Глава 2

Кратные интегралы

§ 1. Двойной интеграл

1^0. Площадь плоского множества. *Плоской фигурой* (*плоским множеством*) будем называть произвольное ограниченное множество точек плоскости. Примерами плоских множеств могут служить треугольники, параллелограммы, окружности и т.д.

Многоугольной фигурой на плоскости называют множество, состоящее из конечного числа ограниченных многоугольников, лежащих на этой плоскости.

Рассмотрим всевозможные многоугольные фигуры P, вписанные в F, т.е. находящиеся целиком в F, и всевозможные многоугольные фигуры Q, описанные вокруг F, т.е. содержащие целиком F.

Множество площадей $\mu(P)$ всех вписанных многоугольных фигур ограничено сверху (например, площадью описанной многоугольной фигуры Q). Множество площадей $\mu(Q)$ всех описанных многоугольных фигур ограничено снизу (например, нулем). Поэтому существуют точная нижняя грань $\inf \mu(Q) = S^*(F)$ и точная верхняя грань $\sup \mu(P) = S_*(F)$.

Числа $S^*(F)$ и $S_*(F)$ называют *верхней* и *нижней площадью* фигуры F.

Плоская фигура F называется *квадрируемой* (*имеющей площадь*), если ее верхняя площадь $S^*(F)$ совпадает с нижней площадью $S_*(F)$ и это общее значение называется *площадью фигуры* $F: S^*(F) = S_*(F) = S(F)$.

Площадь плоской фигуры является неотрицательным числом и обладает следуюшими свойствами.

1) Аддитивность. Если F_1 и F_2 – две плоские квадрируемые фигуры без общих внутренних точек, то $S(F_1 \cup F_2) = S(F_1) + S(F_2)$.

2) Инвариантность. Если квадрируемая фигура F_1 получается из фигуры F_2 с помошью операций сдвига и (или) вращения, то их площади совпадают: $S(F_1) = S(F_2)$.

3) Монотонность. Если квадрируемая фигура F_1 содержится в квадрируемой фигуре F_2, то $S(F_1) \le S(F_2)$.

2^0. Понятие двойного интеграла. Пусть на плоскости Oxy задана открытая или замкнутая область D, имеющая площадь, и в этой области задана функция $z = f(x, y)$. Разобьем область D произвольным образом на n частей (площадок) D_i, $i = \overline{1, n}$, без общих внутренних точек с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. В каждой из D_i возьмем произвольную точку $P_i\left(\xi_i; \eta_i\right)$ и вычислим в этой точке значение функции $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$. Составим *интегральную* сумму

$$S_n = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \ldots + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i .$$

Увеличивая n и выбирая точки P_i в соответствующих D_i, получим последовательность интегральных сумм

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots . \tag{1}$$

Обозначим через λ_n максимальный диаметр площадок D_i.

Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ *по области* D называется

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy . \tag{2}$$

Теорема 1. *Если функция f непрерывна в замкнутой квадрируемой области D, то она интегрируема по этой области.*

4^0. Свойства двойного интеграла. Входящие в формулы интегралы существуют.

1) $\iint\limits_D [f_1(x,y)+f_2(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$.

2) $\iint\limits_D cf(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

3) Аддитивность интеграла по множествам. Если функция f интегрируема на D, область D разбивается на части D_1 и D_2, не имеющие общих внутренних точек, то интеграл по области D равен сумме интегралов по областям D_1 и D_2:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

4) Если в области D $f(x,y) \le g(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy.$$

5) $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,dx\,dy$.

6) Если $f(x,y)\equiv\mathbf{1}$, то $\iint\limits_D 1\,dx\,dy = S(D)$.

7) Теорема об оценке двойного интеграла. *Если функция $f(x,y)$ интегрируема на области D и $m \le f(x,y) \le M$ на D, то*

$$S\cdot m \le \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \le S\cdot M\,, \qquad (6)$$

где S – площадь области D.

8) Теорема о среднем значении. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = f(C)\,S\,, \qquad (7)$$

где C – некоторая точка из D, S – площадь D.

§ 2. Вычисление двойных интегралов

1. Вычисление двойных интегралов в декартовой системе координат. Область D называется *правильной* или *стандартной в направлении оси Ox* (оси *Oy*), если каждая прямая, проходящая через внутреннюю точку области D параллельно оси Ox (оси Oy), пересекает границу области D только в двух точках.

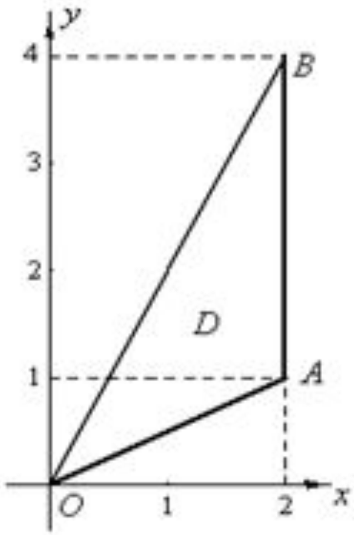
Теорема 2. *Пусть D – замкнутая, ограниченная, правильная в направлении Oy область. Пусть существуют двойной интеграл* $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ *и повторный интеграл* $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ *(a и b – наименьшая и наибольшая абсциссы точек области D,* $y_1(x), y_2(x)$ *– ординаты точек пересечения границы области D с прямой, параллельной оси Oy,* $y_1(x) \le y_2(x)$*). Тогда справедливо равенство*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,. \qquad (6)$$

Аналогично, для области D, правильной в направлении оси Ox,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,, \qquad (7)$$

где c и d – наименьшая и наибольшая ординаты точек области D, $x_1(y)$ и $x_2(y)$, $x_1(y) \le x_2(y)$, – абсциссы точек пересечения области D прямой, параллельной оси Ox.



Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (2x+y)dxdy$, где область D ограничена линиями

$x=0$, $x=2$, $y=\dfrac{x}{2}$, $y=2x$.

Решение. Изобразим область D интегрирования на чертеже (рис. 1). Она является правильной в направлении оси Ox. Поэтому

$$\iint\limits_D (2x+y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} (2x+y)\,dy = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} (2x+y)dy \right] dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left[\left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{\frac{x}{2}}^{2x} \right] dx = \int\limits_0^2 \left[4x^2 + 2x^2 - x^2 - \frac{x^2}{8} \right] dx = \int\limits_0^2 \left[\frac{39x^2}{8} \right] dx = \frac{39x^3}{24} \Bigg|_0^2 = \frac{13}{8}(8-0) = 13$$

2. Замена переменных в двойном интеграле. На плоскости Oxy рассмотрим некоторую область D и определенные в этой области однозначные функции

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y). \tag{1}$$

Предположим, что уравнения (1) разрешимы относительно x и y, т.е.

$$x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta), \tag{2}$$

причем функции $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$ определены и непрерывно дифференцируемы по ξ и η в области Q плоскости $O\xi\eta$.

Пусть в некоторой области $D \in \mathbb{R}^2$ для функции $f(x,y)$ существует двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$. Пусть задано взаимно однозначное отображение (2) между областями D плоскости Oxy и Q плоскости $O\xi\eta$.

Формула замены переменных для двойного интеграла имеет вид

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_Q f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi\, d\eta. \tag{3}$$

3^0. Двойной интеграл в полярной системе координат. Декартовы координаты $(x;y)$ выражаются через полярные $(\rho;\varphi)$ с помощью формул

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_Q f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} d\rho\, d\varphi =$$

$$= \iint\limits_Q f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Переход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2)$ и (или) область D есть круг, кольцо или часть таковых.

§3. Тройной интеграл

1⁰. Объем трехмерного тела. *Телом* будем называть любое ограниченное множество точек пространства $\mathbb{R}^3$. Под *многогранным телом* будем понимать объединение любого конечного числа ограниченных многогранников.

Верхним объемом V^* тела F называется точная нижняя грань множества объемов $\mu(Q)$ всех многогранных тел Q, содержащих F, т.е. $V^* = \inf \mu(Q)$.

Нижним объемом V_* тела F называется точная верхняя грань множества объемов $\mu(P)$ всех многогранных тел P, содержащихся в F, т.е. $V_* = \sup \mu(P)$.

Тело F называется *кубируемым (имеющим объем)*, если $V_* = V^* = V(F)$. Число $V(F)$ называется *объемом тела F*.

Объем тела является неотрицательным числом и обладает свойствами аддитивности, инвариантности и монотонности, аналогичными свойствам площади плоского тела.

2^0. Определение тройного интеграла и его свойства. Пусть в трехмерной декартовой системе координат задана кубируемая область V и на ней определена функция $f(x,y,z)=f(P)$, $P=(x;y;z)$.

Разобьем область V произвольно на n частей V_i с объемами ΔV_i. В каждой из частей V_i выберем любую точку P_i и найдем значение $f(P_i)$ функции f в этой точке.

Составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$. Рассмотрим предел этой суммы при условии, что наибольший диаметр λ_n частей V_i стремится к нулю. Если такой предел существует и не зависит от способа разбиения области V на части, то его значение называется *тройным интегралом от функции* $f(x,y,z)=f(P)$ *по множеству* V и обозначается символами

$$\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i=\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Если функция* $f(x,y,z)$ *непрерывна в замкнутой кубируемой области V, то она интегрируема по V.*

Теорема 1. *Пусть существует тройной интеграл* $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ *по области V, являющейся правильной в направлении оси* Oz. *Пусть существует интеграл* $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$, *где* $z_1(x,y)$ *и* $z_2(x,y)$, $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$, *есть проекции на ось* Oz *точек пересечения прямой, параллельной оси* Oz *с границей множества V. Тогда существует двойной интеграл* $\iint\limits_{V_1} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ *по двумерной области* V_1, *являющейся проекцией области V на плоскость* Oxy, *и справедлива формула повторного интегрирования*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{V_1} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \qquad (1)$$

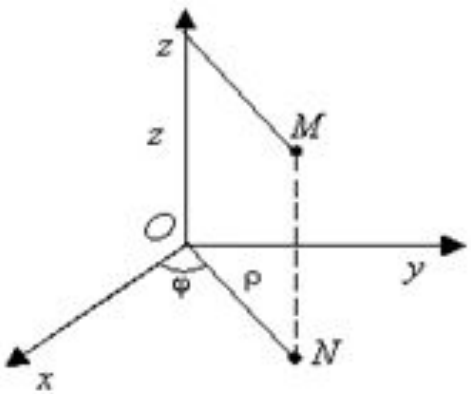
Если при этом область V_1 *является правильной в направлении оси* Oy *и* $y_1(x), y_2(x), y_1(x) \le y_2(x)$, *есть ординаты точек пересечения прямой, параллельной оси* Oy *с областью* V_1, а a, b *есть, соответственно, наименьшая и наибольшая абсциссы точек области* V_1 *(и области V), то*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \qquad (2)$$

2⁰. Замена переменных в тройном интеграле. Если ограниченная замкнутая область D пространства переменных (x, y, z) взаимно однозначно отображается на область Q пространства переменных (u, v, w) с помошью непрерывно дифференцируемых функций $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, то справедлива формула

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_Q f[(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} du\, dv\, dw.$$

3^0. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.



Цилиндрическими координатами точки M называется тройка $(\rho;\varphi;z)$, где ρ и φ – полярные координаты точки N на плоскости Oxy, а z – аппликата точки M. Декартовы координаты точки M выражаются через цилиндрические с помощью равенств

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z.$$

Следовательно, формула замены переменных в тройном интеграле примет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz,$$

где V – область изменения декартовых координат, V' – соответствующая область изменения цилиндрических координат.

4^0. Тройной интеграл в сферических координатах. Обозначим через r расстояние

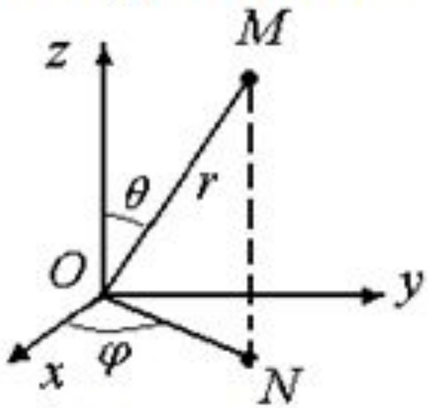


Рис. 8

от начала координат O до точки M, через θ – угол между осью Oz и вектором $\overline{OM}$, через φ – угол между осью Ox и вектором $\overline{ON}$, тогда $(r;\theta;\varphi)$ будут являться *сферическими координатами* точки M.

Название «сферические координаты» связано с тем, что координатная поверхность $r = \mathrm{const}$ является сферой.

Переход от сферических координат к декартовым осуществляется по формулам

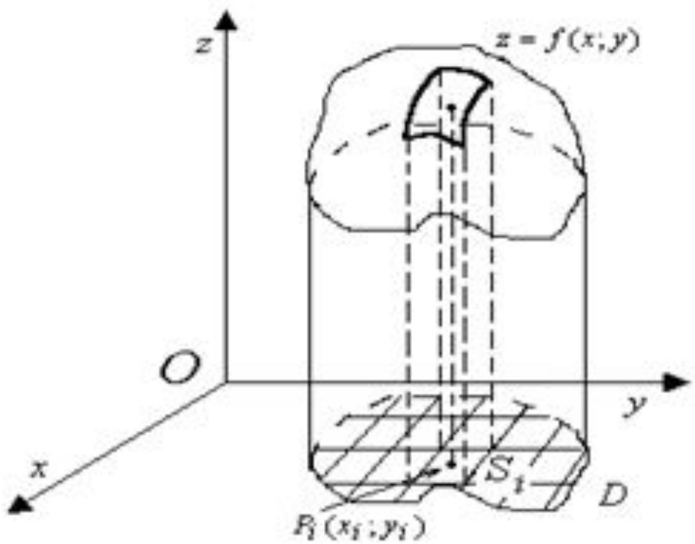
$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

тогда

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_Q f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi d\theta,$$

где D – область изменения декартовых координат, Q – соответствующая область изменения сферических координат.

§ 6. Приложения кратных интегралов



1^0. Вычисление объема тела. Значение двойного интеграла

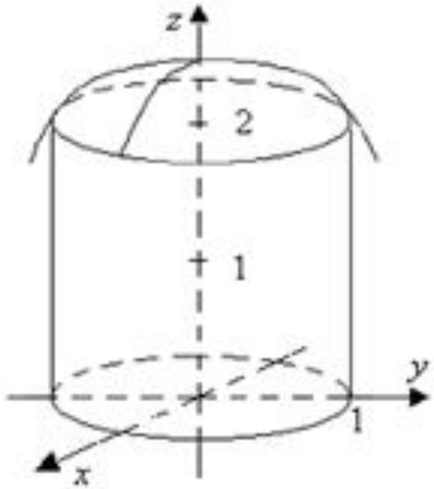
$$V(G) = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad (1)$$

численно равно объему цилиндрического тела G, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y) \geq 0$, снизу областью D в плоскости $z = 0$ (рис.). В формуле (1) заключается *геометрический смысл двойного интеграла*.

Объем тела G может быть вычислен по формуле

$$V(G) = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz\,.$$

Эта формула применима не только к цилиндрическим телам, но и к областям, расположенным произвольным образом в пространстве.



Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $z=0$, цилиндром $x^2+y^2=1$ и параболоидом $x^2+y^2+3z-7=0$.

Решение. По формуле (2) получаем $V=\iint\limits_D \frac{1}{3}(7-x^2-y^2)\,dx\,dy$, где D есть круг $x^2+y^2\le 1$ в плоскости $z=0$. Переходя к полярным координатам, имеем

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{D'}(7-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(7\rho-\rho^3)\,d\rho=2\frac{1}{6}\pi.\ \square$$

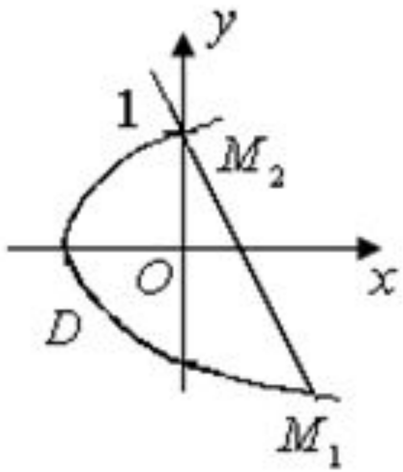
Пример 2. Вычислить объем шара радиуса R.

Решение. Применяя сферические координаты, получаем

$$V=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^R\rho^2\,d\rho=\frac{R^3}{3}2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\frac{4}{3}\pi R^3.\ \square$$

2^0. **Вычисление площади области.** Площадь S области D равна

$$S = \iint\limits_D dxdy .$$



Пример 3. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями $y^2 = x+1,\ 2x+y=1$.

Решение. Область D – фигура, ограниченная линиями $y^2 = x+1,\ \ y = \mathbf{1} - 2x$. Точки пересечения данных линий: $M_1\left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{2}\right)$, $M_2(0;1)$. Следовательно, искомая площадь равна

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-\frac{3}{2}}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{\frac{1-y}{2}} dx = \int\limits_{-\frac{3}{2}}^{1} \left(-y^2 - \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right) dy = \frac{125}{48} . \ \square$$

3^0. Вычисление площади поверхности. Пусть поверхность σ задана уравнением $z = f(x,y)$, область D является проекцией σ на плоскость Oxy, и в области D функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Площадь S поверхности, определяемой функцией $f(x,y)$, вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy. \qquad (4)$$

Пример 4. Вычислить площадь поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Решение. Уравнение верхней половины сферы имеет вид $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ и

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

По формуле (4) получаем $S=2\iint\limits_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dx\,dy$, где область интегрирования D определяется условием $x^2+y^2\le R^2$. Переходя в последнем интеграле к полярным координатам, получим

$$S=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\,d\rho=-2R\int_0^{2\pi}d\varphi\sqrt{R^2-\rho^2}\Big|_0^R=2R\int_0^{2\pi}R\,d\varphi=4\pi R^2.\ \square$$

4^0. **Вычисление массы плоской пластины и массы пространственного тела.** Рассмотрим на плоскости Oxy материальную пластину, т.е. некоторую область D, по которой распределена масса m с плотностью $\gamma(x,y)$. Тогда

$$m = \iint_D \gamma(x,y)\,dxdy\,. \tag{5}$$

Формула (5) отражает *физический смысл двойного интеграла*.

Если дано некоторое тело V с плотностью $\gamma(x,y,z)$, представляющей собой непрерывную функцию, то тройной интеграл $\iiint_V \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, взятый по объему, занимаемому этим телом, представляет собой массу m данного тела. В этом заключается *физический смысл тройного интеграла*.

5^0. Вычисление момента инерции пластины и момента инерции пространственного тела.

Известно, что момент инерции I_l материальной точки M с массой m относительно некоторой оси l равен произведению массы точки на квадрат ее расстояния от этой оси, а момент инерции I_0 материальной точки M с массой m относительно точки O равен произведению массы точки на квадрат расстояния между точками.

Момент инерции системы материальных точек равен сумме моментов инерций, составляющих эту систему масс.

Пусть область D плоскости Oxy представляет пластину, имеющую плотность $\gamma(x,y)$.

Момент инерции I_y пластины относительно оси Oy:

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \gamma(x,y)\,dx\,dy .$$

Момент инерции I_x пластины относительно оси Ox :

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \gamma(x,y)\,dx\,dy .$$

Приняв во внимание, что момент инерции материальной точки с массой m относительно начала координат равен $m(x^2+y^2)$, получим, что момент инерции I_0 пластины относительно начала координат равен $I_0 = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)\,dx\,dy$ и $I_0 = I_x + I_y$.

Моменты инерции пространственного тела с объемной плотностью $\gamma(x,y,z)$ относительно координатных осей вычисляются по формулам:

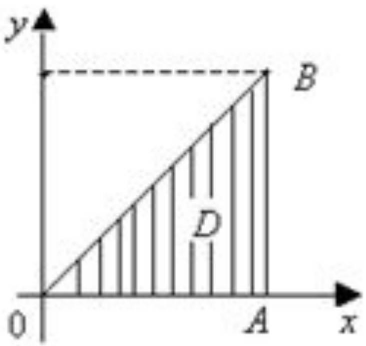
$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \qquad I_y = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_x = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

момент инерции относительно начала координат:

$$I_0 = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\ ,$$

причем $I_0 = \dfrac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$.



Пример 7. Вычислить момент инерции треугольника с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$ относительно начала координат, если $\gamma(x,y)=x^2$.

Решение. Обозначая через D заданный треугольник, имеем

$$I_0=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)x^2dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x\left(x^4+x^2y^2\right)dy=\frac{2}{9}.\ \square$$

6^0. Вычисление координат центра тяжести пластины и координат центра тяжести пространственного тела. Найдем координаты центра тяжести пластины, занимающей в плоскости Oxy некоторую область D. Пусть $\gamma(x,y)$ – плотность этой пластины в точке $M(x;y)$. Координаты центра тяжести пластины будут вычисляться по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m}, \tag{7}$$

где $M_y = \iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy$, $M_x = \iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy$ называются *статическими моментами* пластины относительно осей Oy и Ox.

Аналогично выводятся *координаты* x_c, y_c, z_c *центра тяжести пространственного тела*, имеющего плотность $\gamma(x,y,z) = \gamma(P)$:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(M)dv}{\iiint\limits_V \gamma(M)dv}, \qquad y_c = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(M)dv}{\iiint\limits_V \gamma(M)dv}, \qquad z_c = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(M)dv}{\iiint\limits_V \gamma(M)dv}.$$

Пример 8. Вычислить координаты центра тяжести треугольника с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$, если $\gamma(x,y) = x^2$.

Решение. Находим сначала массу пластины:

$$m = \iint_D x^2\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x x^2\,dy = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}.$$

Затем вычислим статические моменты относительно осей координат:

$$M_y = \iint_D x \cdot x^2\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x x^3\,dy = \int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5},$$

$$M_x = \iint_D y \cdot x^2\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x y \cdot x^2\,dy = \int_0^1 \frac{x^4}{2}\,dx = \frac{1}{10}.$$

Теперь по формулам (7) находим $x_c = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{4}{5}$; $\quad y_c = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{2}{5}$. □