sup> ]

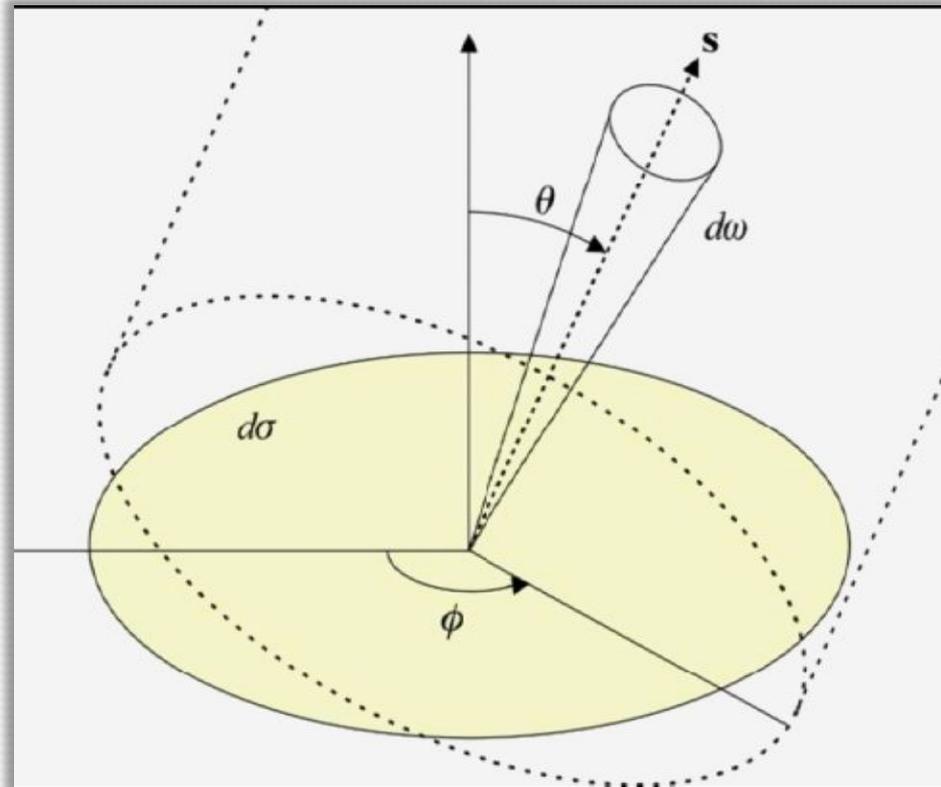
$$dE = I_\nu \cos \theta d\sigma d\nu d\omega dt$$

$I_\nu = \text{const}$  в отсутствие поглощения или излучения  
в евклидовом пространстве

- **Поток энергии излучения**  $F_\nu$  [эрг см<sup>-2</sup> с<sup>-1</sup> Гц<sup>-1</sup> ]

$$dE = F_\nu d\sigma d\nu dt = d\sigma d\nu dt \int_{4\pi} I_\nu \cos \theta d\omega$$

$$F_\nu = \int_{4\pi} I_\nu \cos \theta d\omega$$



- **Плотность излучения**  $\rho_\nu$  [эрг см<sup>-3</sup> Гц<sup>-1</sup>]

$$\rho_\nu = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I_\nu d\omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu, \quad dt = \frac{ds}{c}$$

- **Светимость**  $L_\nu$  [эрг с<sup>-1</sup>]

$$L_\nu = 4\pi R^2 F_\nu; \quad L = 4\pi R^2 \int_0^\infty F_\nu d\nu$$

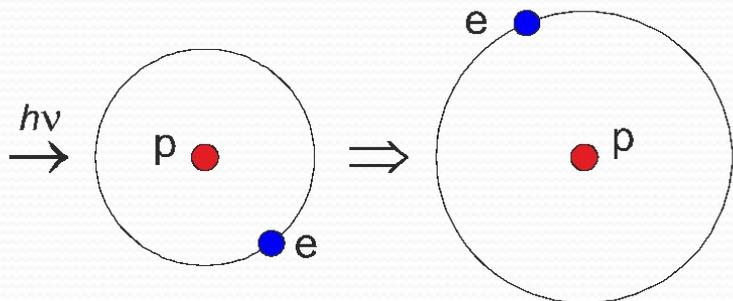
$$f_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} F_\nu = \frac{R^2}{r^2} B_\nu - \text{поток от объекта на Земле}$$

- **Эффективная температура**  $T_{\text{eff}}$

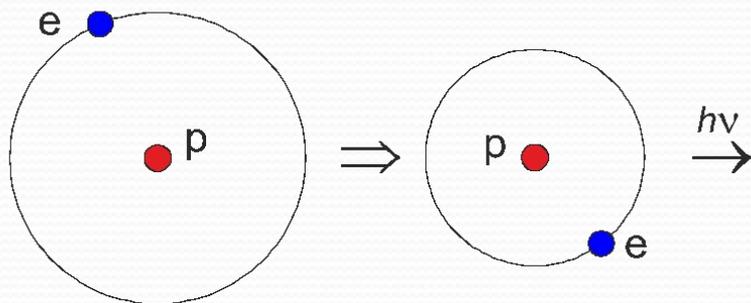
$$L = 4\pi R^2 \sigma_B T_{\text{eff}}^4 - \text{если звезда излучает как АЧТ}$$

# 1.6 Переходы в атомах и молекулах

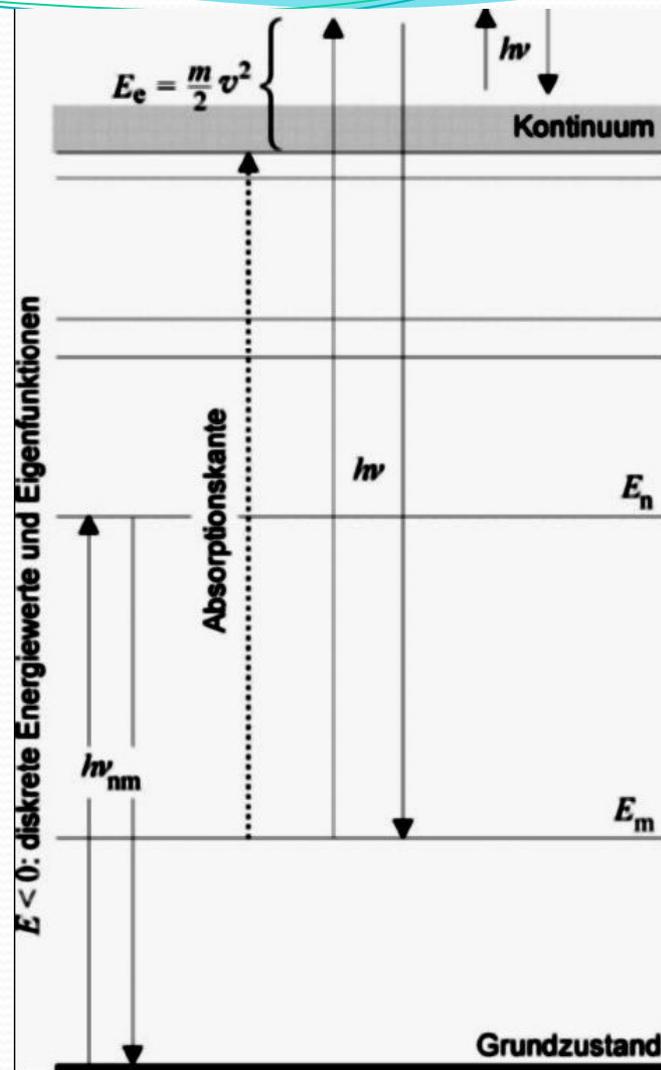
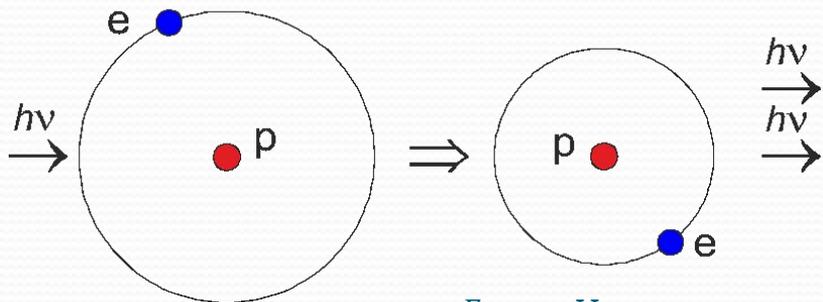
## Поглощение

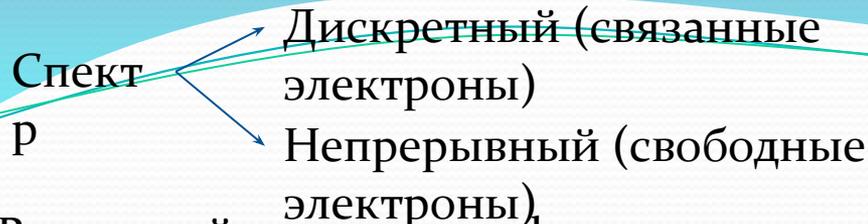


## Спонтанное излучение



## Индукцированное излучение





Взаимодействия между фотонами и электронами (в т.ч. связанными в атомах и молекулах) ведут к

- поглощению ( $dn = n_l B_{lu} \rho_{lu} dt$ )
- спонтанному излучению ( $dn = n_u A_{ul} dt$ )
- вынужденному излучению ( $dn = n_u B_{ul} \rho_{lu} dt$ )

$$A_{ul} = \frac{3h\nu^3}{c^2} \frac{g_l}{g_u} B_{lu}$$

$$g_u B_{ul} = g_l B_{lu}$$

Возможные типы переходов:

- связано-связанные (спектральные линии)
- свободно-связанные (ионизационный/рекомбинационный континуум)
- свободно-свободные (тормозное излучение в поле ионов)

$$d^2W_{ul}^{sp} = A_{ul} \varphi(\nu) d\nu \frac{d\omega}{4\pi}$$

$$d^2W_{ul}^{stim} = B_{ul} I_\nu \varphi(\nu) d\nu \frac{d\omega}{4\pi}$$

$$d^2W_{lu}^{abs} = B_{lu} I_\nu \varphi(\nu) d\nu \frac{d\omega}{4\pi}$$

$$\int_0^\infty \varphi(\nu) d\nu = 1$$

$\varphi(\nu)$  – функция профиля линии

полные вероятности переходов

# Уширение и профиль

1) Естественная ширина:  $\Delta E \cdot \tau \geq h$ ;  $\tau_{natural} = A_{ul}^{-1}$

$$\varphi(\nu) = \frac{2}{\pi} \frac{A_{ul}/2}{(\nu - \nu_0)^2 + (A_{ul}/2)^2} \text{ лоренцев профиль}$$

2) Гауссов профиль (тепловое уширение)

$$\varphi(\nu) = \pi^{-1/2} \frac{1}{\Delta \nu_{therm}} \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_{therm}}\right)^2\right]; \quad \frac{\Delta \nu_{therm}}{\nu} = \sqrt{\frac{2kT}{m_{atom}c^2}}$$

3) Эффекты «давления»

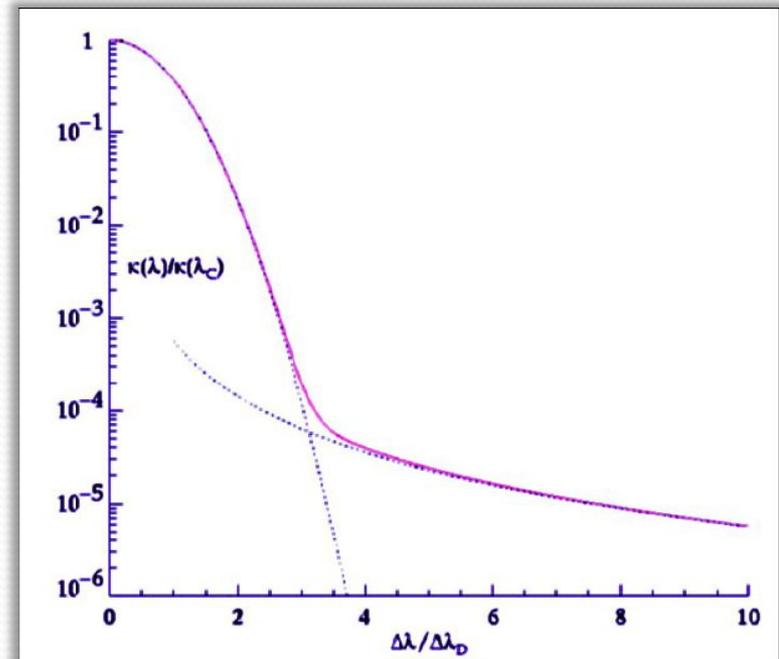
$$\varphi(\nu) = 2\pi^{-1} \frac{\gamma/2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/2)^2}; \quad \gamma = \tau_{natural}^{-1} + \tau_{press}^{-1}, \quad \tau_{press}^{-1} \propto n^{-1}$$

4) Фойгтовский (Voigt) профиль

$$\varphi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta \nu_D} \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y^2)}{\alpha^2 + (x - y)^2} dy$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi} \frac{\gamma}{\Delta \nu_D}$$

$$x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_D}$$



# 1.7 Перенос излучения

# Коэффициент

## поглощения

$dI_\nu = -\kappa_\nu I_\nu ds$  прохождение излучения через среду с

$d^3W_{abs} = B_{lu} \varphi(\nu) I_\nu d\nu d\omega dt$  поглощением вероятностью поглощения фотона одиночным

$dN_\gamma^{abs} = n_l d^3W_{abs} dV = n_l B_{lu} \varphi(\nu) I_\nu d\nu d\omega dt d\sigma ds / 4\pi$  атомом число поглощений в

$$-dI_\nu = \frac{\text{поглощенная энергия}}{d\nu d\omega dt d\sigma} = \frac{h\nu dN_\gamma^{abs}}{d\nu d\omega dt d\sigma} = n_l \frac{h\nu}{4\pi} B_{lu} \varphi(\nu) I_\nu ds$$

$$\kappa_\nu = n_l \frac{h\nu}{4\pi} B_{lu} \varphi(\nu) = n_l \sigma_{lu} \quad \text{Связь между макро и микро параметрами среды}$$

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \varphi(\nu) (n_l B_{lu} - n_u B_{ul})$$

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \varphi(\nu) B_{lu} \left( n_l - n_u \frac{g_l}{g_u} \right) = \sigma_{lu} \left( n_l - n_u \frac{g_l}{g_u} \right)$$

с учетом вынужденного излучения («просветление» среды)

$$\kappa_\nu = \sum_\alpha \sum_\beta \left\{ \sum_\gamma \left[ n_\gamma^{\alpha,\beta} \sigma_{bf,\gamma}^{\alpha,\beta} \left( 1 - b_\gamma^{\alpha,\beta} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) \right. \right. \text{свободно-связанные}$$

$$\left. \left. + \sum_{\delta > \gamma} \left( n_\gamma^{\alpha,\beta} - \frac{g_\gamma^{\alpha,\beta}}{g_\delta^{\alpha,\beta}} n_\delta^{\alpha,\beta} \right) \sigma_{\gamma,\delta}^{\alpha,\beta} \right] \right\} \text{линии}$$

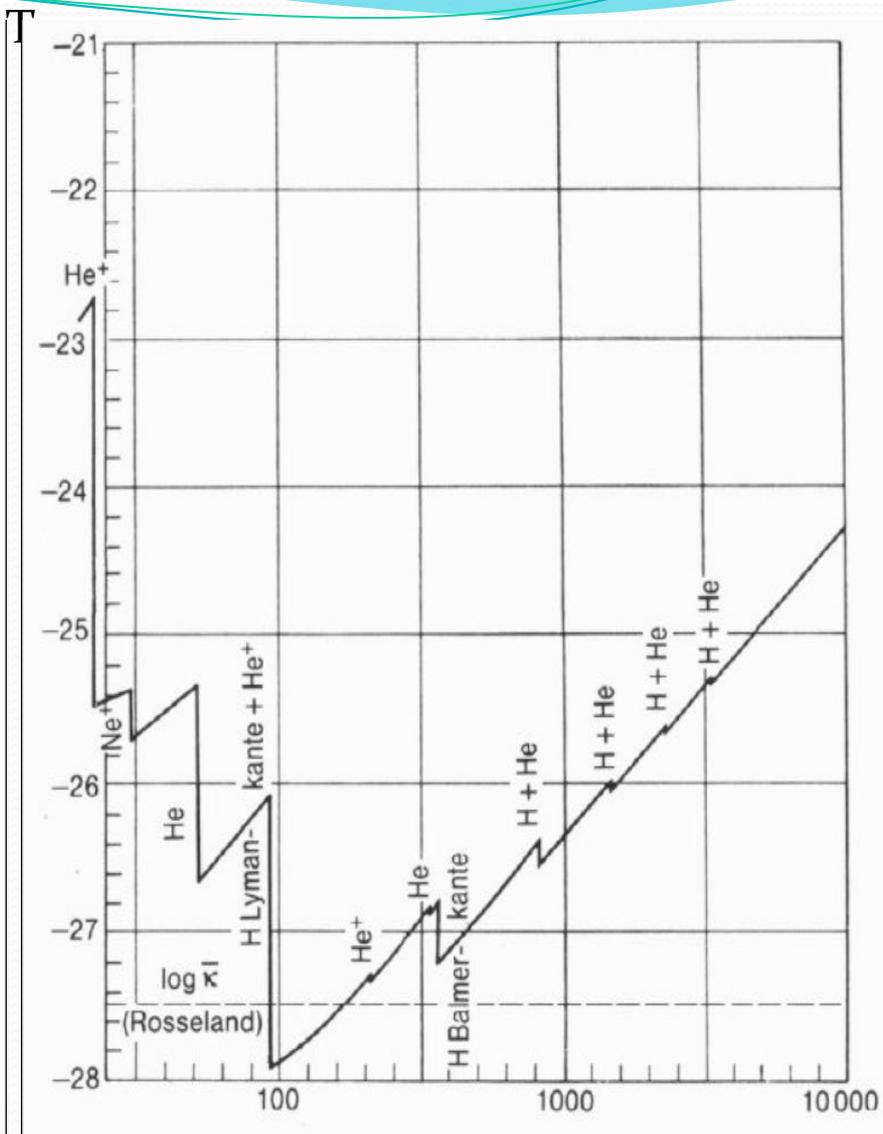
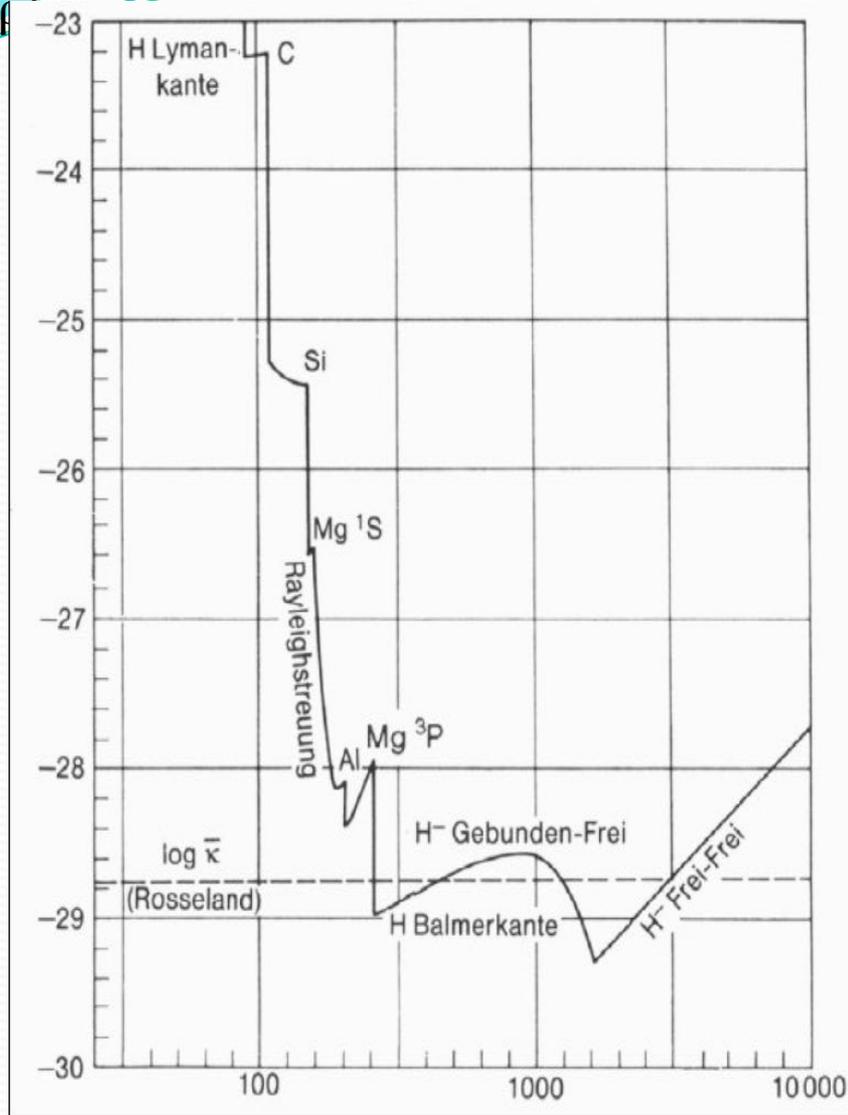
$$\left. \left. + n_i^{\alpha,\beta+1} n_e \sigma_{ff}^{\alpha,\beta} \left[ 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right] \right\} \text{свободно-свободные}$$

$\alpha$  – элемент

$\beta$  – степень ионизации

$b^{\alpha,\beta} = n_Y^{\alpha,\beta}(\text{NLTE}) / n_Y^{\alpha,\beta}(\text{LTE}) \approx 1$

$\kappa_{\nu}(T)$ , как  $\kappa_{\nu} = \rho^{1...2} \kappa_{\nu}(T)$  в сравнительно узких интервалах  $\rho$



$\kappa/\rho$  [ $\text{m}^2/\text{частицу}$ ] от длины волны в нм для Солнца (слева)  $T=5000$  К и  $\tau_{500}$ ,  $T=28000$  К

# Коэффициент излучения

$dI_\nu = \epsilon_\nu ds$  порождение излучения в среде (не зависит от

$I_\nu$ )

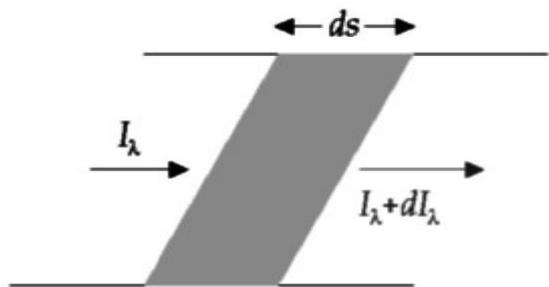
$$\epsilon_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \sum_\alpha \sum_\beta \left\{ \sum_\gamma \left[ \underbrace{n_\gamma^{\alpha,\beta} b_{\nu}^{\alpha,\beta} \sigma_{\nu}^{\alpha,\beta} e^{-\frac{h\nu}{kT}}}_{\text{bound - free}} + \sum_{\delta > \gamma} n_\delta^{\alpha,\beta} \frac{g_\gamma^{\alpha,\beta}}{g_{\alpha,\beta}^{\alpha,\beta}} \sigma_{\nu,\delta}^{\alpha,\beta} \right] + \underbrace{n_{\nu}^{\alpha,\beta+1} n_{\nu} \sigma_{\nu}^{\alpha,\beta} e^{-\frac{h\nu}{kT}}}_{\text{free - free}} \right\}$$

$$\epsilon_\nu = \epsilon_\nu(\rho, T)$$

# Уравнение переноса излучения

$$dI_\nu = \underbrace{-\kappa I_\nu ds}_{\text{поглощение}} + \underbrace{\epsilon_\nu ds}_{\text{излучение}} \Leftrightarrow \frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu I_\nu + \epsilon_\nu$$

однородное ДУ 1-го порядка, решается аналитически при известных  $\kappa$  и  $\epsilon$ , в том случае, если они не зависят от  $I_\nu$



$$d\tau_\nu = \kappa_\nu ds$$

оптическая толщина среды (безразмерная характеристика

$$\tau_\nu = \int_0^s \kappa_\nu ds'$$

оптических свойств и геометрических размеров среды)

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu} = S_\nu$$

$S_\nu$  – функция источника

$$I_\nu = \underbrace{I_\nu^0 e^{-\tau_\nu}}_{\text{поглощение}} + \int \underbrace{\frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu}}_{\text{излучение}} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} d\tau'_\nu$$

Формальное решение  
 1-е слагаемое: начальное излучение уменьшилось в  $\exp(-\tau)$  раз из-за поглощения; 2-е слагаемое: источник, проинтегрированный вдоль луча зрения с учетом поглощения

$$S_v(T) = \frac{\varepsilon_v}{\kappa_v} = B_v(T) = \frac{2hv^2}{c^2} \frac{1}{e^{hv/kT} - 1}$$

закон  
Кихгофа

При ТР  $I_v = B_v(T)$  и  $dI_v/ds = 0$

Локальное термодинамическое равновесие (ЛТР):

- 1) Максвеллово распределение по скоростям с одним значением Т
- 2) Неупругие столкновения доминируют над радиативными процессами (числовая плотность не слишком мала, т. е. распределение по уровням энергии описывается соотношениями Больцмана и Саха,  $S_v = B_v(T) = \varepsilon_v/\kappa_v$ )

$$\frac{dI_v}{ds} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad I_v \neq B_v(T)$$

$$\frac{dI_v}{ds} = -\kappa_v (I_v - B_v(T(s)))$$

Приближение ЛТР хорошо работает в звездных атмосферах, в сравнительно малых объемах среды ( $T = \text{const}$ )

# 1.8 Линии излучения и поглощения

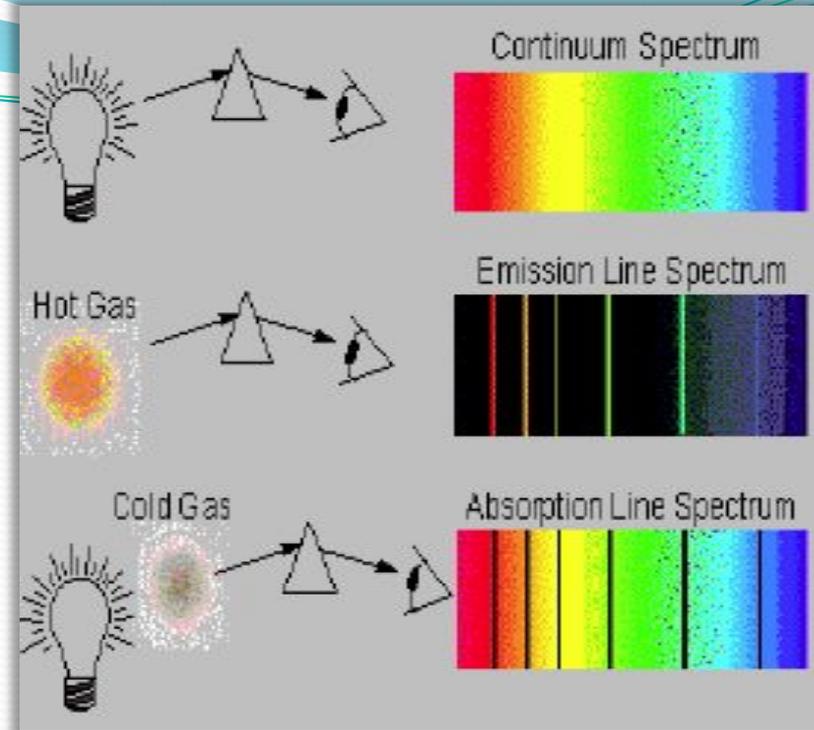
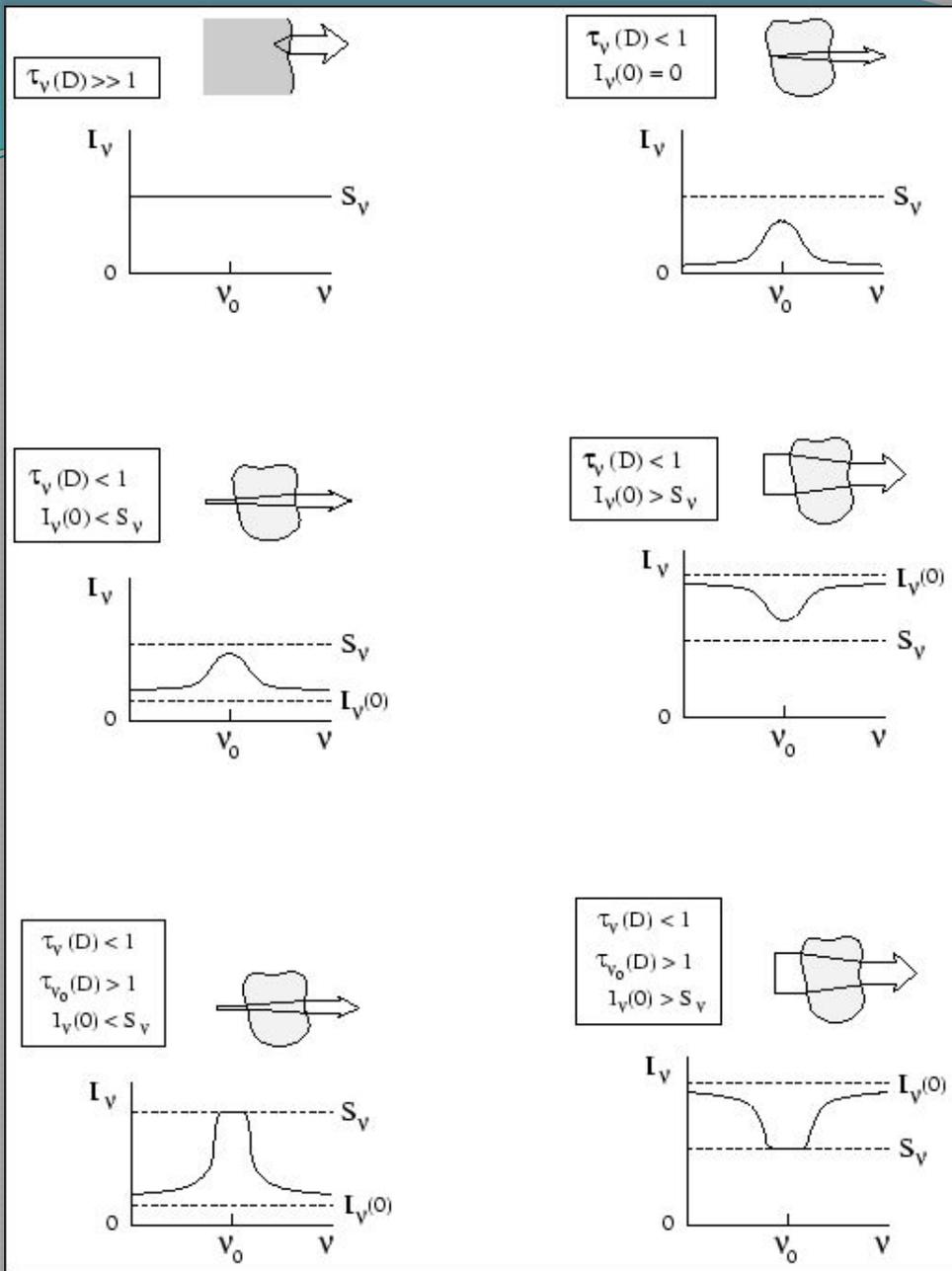
$$I_\nu = I_\nu^0 e^{-\tau_\nu} + S_\nu(T)(1 - e^{-\tau_\nu}) : \text{общее решение}$$

$$I_\nu = I_\nu^0 e^{-\tau_\nu} + B_\nu(T)(1 - e^{-\tau_\nu}) : \text{ЛТР – случай}$$

- 1) *в пределе больших оптических толщин*  $\tau_\nu \rightarrow \infty$  интенсивность излучения становится равной функции источника  $I_\nu \rightarrow S_\nu$ . (Осторожнее! Если в среде есть рассеяние, то интенсивность сама дает вклад в функцию источника, и картина сильно усложняется).
- 2) Если  $I_\nu > S_\nu$ , то  $dI_\nu/d\tau < 0$ ,  $I$  уменьшается вдоль луча.
- 3) Если  $I_\nu < S_\nu$ , то  $dI_\nu/d\tau > 0$ ,  $I$  возрастает вдоль луча.

**Заключение:** Интенсивность ВСЕГДА стремится к функции источника.

- 1) Среда оптически толстая на всех частотах  $\tau_\nu \gg 1$ . Линий нет, виден непрерывный спектр.
- 2) Среда оптически тонкая,  $\tau_\nu < 1$  на всех частотах, фоновой подсветки нет ( $I_\nu(0) = 0$ ). Наблюдается линия излучения на частоте  $\nu_0$ , причем ее максимальная интенсивность меньше функции источника  $I_{\nu_0} < S_{\nu_0}$ .
- 3) Ничего качественно не изменяется в случае, если есть фоновая подсветка  $I_\nu(0) < S_\nu$ .
- 4) Качественно иная картина, если фоновая подсветка больше функции источника  $I_\nu(0) > S_\nu$  – появляется линия поглощения.
- 5) Для случая большой оптической толщины в центре линии,  $\tau_\nu > 1$ , картина качественно не меняется, за исключением достижения в линии величины функции источника.



## Применимость ЛТР

$$u_{\text{photon}} = \frac{4\pi}{c} \int_0^{\infty} B_{\nu} d\nu = \frac{4\pi}{c} \sigma_B T^4$$

$$u_{\text{particle}} = \frac{3}{2} nkT$$

$$u_{\text{photon}} = u_{\text{particle}} \Rightarrow n_{\text{crit}} = 36.5 \cdot T^3$$

$$\frac{u_{\text{photon}}}{u_{\text{particle}}} = 36.5 \frac{T^3 / K^3}{n / \text{cm}^{-3}} \begin{cases} \ll 1 & \text{ЛТР} \\ \approx 1 & \text{квази-ЛТР} \\ \gg 1 & \text{не-ЛТР} \end{cases}$$

| ЛТР  | квази-ЛТР  | не-ЛТР  |
|--|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Звездные атмосферы (<math>n = 10^{13} \dots 10^{16} \text{ cm}^{-3}</math>, <math>T_{\text{eff}} \sim 25\,000 \text{ K}</math>)</li> <li>Центральные части звезд</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Атмосферы сверхгигантов (<math>n = 10^{10} \dots 10^{13} \text{ cm}^{-3}</math>)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Хромосферы, короны звезд</li> <li>Звездные ветры</li> <li>Межзвездная среда</li> <li>Межгалактическая среда</li> </ul> |

