Глава 3

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Криволинейный интеграл первого рода

1^0. Определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$, где определена прямоугольная система координат Oxy, задана спрямляемая кривая $AB = L$, не имеюшая точек самопересечения и участков самоналегания. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ a \le t \le b, \tag{1}$$

и пусть на кривой AB определена непрерывная функция $f(x,y)$.

Разобьем отрезок $a \le t \le b$ на n частей точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$. В силу задания (1), кривая AB будет разбита на n частей точками $M_k(x_k; y_k), k = \overline{0,n}$ (рис. 1), где $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$. На каждой дуге $M_{k-1}M_k$ выберем произвольную точку N_k и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k\ , \tag{2}$$

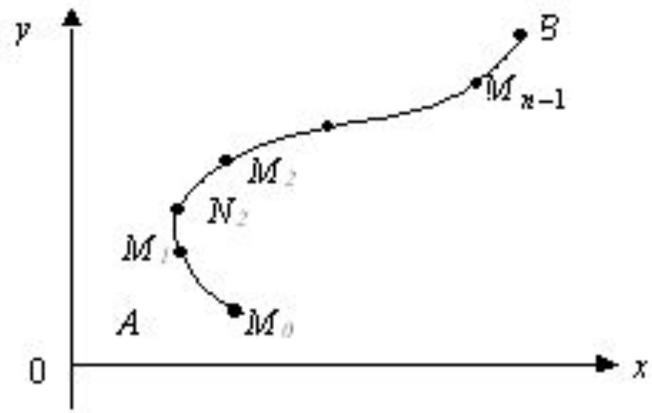


Рис. 1

где через Δl_k обозначена длина дуги $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$. Если предел интегральной суммы (2) при стремлении к нулю $\Delta l(n) = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta l_k$ существует и не зависит от способа разбиения отрезка $a \le t \le b$ на части, то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x,y)$ по кривой AB* и обозначается

$$\lim_{\Delta l(n)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k = \int_{AB} f(N)\,dl = \int_{L} f(x,y)\,dl \tag{3}$$

2^0. Свойства криволинейного интеграла первого рода. Считаем, что входящие в формулы интегралы существуют.

1) $\int\limits_L Cf(x,y)\,dl = C\int\limits_L f(x,y)\,dl$, где $C = \mathrm{const}$.

2) $\int\limits_L \left(f_1(x,y) + f_2(x,y)\right)dl = \int\limits_L f_1(x,y)\,dl + \int\limits_L f_2(x,y)\,dl$.

3) Если кривая L разбита на конечное число частей L_k, то

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)\,dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)\,dl + \ldots + \int\limits_{L_k} f(x,y)\,dl.$$

4) $\left|\int\limits_L f(x,y)\,dl\right| \le \int\limits_L \left|f(x,y)\right| dl$.

5) Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования.

3^0. Вычисление криволинейного интеграла первого рода. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями (1), где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t), \psi'(t)$, не обращающиеся в нуль одновременно, а $f(x,y)$ – функция, непрерывная на всей этой кривой, то

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt. \qquad (4)$$

Если гладкая кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x), c \le x \le d$, то формула (4) принимает вид

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_c^d f(x,\varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx. \qquad (7)$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x+y)\,dl$, где L – четверть окружности $x^2+y^2=R^2, x \ge 0, y \ge 0$.

Решение. Окружность определяется параметрическими уравнениями $x = R\cos t$, $y = R\sin t$. Так как кривая L расположена в первом квадранте, то $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. По формуле (4) получаем

$$\int\limits_L (x+y)\,dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (R\cos t + R\sin t)\sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t)\,dt = 2R^2. \ \square$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – отрезок, соединяющий начало координат и точку (4; 3).

Решение. Отрезок L определяется соотношениями $y=\frac{3}{4}x$, $0 \le x \le 4$. Тогда $y'=\frac{3}{4}$. Подставляя полученные выражения в формулу (7), получаем

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int\limits_0^4 \sqrt{x^2+\frac{9}{16}x^2}\,\sqrt{1+\frac{9}{16}}\,dx = \frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\int\limits_0^4 x\,dx = \frac{25}{2}. \ \square$$

§ 2. Криволинейный интеграл второго рода

1^0. Определение криволинейного интеграла второго рода. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^2$ задана гладкая незамкнутая кривая $L = AB$ с началом в точке A и концом в точке B. Кривую с заданным порядком ее концов называют *ориентированной*. И пусть в каждой точке заданной кривой определены непрерывные функции $P(x,y), Q(x,y)$.

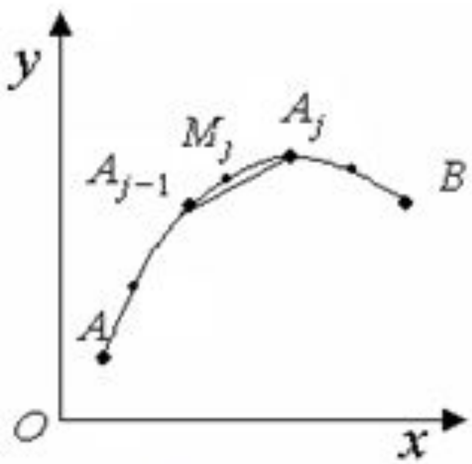


Рис. 1

Точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ разобьем кривую AB на n частичных дуг $\overset{\frown}{A_{j-1}A_j}$ (рис.1). Обозначим через $(\xi_j; \eta_j), j = \overline{0,n}$, координаты точек A_j, через Δl_j – длину дуги $\overset{\frown}{A_{j-1}A_j}$, и пусть $\Delta x_j = \xi_j - \xi_{j-1}$, $\Delta y_j = \eta_j - \eta_{j-1}$. Выберем на каждой из дуг точку $M_j = M_j(x_j; y_j)$ и вычислим значения $P(x_j, y_j), Q(x_j, y_j)$. Составим интегральные суммы

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} P(x_j, y_j)\Delta x_j, \quad (1)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{n} Q(x_j, y_j)\Delta y_j. \quad (2)$$

Если предел суммы S_1 (S_2) при $\Delta l(n) = \max\limits_{1\le j\le n} \Delta l_j \to 0$ существует и не зависит от способа разбиения кривой, то этот предел называется *криволинейным интегралом второго рода по координате* x (по координате y) и обозначается

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx \quad \left(\int\limits_{AB} Q(x,y)dy\right). \quad (3)$$

Сумму $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$ называют *общим криволинейным интегралом второго рода* и обозначают через

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \quad (4)$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_L xdy$, где $L = AB$ – правая половина эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемая от точки $A(0;-b)$ к $B(0;b)$.

Решение. Параметрические уравнения эллипса есть $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Применяя формулу (6), получаем

$$\int\limits_{AB} xdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot b\cos t dt = ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = ab\left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{1}{2}t\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{2}. \ \square$$

Заметим, что в отличие от криволинейного интеграла первого рода, **криволинейный интеграл второго рода зависит от того, в каком направлении** (от A к B или от B к A) «пробегается» кривая AB, и меняет знак при изменении направления обхода кривой:

$$\int_{AB} P(x,y)dx = -\int_{BA} P(x,y)dx, \quad \int_{AB} Q(x,y)dy = -\int_{BA} Q(x,y)dy.$$

Действительно, при изменении направления обхода кривой, знаки выражений $\Delta x_j = \xi_j - \xi_{j-1}$ и $\Delta y_j = \eta_j - \eta_{j-1}$ в суммах (1), (2) и, следовательно, знаки самих сумм и их пределов изменятся на противоположные. **Таким образом, при вычислении криволинейных интегралов второго рода следует учитывать направление интегрирования.**

Криволинейный интеграл второго рода рассматривают и **по замкнутой кривой** $L = AB$, т.е. когда точка A совпадает с точкой B.

В этом случае за *положительное* принимают то направление обхода, при котором **область, лежащая внутри этого контура, остается слева** по отношению к точке, совершающей обход. Противоположное направление называют отрицательным. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L, пробегаемому в положительном направлении, часто обозначают символом

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

§4. Приложения криволинейных интегралов первого и второго рода.

1^0. Вычисление длины дуги кривой. Длина плоской или пространственной линии AB вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} dl = l \,. \qquad (1)$$

2^0. Вычисление площади цилиндрической поверхности. Пусть в плоскости Oxy задана гладкая кривая AB и на этой кривой определена функция $f(N) = f(x,y) \geq 0$. Тогда площадь части цилиндрической поверхности $AA'B'B$, составленной из перпендикуляров к плоскости Oxy, восстановленных в точках $N(x,y)$ кривой AB и имеющих переменную длину $f(N)$, равна

$$S = \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl \,. \qquad (2)$$

В формуле (2) заключается *геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода*.

3^0. Вычисление массы кривой. Пусть вдоль некоторой кривой AB распределена масса с плотностью $\gamma(x,y)$, где (x,y) − произвольная точка кривой AB.

Значение массы m кривой AB:

$$m = \int\limits_{AB} \gamma(x,y)\,dl. \tag{3}$$

В формуле (3) заключается *физический смысл криволинейного интеграла первого рода*.

4^0. Вычисление координат центра тяжести материальной кривой. Пусть AB – материальная кривая и $\gamma(x,y)$ – ее плотность в точке $N(x,y)$. Тогда координаты центра тяжести кривой AB вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\int\limits_{AB} x\gamma(x,y)\,dl}{m}, \quad y_c = \frac{\int\limits_{AB} y\gamma(x,y)\,dl}{m}. \tag{4}$$

Координаты центра тяжести пространственной кривой вычисляются аналогично.

Пример 4. Найти координаты центра тяжести полуокружности $x^2+y^2=R^2, y\ge 0$, если ее плотность есть $\gamma(x,y)=y$.

Решение. В силу симметрии кривой, имеем $x_c=0$.

Используя параметрические уравнения окружности $x=R\cos t, y=R\sin t$, имеем

$$m=\int\limits_{AB} y\,dl=\int\limits_0^{\pi} R\sin t\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=R^2\int\limits_0^{\pi}\sin t\,dt=2R^2.$$

$$\int\limits_{AB} y^2\,dl=\int\limits_0^{\pi} R^2\sin^2 t\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=R^3\int\limits_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=$$

$$=R^3\int\limits_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=R^3\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}R^3\pi.$$

Окончательно получаем $x_c=0$, $y_c=\dfrac{\int\limits_{AB} y^2\,dl}{m}=\dfrac{1}{4}R\pi$. □

5^0. Вычисление моментов инерции материальной кривой. Для плоской кривой моменты инерции относительно осей Ox и Oy выразятся формулами

$$I_x = \int_{AB} y^2 \gamma(x,y)\,dl, \quad I_y = \int_{AB} x^2 \gamma(x,y)\,dl$$

соответственно, а момент инерции относительно начала координат $I_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2)\gamma(x,y)\,dl$.

Для пространственной кривой моменты инерции относительно осей координат вычисляются по формулам

$$I_x = \int_{AB} (y^2 + z^2)\gamma(x,y,z)\,dl, \quad I_y = \int_{AB} (x^2 + z^2)\gamma(x,y,z)\,dl,$$
$$I_z = \int_{AB} (x^2 + y^2)\gamma(x,y,z)\,dl, \qquad (5)$$

а относительно начала координат – по формуле:

$$I_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x,y,z)\,dl.$$

Пример 5. Вычислить момент инерции относительно аппликаты одного витка однородной винтовой линии $x = \rho\cos wt$, $y = \rho\sin wt$, $z = vt$, $0 \le t \le 2\pi$, при условии, что $\gamma(x,y,z) = \gamma$.

Решение. По третьей из формул (5) имеем:

$$I_z = \int\limits_{AB}\left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y,z)dl = = \int\limits_0^{2\pi}\rho^2\gamma\sqrt{\rho^2 w^2\sin^2 wt + \rho^2 w^2\cos^2 wt + v^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\rho^2\gamma\sqrt{\rho^2 w^2 + v^2}\,dt = 2\pi\rho^2\gamma\sqrt{\rho^2 w^2 + v^2}\,. \ \square$$

6^0. Вычисление работы силы. Пусть под действием переменной силы $\bar{F}=\bar{F}(x,y)=P(x,y)\bar{i}+Q(x,y)\bar{j}$ ($\bar{i},\bar{j}$ −координатные вектора) материальная точка перемещается вдоль кривой BC в направлении от точки B к точке C. Работа A по такому перемещению:

$$A=\int\limits_{BC} P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,. \qquad (7)$$

В формуле (7) заключается *физический смысл криволинейного интеграла второго рода*.

Вычисление работы переменной силы

$$\bar{F}=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$$

по перемещению точки вдоль пространственной кривой BC сводится к вычислению криволинейного интеграла второго рода

$$A=\int\limits_{BC} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\,.$$

Пример 6. Вычислить работу силы $\bar{F} = (2xy; x) = 2xy\bar{i} + x\bar{j}$ по перемешению точки вдоль отрезка, соединяющего начало координат с точкой $(1;1)$.

Решение. Данный отрезок определяется соотношениями $y = x$, $0 \le x \le 1$. По формуле (7) имеем

$$A = \int_L 2xydx + xdy = \int_0^1 \left(2x^2 + x\right)dx = 1\frac{1}{6}. \ \square$$

§5. Формула Грина

Теорема 1. *Пусть в плоскости Oxy задана замкнутая, правильная в направлениях осей Ox и Oy область G, ограниченная гладкой или кусочно-гладкой кривой* L. *Пусть функции* $P(x,y)$, $Q(x,y)$ *в области G непрерывны вместе со своими частными производными* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial Q}{\partial x}$. *Тогда справедлива формула Грина*

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy\,. \tag{1}$$

.

§6. Поверхностный интеграл первого рода

1^0. Определение и свойства поверхностного интеграла первого рода. Пусть на гладкой поверхности σ задана функция $u = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность σ сетью линий на элементарные поверхности $\sigma_k, k = 1, 2, \ldots, n$, площади которых обозначим через $\Delta\sigma_k$. Наибольший из диаметров поверхностей σ_k обозначим через λ_n. На каждой из элементарных поверхностей σ_k выберем произвольно точку $M_k(x_k; y_k; z_k)$. Предел интегральной суммы при $\lambda_n \to 0$, если он существует, называется *поверхностным интегралом первого рода*, т.е.

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta\sigma_k = \iint_{\sigma} f(x, y, z)\,d\sigma\,. \tag{1}$$

Предел существует, если $f(x, y, z)$ непрерывна, а поверхность σ замкнута и квадрируема. Поверхностный интеграл первого рода обладает свойствами, аналогичными свойствам двойного интеграла. Эти свойства вытекают из определения интеграла.

2^0. Вычисление поверхностного интеграла первого рода. Пусть σ – гладкая поверхность, уравнение которой $z=\varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области D, где D − проекция σ на плоскость Oxy (рис.1).

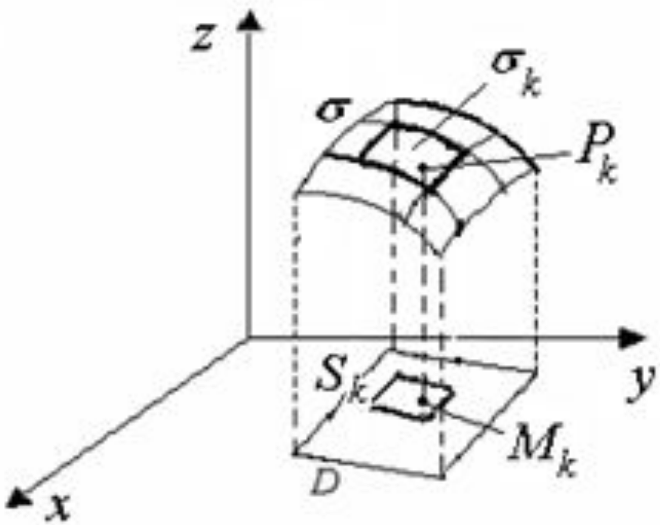
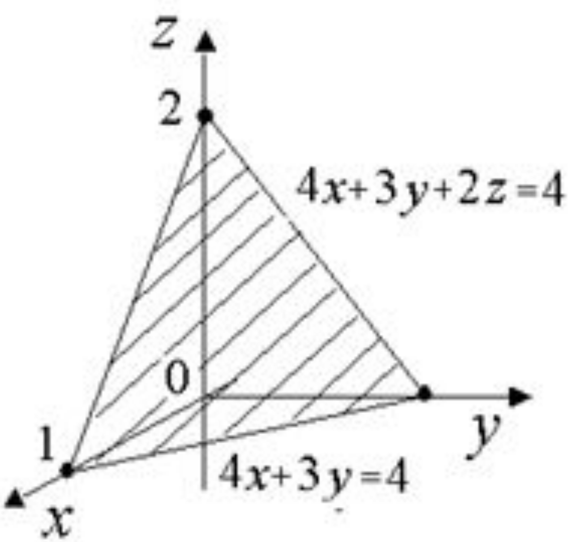


Рис. 1

Поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ :

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma=\iint\limits_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \qquad (2)$$

Пример 1. Вычислить $I = \iint\limits_{\sigma}\left(x^2 + \frac{7}{2}y + z\right)d\sigma$, где σ – часть плоскости $4x + 3y + 2z - 4 = 0$, расположенная в первом октанте.



Решение. Запишем уравнение плоскости в виде $z = 2 - 2x - \frac{3}{2}y$. Находим $\frac{\partial z}{\partial x} = -2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{2}$. По формуле (2) получаем

$$I = \iint\limits_{D}\left(x^2 + \frac{7}{2}y + 2 - 2x - \frac{3}{2}y\right)\sqrt{1 + 4 + \frac{9}{4}}\,dxdy,$$

где D – треугольник в плоскости Oxy, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $4x + 3y = 4$. Переходя от двойного интеграла к повторному, имеем

$$I = \frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1 dx \int_0^{\frac{4}{3}(1-x)} \left(x^2 - 2x + 2y + 2\right)dy = \frac{43\sqrt{29}}{54}.$$

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ (u;v) \in D', \tag{3}$$

где $x(u,v), y(u,v)$ непрерывны в области D' вместе со своими частными производными, определяют взаимно однозначное соответствие между множествами D и D'.

Тогда $z = \varphi\left(x(u,v), y(u,v)\right) = z(u,v)$ и

$$\iint_D f\left(x, y, \varphi(x,y)\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy =$$

$$= \iint_{D'} f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\sqrt{EG - F^2}\,dudv,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \qquad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

§ 7. Односторонние и двусторонние поверхности. Ориентация поверхности

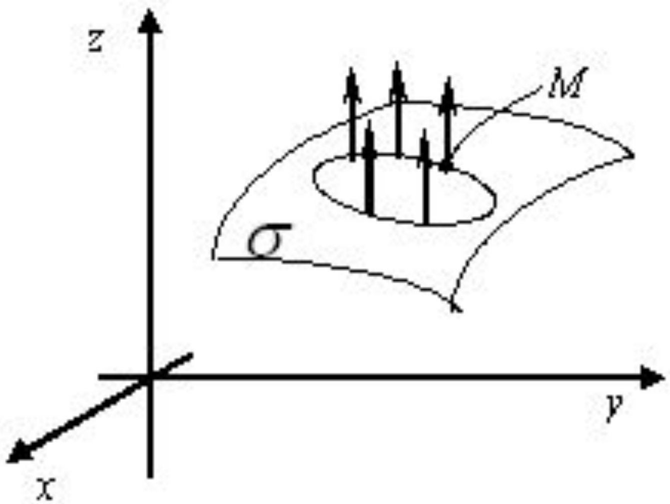
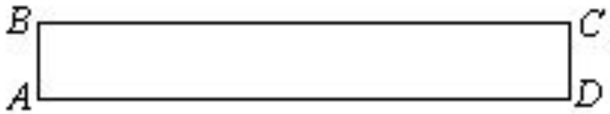
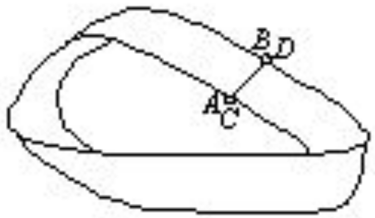


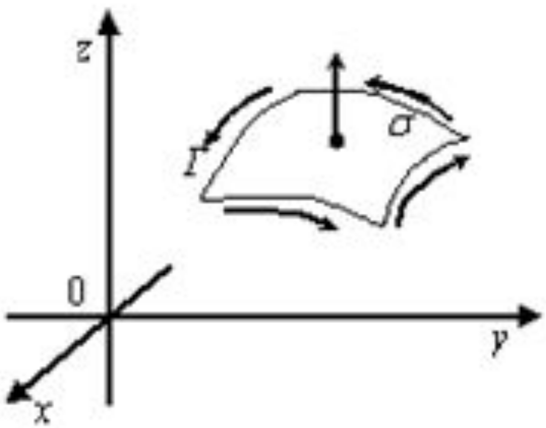
Рис. 1

Для определения понятия стороны поверхности σ возьмем произвольную точку $M \in \sigma$ и зафиксируем в ней направление вектора нормали $\bar{n}$ к данной поверхности. Через точку M проведем замкнутый контур, не имеющий общих точек с границей поверхности. Будем перемещать точку M непрерывно по этому контуру так, чтобы вектор $\bar{n}$ оставался нормальным к σ (рис. 1).

В исходное положение точка M вернется либо с тем же направлением нормали, либо с противоположным. Если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности σ и не пересекающему ее границы, при возвращении в исходную точку не меняет направления нормали к поверхности, то поверхность называется *двусторонней* (в противном случае – *односторонней*).







Примерами двусторонних поверхностей служат плоскость, сфера, эллипсоид, однополостный гиперболоид и др. Примером односторонней поверхности является лист Мёбиуса. При обходе листа Мёбиуса по его средней линии направление нормали к нему меняется на противоположное.

Для двусторонней поверхности совокупность всех точек с выбранными в них направлениями нормали называется *стороной поверхности*, а выбор определенной ее стороны – *ориентацией поверхности*. Двустороннюю поверхность называют также *ориентируемой,* а одностороннюю – *неориентируемой*.

Если поверхность σ имеет границу $Г$, то определение стороны поверхности приводит к определению направления обхода по $Г$. Пусть σ – ориентированная (с выбранной стороной) поверхность, ограниченная контуром $Г$, не имеющим точек самопересечения. Будем считать *положительным* то направление обхода контура $Г$, при котором поверхность остается **слева** по отношению к точке, совершающей обход (рис.3). Противоположное направление будем считать *отрицательным*.

§ 8. Поверхностный интеграл второго рода

1^0. Определение и свойства поверхностного интеграла второго рода. Пусть в пространственной декартовой системе координат задана гладкая ориентированная поверхность σ и на ней функция $R = R(x, y, z)$. Зафиксируем направление вектора нормали в точках поверхности. Если вектор нормали составляет острый угол с осью Oz, то говорят, что выбрана верхняя сторона поверхности σ, если тупой – то нижняя сторона поверхности.

Разобьем поверхность σ кусочно-гладкими кривыми на части σ_i, не имеющие общих внутренних точек. Обозначим через S_i проекцию части σ_i на плоскость Oxy. Выберем на каждой части S_i точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_i R(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i, \qquad (1)$$

где ΔS_i – площадь части S_i, взятая со знаком плюс, если выбрана верхняя сторона поверхности σ, и со знаком минус, если выбрана нижняя сторона поверхности σ.

Если существует конечный предел (1), то этот предел называется поверхностным интегралом *второго рода от функции* $R(x,y,z)$ *по выбранной стороне поверхности* σ и обозначается

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_i R(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i = \iint_\sigma R(x,y,z)\,dxdy\,.$$

Отметим, что поверхностный интеграл второго рода **зависит от выбора стороны поверхности**. При изменении ориентации вектора нормали на противоположное поверхностный интеграл второго рода меняет знак на противоположный. Поверхностный интеграл второго рода также обладает свойствами, аналогичными свойствам поверхностного интеграла первого рода.

Аналогично определяется поверхностный интеграл второго рода по переменным y,z $[z,x]$.

Сумму

$$\iint_\sigma R(x,y,z)\,dxdy + P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx$$

называют *поверхностным интегралом второго рода общего вида*.

2^0. Вычисление поверхностного интеграла второго рода. Пусть функция $R(x,y,z)$ непрерывна во всех точках гладкой поверхности σ, заданной уравнением $z=z(x,y)$, и область D – проекция поверхности σ на плоскость Oxy. Имеют место равенства

$$\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{D} R(x,y,z(x,y))\,dxdy. \qquad (3)$$

Если выбрать нижнюю сторону данной поверхности σ, то перед интегралом в правой части (3) следует поставить знак минус.

Аналогично устанавливается справедливость формул

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)\,dydz = \iint\limits_{D_1} P(x(y,z),y,z)\,dydz, \qquad (4)$$

$$\iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)\,dzdx = \iint\limits_{D_2} Q(x,y(x,z),z)\,dzdx, \qquad (5)$$

где D_1 и D_2 – проекции поверхности σ на плоскости Oyz и Oxz соответственно.

Для вычисления поверхностного интеграла общего вида используются те же формулы (3)–(5), если поверхность σ однозначно проектируется на все три координатные плоскости. В более сложных случаях поверхность интегрирования разбивается на части, обладающие указанными свойствами, а интеграл – на сумму интегралов по этим частям.

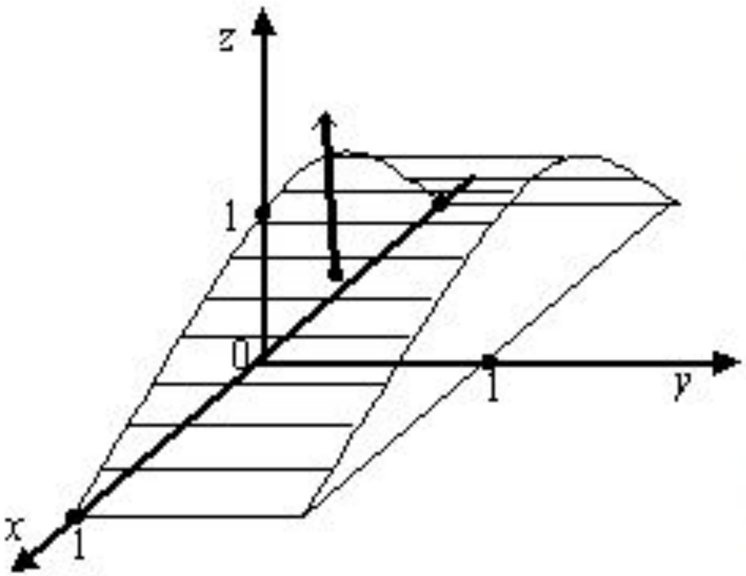


Рис. 1

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\sigma}\left(4xy+3z^2\right)dxdy$, где σ – верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{1-x^2}$, заключенной между плоскостями $y=0,\ y=1$ (рис. 1).

Решение. Проекцией D данной поверхности на плоскость Oxy является прямоугольник $\{(x,y)|-1\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1\}$. По формуле (3) находим

$$\iint\limits_{\sigma}\left(4xy+3z^2\right)dxdy=\iint\limits_{D}\left(4xy+3\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\right)dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{1}\left(4xy+3-3x^2\right)dy=4$$

Если выбрать другую сторону поверхности, то направляющие косинусы нормали $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ изменят знак, и, следовательно, поверхностный интеграл второго рода изменит знак.

$$= \int_{0}^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \left(\frac{1}{3}\rho^{3} - \frac{1}{5}\rho^{5} \right)\Bigg|_{0}^{R} = 0. \ \square$$

Если гладкая поверхность σ задана своим векторным представлением $\overline{r}(M)=\left(x(u,v);y(u,v);z(u,v)\right)$, $(u;v)\in D'$, где $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ дифференцируемы в области D', то верхнюю сторону поверхности обычно ориентируют с помощью вектора $\overline{n}=\dfrac{\overline{r_u'}\times\overline{r_v'}}{\left|\overline{r_u'}\times\overline{r_v'}\right|}$. Тогда косинусы углов вектора $\overline{n}$ с осями Ox,Oy,Oz выражаются равенствами

$$\cos\alpha=\frac{1}{\left|\overline{r_u'}\times\overline{r_v'}\right|}\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\ \cos\beta=\frac{1}{\left|\overline{r_u'}\times\overline{r_v'}\right|}\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\ \cos\gamma=\frac{1}{\left|\overline{r_u'}\times\overline{r_v'}\right|}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

Тогда выражение поверхностного интеграла через двойной

$$\iint\limits_{\sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D'}\left(P_1(u,v)+Q_1(u,v)+R_1(u,v)\right)dudv$$