

Глава 3

***КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ***

§ 1. Криволинейный интеграл первого рода

1⁰. Определение криволинейного интеграла первого рода.

Пусть на плоскости \mathbb{R}^2 , где определена прямоугольная система координат Oxy , задана спрямляемая кривая $AB = L$, не имеющая точек самопересечения и участков самоналегания. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leq t \leq b, \quad (1)$$

и пусть на кривой AB определена непрерывная функция $f(x, y)$.

Разобьем отрезок $a \leq t \leq b$ на n частей точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. В силу задания (1), кривая AB будет разбита на n частей точками $M_k(x_k; y_k), k = \overline{0, n}$ (рис. 1), где $x_k = \varphi(t_k), y_k = \psi(t_k)$. На каждой дуге $M_{k-1}M_k$ выберем произвольную точку N_k и составим

сумму

$$\sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k, \quad (2)$$

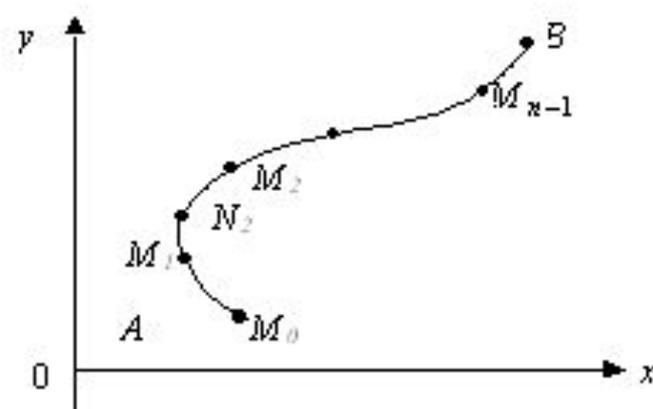


Рис. 1

где через Δl_k обозначена длина дуги $\overline{M_{k-1}M_k}$. Если предел интегральной суммы (2) при стремлении к нулю

$$\Delta l(n) = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta l_k$$
 существует и не зависит

от способа разбиения отрезка $a \leq t \leq b$ на части, то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой AB* и обозначается

$$\lim_{\Delta l(n) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k = \int_{AB} f(N) dl = \int_L f(x, y) dl \quad (3)$$

2⁰. Свойства криволинейного интеграла первого рода. Считаем, что входящие в формулы интегралы существуют.

1) $\int_L Cf(x, y)dl = C \int_L f(x, y)dl$, где $C = \text{const}$.

2) $\int_L (f_1(x, y) + f_2(x, y))dl = \int_L f_1(x, y)dl + \int_L f_2(x, y)dl$.

3) Если кривая L разбита на конечное число частей L_k , то

$$\int_L f(x, y)dl = \int_{L_1} f(x, y)dl + \int_{L_2} f(x, y)dl + \dots + \int_{L_k} f(x, y)dl.$$

4) $\left| \int_L f(x, y)dl \right| \leq \int_L |f(x, y)|dl$.

5) Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования.

3⁰. Вычисление криволинейного интеграла первого рода. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями (1), где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t), \psi'(t)$, не обращающиеся в нуль одновременно, а $f(x, y)$ – функция, непрерывная на всей этой кривой, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (4)$$

Если гладкая кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x), c \leq x \leq d$, то формула (4) принимает вид

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx. \quad (7)$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (x + y) dl$, где L –

четверть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Решение. Окружность определяется параметрическими уравнениями $x = R \cos t$, $y = R \sin t$. Так как кривая L расположена в первом квадранте, то $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. По формуле (4) получаем

$$\begin{aligned} \int_L (x + y) dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R \cos t + R \sin t) \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \\ &= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t) dt = 2R^2. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где L – отрезок, соединяющий начало координат и точку $(4; 3)$.

Решение. Отрезок L определяется соотношениями $y = \frac{3}{4}x$, $0 \leq x \leq 4$. Тогда $y' = \frac{3}{4}$. Подставляя полученные выражения в формулу (7), получаем

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl = \int_0^4 \sqrt{x^2 + \frac{9}{16}x^2} \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dx = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \int_0^4 x dx = \frac{25}{2}. \quad \square$$

§ 2. Криволинейный интеграл второго рода

1⁰. Определение криволинейного интеграла второго рода.

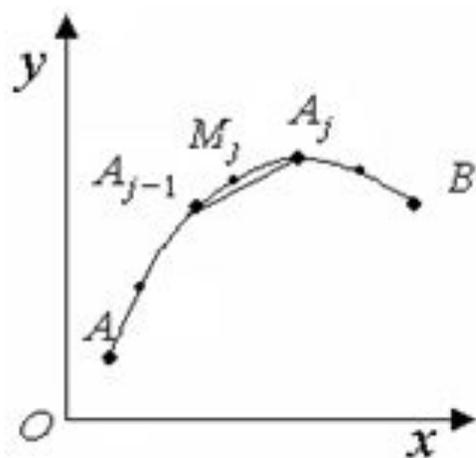


Рис. 1

Пусть в пространстве \mathbb{R}^2 задана гладкая незамкнутая кривая $L = AB$ с началом в точке A и концом в точке B . Кривую с заданным порядком ее концов называют *ориентированной*. И пусть в каждой точке заданной кривой определены непрерывные функции $P(x, y), Q(x, y)$.

Точками $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ разобьем кривую AB на n частичных дуг $\widehat{A_{j-1}A_j}$ (рис.1).

Обозначим через $(\xi_j; \eta_j), j = \overline{0, n}$, координаты точек A_j , через Δ_j — длину дуги $\widehat{A_{j-1}A_j}$, и пусть $\Delta x_j = \xi_j - \xi_{j-1}, \Delta y_j = \eta_j - \eta_{j-1}$. Выберем на каждой из дуг точку $M_j = M_j(x_j; y_j)$ и вычислим значения $P(x_j, y_j), Q(x_j, y_j)$. Составим интегральные суммы

$$S_1 = \sum_{j=1}^n P(x_j, y_j) \Delta x_j, \quad (1)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^n Q(x_j, y_j) \Delta y_j. \quad (2)$$

Если предел суммы S_1 (S_2) при $\Delta l(n) = \max_{1 \leq j \leq n} \Delta l_j \rightarrow 0$ существует и не

зависит от способа разбиения кривой, то этот предел называется *криволинейным интегралом второго рода по координате x* (по координате y) и обозначается

$$\int_{AB} P(x, y) dx \quad \left(\int_{AB} Q(x, y) dy \right). \quad (3)$$

Сумму $\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy$ называют *общим криволинейным интегралом второго рода* и обозначают через

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (4)$$

Пример 1. Вычислить $\int_L xdy$, где $L = AB$ – правая половина

эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемая от точки $A(0, -b)$ к $B(0, b)$.

Решение. Параметрические уравнения эллипса есть $x = a \cos t$,
 $y = b \sin t$. Применяя формулу (6), получаем

$$\int_{AB} xdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot b \cos t dt = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = ab \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{1}{2}t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{2}. \quad \square$$

Заметим, что в отличие от криволинейного интеграла первого рода, **криволинейный интеграл второго рода зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) «пробегается» кривая AB , и меняет знак при изменении направления обхода кривой:**

$$\int_{AB} P(x, y) dx = - \int_{BA} P(x, y) dx, \quad \int_{AB} Q(x, y) dy = - \int_{BA} Q(x, y) dy.$$

Действительно, при изменении направления обхода кривой, знаки выражений $\Delta x_j = \xi_j - \xi_{j-1}$ и $\Delta y_j = \eta_j - \eta_{j-1}$ в суммах (1), (2) и, следовательно, знаки самих сумм и их пределов изменятся на противоположные. Таким образом, при вычислении криволинейных интегралов второго рода следует учитывать направление интегрирования.

Криволинейный интеграл второго рода рассматривают и по замкнутой кривой $L = AB$, т.е. когда точка A совпадает с точкой B .

В этом случае за *положительное* принимают то направление обхода, при котором **область, лежащая внутри этого контура, остается слева** по отношению к точке, совершающей обход. Противоположное направление называют отрицательным. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L , пробегаемому в положительном направлении, часто обозначают символом

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$$

§4. Приложения криволинейных интегралов первого и второго рода.

1⁰. Вычисление длины дуги кривой. Длина плоской или пространственной линии AB вычисляется по формуле

$$\int_{AB} dl = l. \quad (1)$$

2⁰. Вычисление площади цилиндрической поверхности. Пусть в плоскости Oxy задана гладкая кривая AB и на этой кривой определена функция $f(N) = f(x, y) \geq 0$. Тогда площадь части цилиндрической поверхности $AA'B'B$, составленной из перпендикуляров к плоскости Oxy , восстановленных в точках $N(x, y)$ кривой AB и имеющих переменную длину $f(N)$, равна |

$$S = \int_{AB} f(x, y) dl. \quad (2)$$

В формуле (2) заключается *геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода.*

3⁰. Вычисление массы кривой. Пусть вдоль некоторой кривой AB распределена масса с плотностью $\gamma(x,y)$, где (x,y) – произвольная точка кривой AB .

Значение массы m кривой AB :

$$m = \int_{AB} \gamma(x,y) dl. \quad (3)$$

В формуле (3) заключается *физический смысл криволинейного интеграла первого рода*.

4⁰. Вычисление координат центра тяжести материальной кривой. Пусть AB – материальная кривая и $\gamma(x,y)$ – ее плотность в точке $N(x,y)$. Тогда координаты центра тяжести кривой AB вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\int_{AB} x\gamma(x,y) dl}{m}, \quad y_c = \frac{\int_{AB} y\gamma(x,y) dl}{m}. \quad (4)$$

Координаты центра тяжести пространственной кривой вычисляются аналогично.

Пример 4. Найти координаты центра тяжести полуокружности $x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$, если ее плотность есть $\gamma(x, y) = y$.

Решение. В силу симметрии кривой, имеем $x_c = 0$.

Используя параметрические уравнения окружности $x = R \cos t, y = R \sin t$, имеем

$$m = \int_{AB} y dl = \int_0^{\pi} R \sin t \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = R^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = 2R^2.$$

$$\begin{aligned} \int_{AB} y^2 dl &= \int_0^{\pi} R^2 \sin^2 t \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = R^3 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \\ &= R^3 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = R^3 \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} R^3 \pi. \end{aligned}$$

Окончательно получаем $x_c = 0$, $y_c = \frac{\int_{AB} y^2 dl}{m} = \frac{1}{4} R \pi$. \square

5⁰. Вычисление моментов инерции материальной кривой. Для плоской кривой моменты инерции относительно осей Ox и Oy выразятся формулами

$$I_x = \int_{AB} y^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_y = \int_{AB} x^2 \gamma(x, y) dl$$

соответственно, а момент инерции относительно начала координат

$$I_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl .$$

Для пространственной кривой моменты инерции относительно осей координат вычисляются по формулам

$$I_x = \int_{AB} (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dl, \quad I_y = \int_{AB} (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dl, \tag{5}$$

$$I_z = \int_{AB} (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dl,$$

а относительно начала координат – по формуле:

$$I_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dl .$$

Пример 5. Вычислить момент инерции относительно аппликаты одного витка однородной винтовой линии $x = \rho \cos \omega t$, $y = \rho \sin \omega t$, $z = vt$, $0 \leq t \leq 2\pi$, при условии, что $\gamma(x, y, z) = \gamma$.

Решение. По третьей из формул (5) имеем:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{AB} (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dl = \int_0^{2\pi} \rho^2 \gamma \sqrt{\rho^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + \rho^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + v^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \rho^2 \gamma \sqrt{\rho^2 \omega^2 + v^2} dt = 2\pi \rho^2 \gamma \sqrt{\rho^2 \omega^2 + v^2}. \quad \square \end{aligned}$$

6⁰. Вычисление работы силы. Пусть под действием переменной силы $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ (\vec{i}, \vec{j} – координатные вектора) материальная точка перемещается вдоль кривой BC в направлении от точки B к точке C . Работа A по такому перемещению:

$$A = \int_{BC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy . \quad (7)$$

В формуле (7) заключается *физический смысл криволинейного интеграла второго рода.*

Вычисление работы переменной силы

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

по перемещению точки вдоль пространственной кривой BC сводится к вычислению криволинейного интеграла второго рода

$$A = \int_{BC} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz .$$

Пример 6. Вычислить работу силы $\vec{F} = (2xy, x) = 2xy\vec{i} + x\vec{j}$ по перемещению точки вдоль отрезка, соединяющего начало координат с точкой $(1, 1)$.

Решение. Данный отрезок определяется соотношениями $y = x$, $0 \leq x \leq 1$. По формуле (7) имеем

$$A = \int_L 2xy dx + xdy = \int_0^1 (2x^2 + x) dx = 1\frac{1}{6}. \quad \square$$

§5. Формула Грина

Теорема 1. Пусть в плоскости Oxy задана замкнутая, правильная в направлениях осей Ox и Oy область G , ограниченная гладкой или кусочно-гладкой кривой L . Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ в области G непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Тогда справедлива формула Грина

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy. \quad (1)$$

§6. Поверхностный интеграл первого рода

1⁰. Определение и свойства поверхностного интеграла первого рода. Пусть на гладкой поверхности σ задана функция $u = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность σ сетью линий на элементарные поверхности $\sigma_k, k = 1, 2, \dots, n$, площади которых обозначим через $\Delta\sigma_k$. Наибольший из диаметров поверхностей σ_k обозначим через λ_n . На каждой из элементарных поверхностей σ_k выберем произвольно точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$. Предел интегральной суммы при $\lambda_n \rightarrow 0$, если он существует, называется *поверхностным интегралом первого рода*, т.е.

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k = \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma. \quad (1)$$

Предел существует, если $f(x, y, z)$ непрерывна, а поверхность σ замкнута и квадрируема. Поверхностный интеграл первого рода обладает свойствами, аналогичными свойствам двойного интеграла. Эти свойства вытекают из определения интеграла.

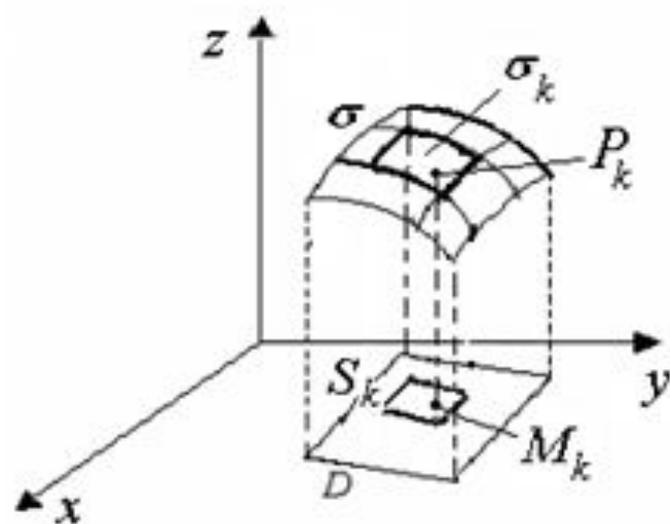


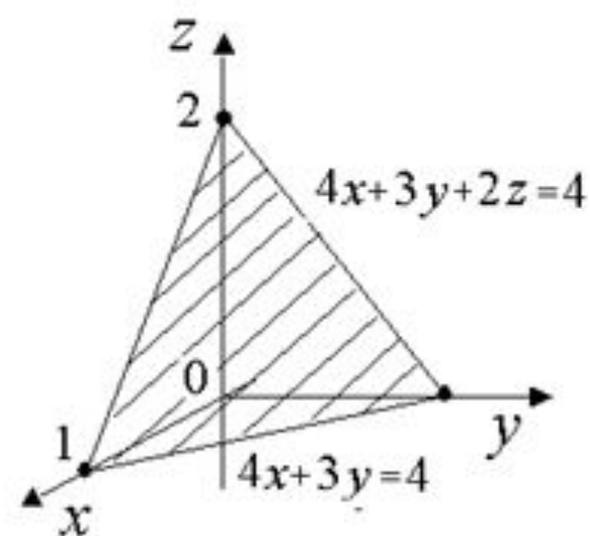
Рис. 1

2⁰. | **Вычисление поверхностного интеграла первого рода.** Пусть σ – гладкая поверхность, уравнение которой $z = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области D , где D – проекция σ на плоскость Oxy (рис.1).

Поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ :

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (2)$$

Пример 1. Вычислить $I = \iint_{\sigma} \left(x^2 + \frac{7}{2}y + z \right) d\sigma$, где σ – часть плоскости $4x + 3y + 2z - 4 = 0$, расположенная в первом октанте.



Решение. Запишем уравнение

плоскости в виде $z = 2 - 2x - \frac{3}{2}y$. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{2}. \quad \text{По формуле (2)}$$

получаем

$$I = \iint_D \left(x^2 + \frac{7}{2}y + 2 - 2x - \frac{3}{2}y \right) \sqrt{1 + 4 + \frac{9}{4}} dx dy,$$

где D – треугольник в плоскости Oxy , ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$,

$4x + 3y = 4$. Переходя от двойного интеграла к повторному, имеем

$$I = \frac{\sqrt{29}}{2} \int_0^1 dx \int_0^{\frac{4}{3}(1-x)} (x^2 - 2x + 2y + 2) dy = \frac{43\sqrt{29}}{54}.$$

$$x = x(u, v), y = y(u, v), (u, v) \in D', \quad (3)$$

где $x(u, v), y(u, v)$ непрерывны в области D' вместе со своими частными производными. определяют взаимно однозначное соответствие между множествами D и D' .

Тогда $z = \varphi(x(u, v), y(u, v)) = z(u, v)$ и

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy &= \\ = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \end{aligned}$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

§ 7. Односторонние и двусторонние поверхности. Ориентация поверхности

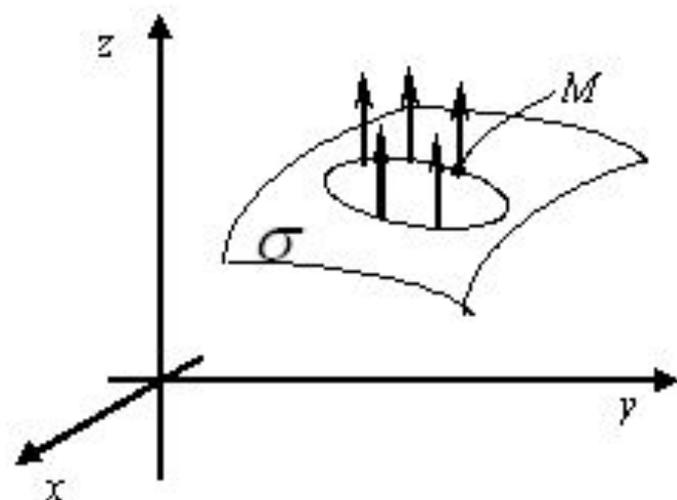
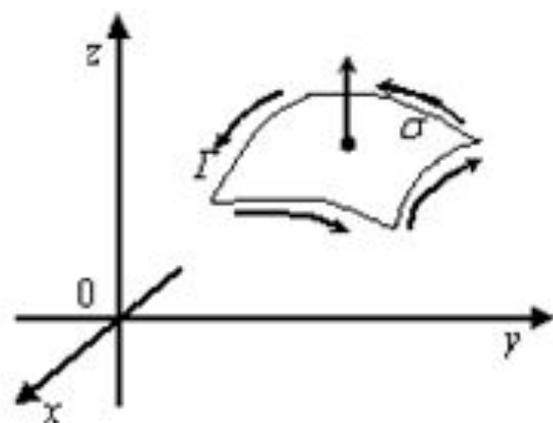
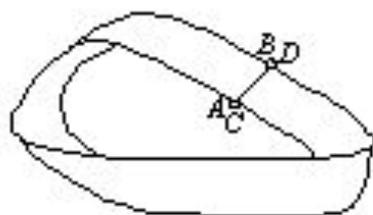
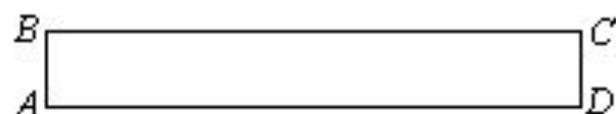


Рис. 1

Для определения понятия стороны поверхности σ возьмем произвольную точку $M \in \sigma$ и зафиксируем в ней направление вектора нормали \vec{n} к данной поверхности. Через точку M проведем замкнутый контур, не имеющий общих точек с границей поверхности. Будем перемещать точку M непрерывно по этому контуру так,

чтобы вектор \vec{n} оставался нормальным к σ (рис. 1).

В исходное положение точка M вернется либо с тем же направлением нормали, либо с противоположным. Если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности σ и не пересекающему ее границы, при возвращении в исходную точку не меняет направления нормали к поверхности, то поверхность называется *двусторонней* (в противном случае – *односторонней*).



Примерами двусторонних поверхностей служат плоскость, сфера, эллипсоид, однополостный гиперболоид и др. Примером односторонней поверхности является лист Мёбиуса. При обходе листа Мёбиуса по его средней линии направление нормали к нему меняется на противоположное.

Для двусторонней поверхности совокупность всех точек с выбранными в них направлениями нормали называется *стороной поверхности*, а выбор определенной ее стороны – *ориентацией поверхности*.

Двустороннюю поверхность называют также

ориентируемой, а одностороннюю – *неориентируемой*.

Если поверхность σ имеет границу Γ , то определение стороны поверхности приводит к определению направления обхода по Γ . Пусть σ – ориентированная (с выбранной стороной) поверхность, ограниченная контуром Γ , не имеющим точек самопересечения. Будем считать *положительным* то направление обхода контура Γ , при котором поверхность остается **слева** по отношению к точке, совершающей обход (рис.3). Противоположное направление будем считать *отрицательным*.

§ 8. Поверхностный интеграл второго рода

1⁰. Определение и свойства поверхностного интеграла второго рода. Пусть в пространственной декартовой системе координат задана гладкая ориентированная поверхность σ и на ней функция $R = R(x, y, z)$. Зафиксируем направление вектора нормали в точках поверхности. Если вектор нормали составляет острый угол с осью Oz , то говорят, что выбрана верхняя сторона поверхности σ , если тупой – то нижняя сторона поверхности.

Разобьем поверхность σ кусочно-гладкими кривыми на части σ_i , не имеющие общих внутренних точек. Обозначим через S_i проекцию части σ_i на плоскость Oxy . Выберем на каждой части S_i точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_i R(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i, \quad (1)$$

где ΔS_i – площадь части S_i , взятая со знаком плюс, если выбрана верхняя сторона поверхности σ , и со знаком минус, если выбрана нижняя сторона поверхности σ .

Если существует конечный предел (1), то этот предел называется *поверхностным интегралом второго рода от функции $R(x, y, z)$ по выбранной стороне поверхности σ* и обозначается

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_i R(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i = \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy.$$

Отметим, что **поверхностный интеграл второго рода зависит от выбора стороны поверхности.** При изменении ориентации вектора нормали на противоположное **поверхностный интеграл второго рода меняет знак на противоположный.** Поверхностный интеграл второго рода также обладает свойствами, аналогичными свойствам **поверхностного интеграла первого рода.**

Аналогично определяется **поверхностный интеграл второго рода по переменным y, z [z, x].**

Сумму

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy + P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx$$

называют *поверхностным интегралом второго рода общего вида.*

2⁰. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.

Пусть функция $R(x, y, z)$ непрерывна во всех точках гладкой поверхности σ , заданной уравнением $z = z(x, y)$, и область D – проекция поверхности σ на плоскость Oxy . Имеют место равенства

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (3)$$

Если выбрать нижнюю сторону данной поверхности σ , то перед интегралом в правой части (3) следует поставить знак минус.

Аналогично устанавливается справедливость формул

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz = \iint_{D_1} P(x(y, z), y, z) dy dz, \quad (4)$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dz dx = \iint_{D_2} Q(x, y(x, z), z) dz dx, \quad (5)$$

где D_1 и D_2 – проекции поверхности σ на плоскости Oyz и Oxz , соответственно.

Для вычисления поверхностного интеграла общего вида используются те же формулы (3)–(5), если поверхность σ однозначно проецируется на все три координатные плоскости. В более сложных случаях поверхность интегрирования разбивается на части, обладающие указанными свойствами, а интеграл – на сумму интегралов по этим частям.

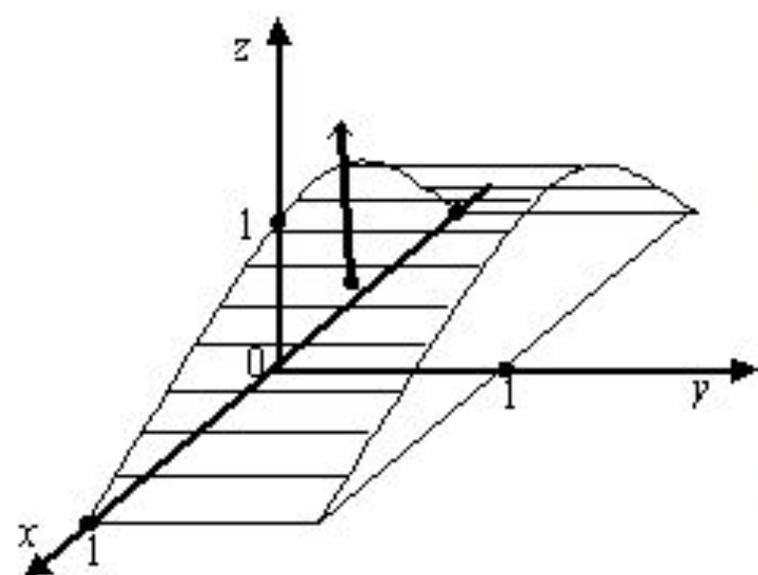


Рис. 1

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\iint_{\sigma} (4xy + 3z^2) dx dy, \text{ где } \sigma - \text{верхняя}$$

сторона поверхности $z = \sqrt{1-x^2}$,
 заключенной между плоскостями
 $y=0, y=1$ (рис. 1).

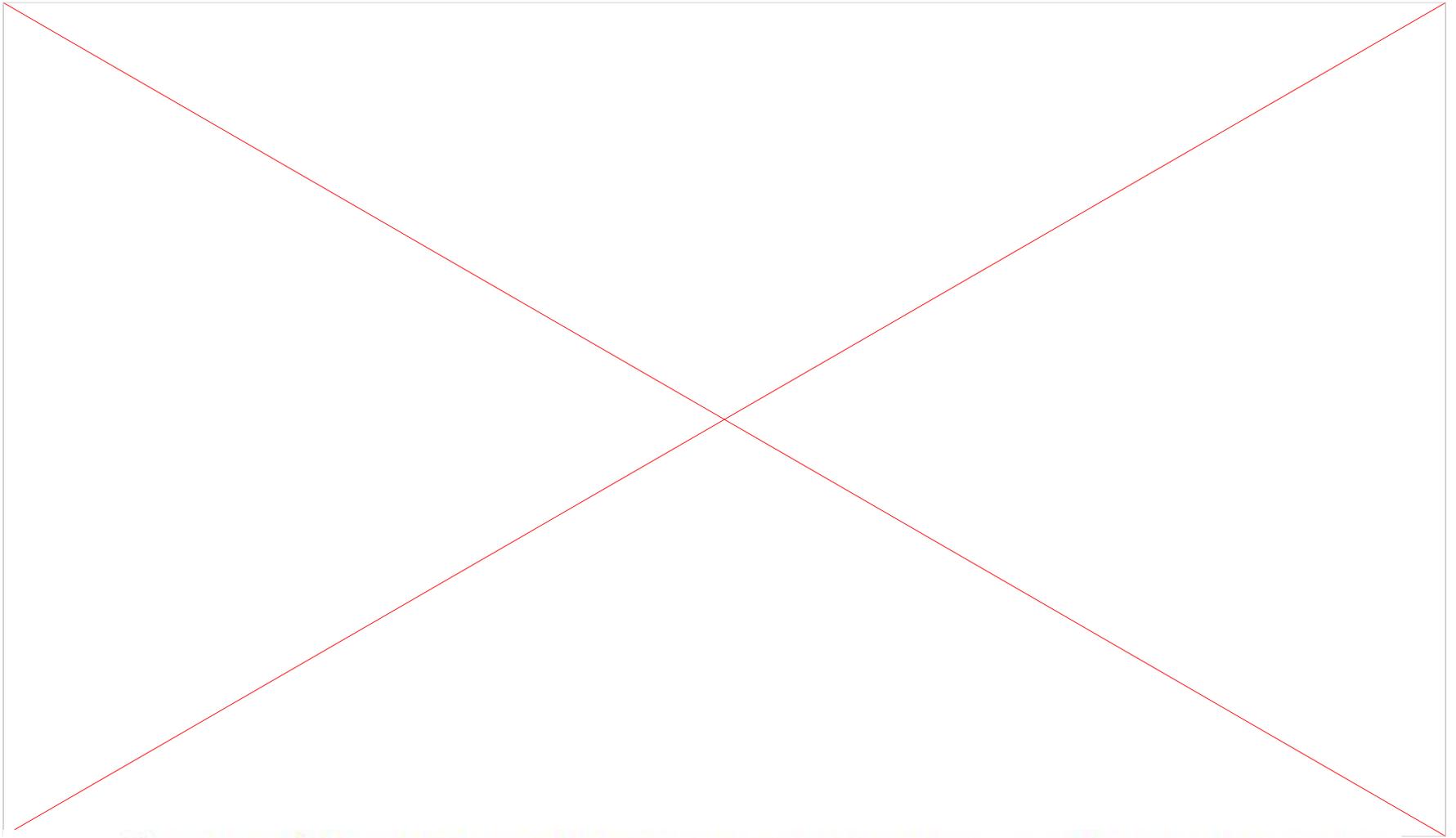
Решение. Проекцией D данной
 поверхности на плоскость Oxy
 является прямоугольник

$$\{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

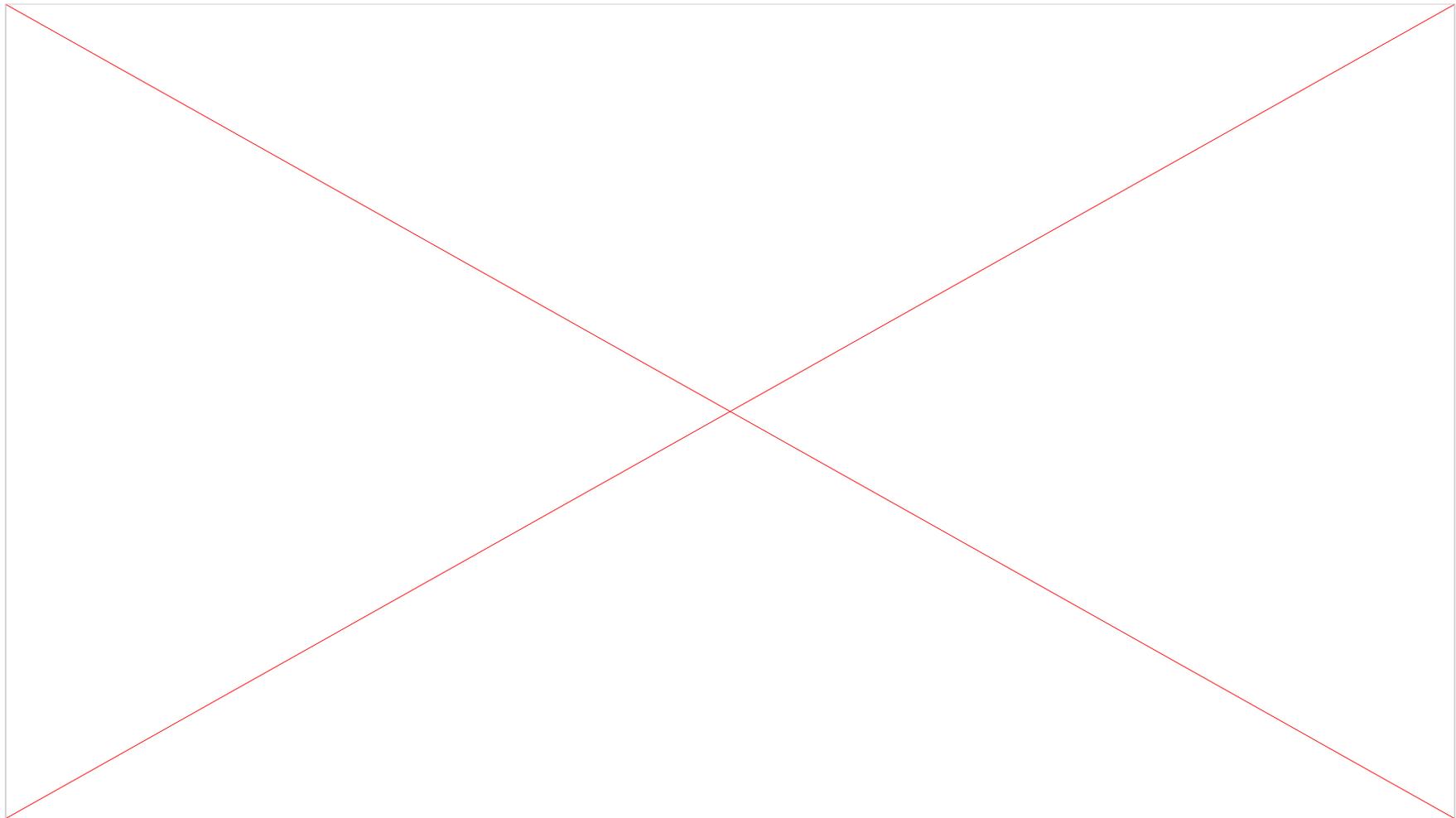
По

формуле (3) находим

$$\iint_{\sigma} (4xy + 3z^2) dx dy = \iint_D \left(4xy + 3(\sqrt{1-x^2})^2 \right) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (4xy + 3 - 3x^2) dy = 4$$



Если выбрать другую сторону поверхности, то направляющие косинусы нормали $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ изменят знак, и, следовательно, поверхностный интеграл второго рода изменит знак.



$$= \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \left(\frac{1}{3} \rho^3 - \frac{1}{5} \rho^5 \right) \Big|_0^R = 0. \square$$

Если гладкая поверхность σ задана своим векторным представлением $\vec{r}(M) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D'$, где $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ дифференцируемы в области D' , то верхнюю сторону поверхности обычно ориентируют с помощью вектора $\vec{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}$. Тогда косинусы углов вектора \vec{n} с осями Ox, Oy, Oz выражаются равенствами

$$\cos \alpha = \frac{1}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \cos \beta = \frac{1}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Тогда выражение поверхностного интеграла через двойной

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_{D'} (P_1(u, v) + Q_1(u, v) + R_1(u, v)) du dv \end{aligned}$$