Иркутский филиал
Московского государственного технического университета гражданской авиации

Ту 144

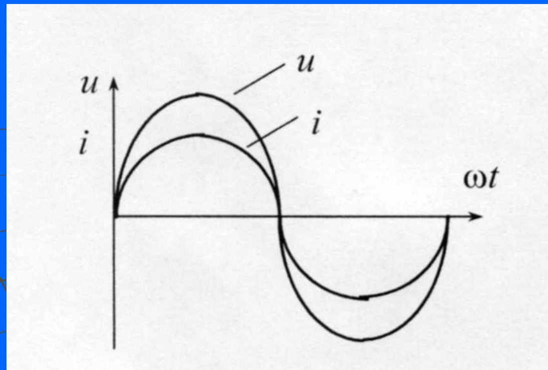
(первый полет 31.12.1968 г., выпущено 18 самолетов)

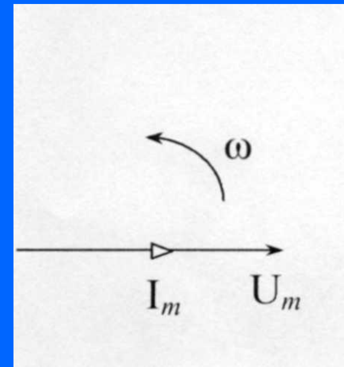
Экипаж – 4 чел
Дальность - 4 500 км,
Количество пассажиров – 140,
Максимальная скорость -2500 км/ч

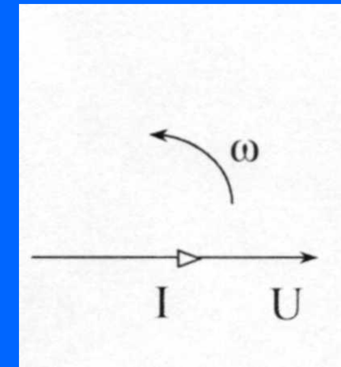
Вес топлива – 70 т,
Двигатели - 4х13000 кГс,
Длина – 59,4 м,
Высота – 10,5 м

Графики и векторные диаграммы

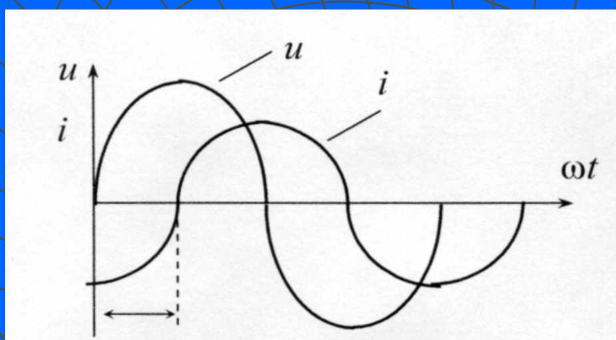
R

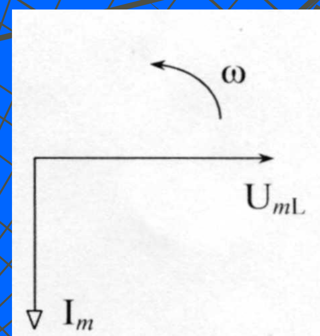


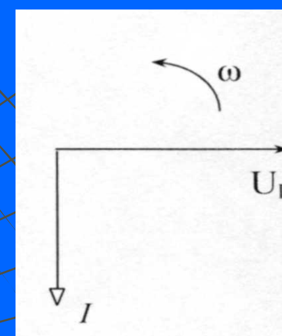




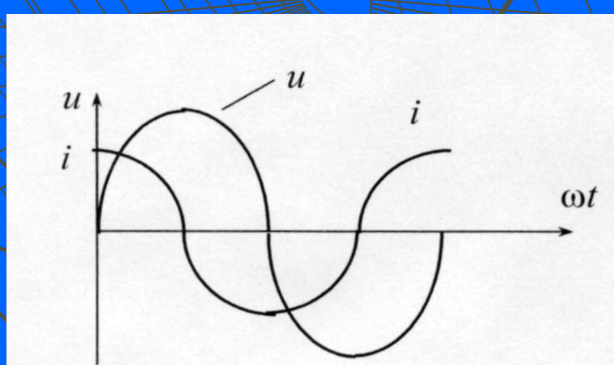
L

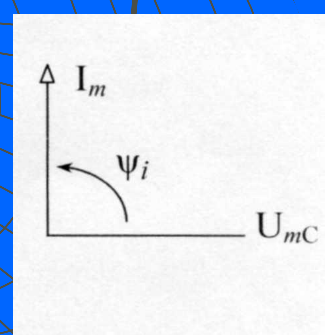


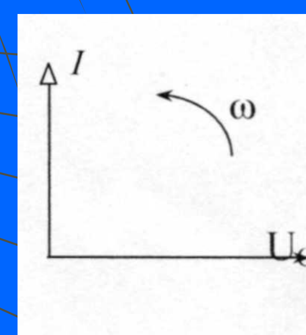


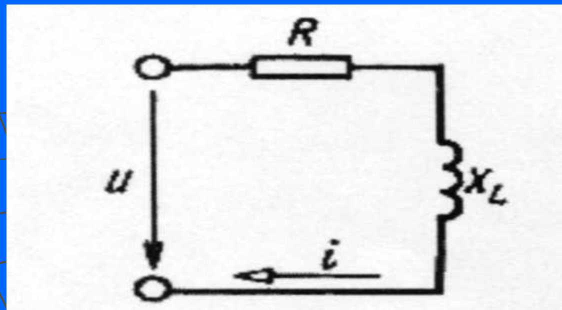


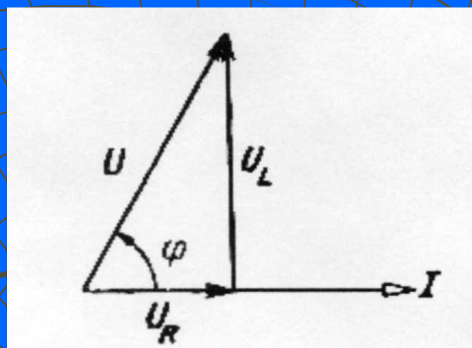
C

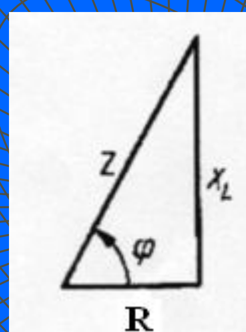


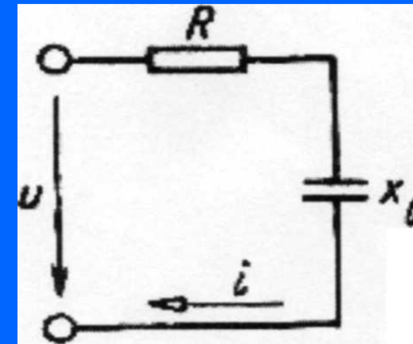


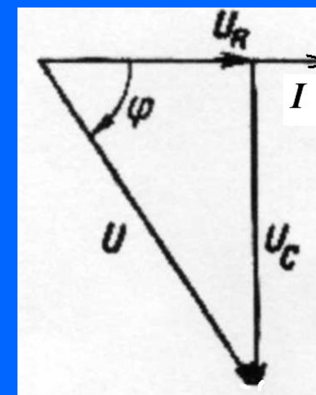


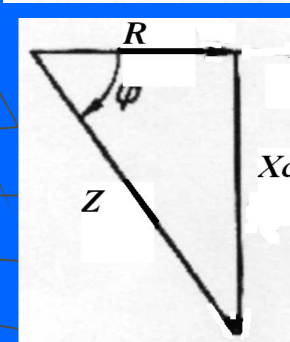












$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$I = U / Z$ закон Ома

$tg\varphi = X_L / R$ или $\cos\varphi = R / Z$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

$I = U / Z$ закон Ома

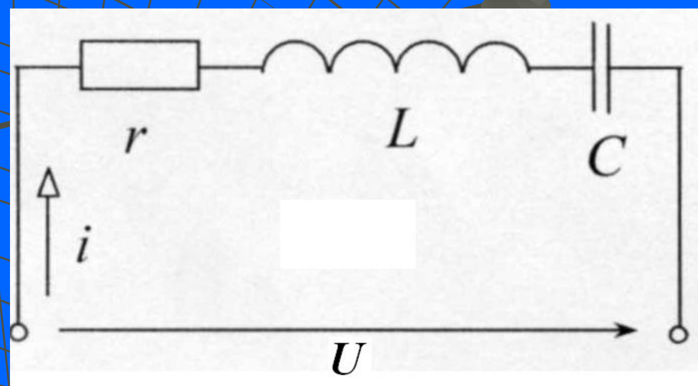
$tg\varphi = -X_C / R$ или $\cos\varphi = R / Z$

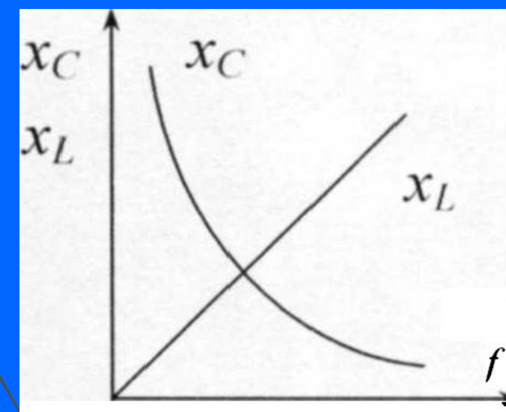
1.8. Цепь с последовательным соединением R, L, C. Векторные диаграммы напряжений и токов

Расчет рассматриваемой цепи произведем для действующих значений величин. В цепи имеются два реактивных элемента, сопротивления которых зависят от частоты питающего напряжения. Изменяя частоту питающего напряжения, можно добиться такого положения, когда одно из реактивных сопротивлений будет больше другого или когда они будут равны

$$x_L = 2\pi f L$$

$$x_c = \frac{1}{2\pi f C}.$$





$$U_R + U_L + U_C = U$$

$$i = I_m \sin \omega t \qquad (1)$$

$$i \cdot r + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = U_m \sin(\omega t + \psi) \qquad (2)$$

подставляя (1) *в* (2)

$$r \cdot I_m \sin \omega t + \omega L I_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = U_m \sin(\omega t + \psi) \text{ или}$$

$$r \cdot I_m \sin \omega t + \omega L I_m \sin(\omega t + 90^0) + \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t - 90^0) = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

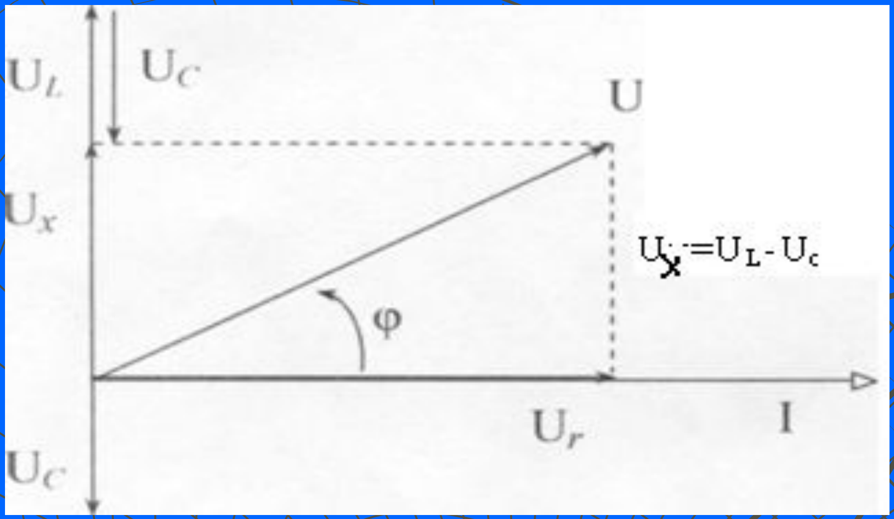
Исходя из рис., рассматриваемая цепь может работать в трех режимах:

$X_L > X_C$;

$X_L < X_C$;

$X_L = X_C$.

Сумме мгновенных значений синусоидальных функций соответствует геометрическая сумма векторов, изображающих эти функции. Построим векторную диаграмму при $X_L > X_C$ в следующей последовательности:



$$U = \sqrt{U_r^2 + (U_L^2 - U_C^2)},$$

$$\varphi = arctg\frac{U_X}{U}$$

1. Вектор тока отложим вправо горизонтально от нулевой точки;
2. Вектор *Ur* отложим параллельно вектору тока, т.к. в цепи с резистором ток и напряжение совпадают по фазе;
3. Вектор U_L опережает ток по фазе на угол 90 , поэтому откладываем его по отношению к вектору тока против часовой стрелки;
4. Вектор *Uc* отстает от тока по фазе на угол 90 , поэтому откладываем его по отношению к вектору тока по часовой стрелке. Так как в цепи ток на всех участках одинаков, а по условию $X_L > X_C$, *то и* $U_L > U_C$

Цепь для источника создает *<u>активно-индуктивный характер нагрузки</u>*

Наличие сдвига фаз между напряжением источника и током в цепи указывает на то, что наряду с активной мощностью, расходуемой в активном сопротивлении, в цепи имеет место и обмен энергиями между реактивными элементами и источником (реактивная мощность).

Методы расчета разветвленной цепи

А. Метод уравнений Кирхгофа для расчета разветвленной электрической цепи

Система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Метод Крамера

Определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

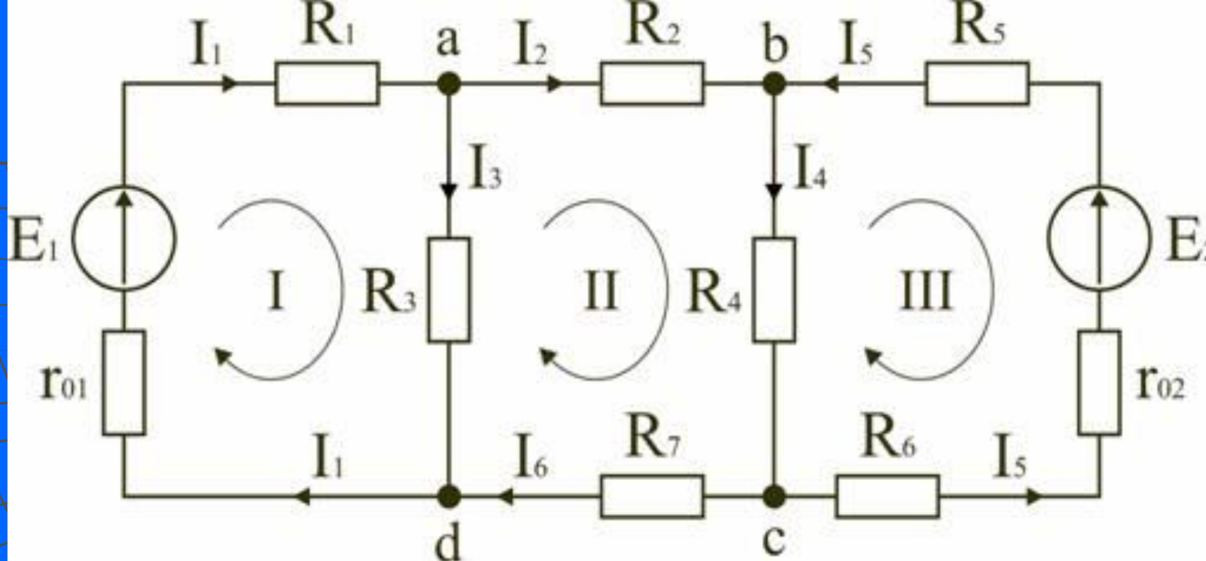
Пример

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 30 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 150 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 110 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 5 & 4 \\ 150 & 3 & 2 \\ 110 & 10 & 9 \end{vmatrix} = -760,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 30 & 4 \\ 1 & 150 & 2 \\ 2 & 110 & 9 \end{vmatrix} = 1350, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 30 \\ 1 & 3 & 150 \\ 2 & 10 & 110 \end{vmatrix} = -1270.$$

$$x_1 = -\frac{760}{5} = -152, \quad x_2 = \frac{1350}{5} = 270, \quad x_3 = -\frac{1270}{5} = -254$$



Ветвь, узел и замкнутый контур!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Первый закон Кирхгофа:

***Алгебраическая сумма** токов в узле равна нулю*

$$\sum I = 0$$

Должно быть учтено направление тока по отношению к узлу. Все токи, направленные к узлу входят в сумму с одним знаком, а направленные от узла – с противоположным. Первый закон Кирхгофа может быть сформулирован иначе:

Сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов вытекающих из узла:

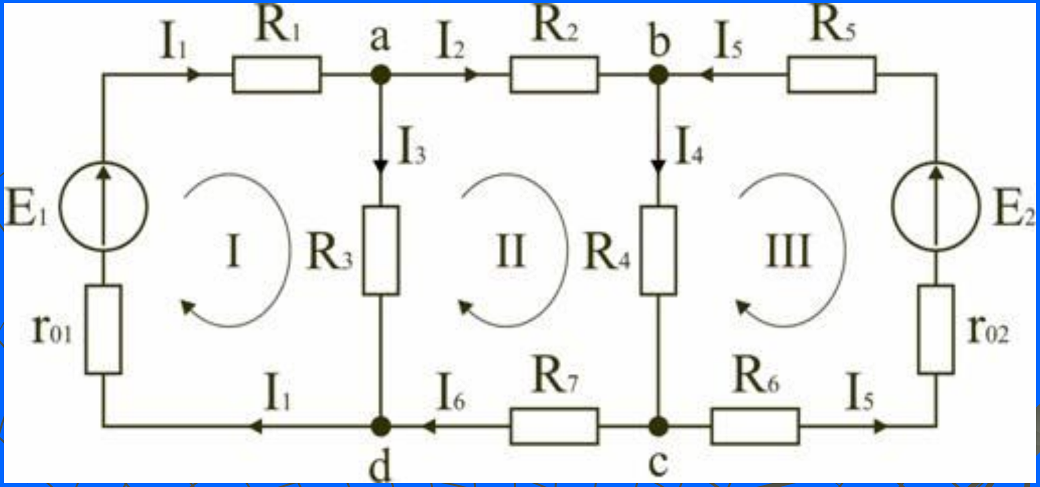
$$\sum I_{\text{вх}} = \sum I_{\text{вых}}$$

Второй закон Кирхгофа применяется к замкнутым контурам электрической цепи и формулируется следующим образом:

В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на элементах контура равна сумме ЭДС в этом контуре

$$\sum U = \sum E$$

На основании законов Кирхгофа составляются уравнения для неизвестных токов в ветвях. Система полученных уравнений линейна, ее решение позволяет найти неизвестные токи в ветвях цепи.



1. Обозначим токи во всех ветвях. Направление токов выбираем произвольно, но в цепях с источниками ЭДС рекомендуется, чтобы направление токов совпадало с направлением ЭДС.

2. Составим уравнения по первому закону Кирхгофа. Выбираем 4–1=3 узла (a, b, c) и для них записываем уравнения:

узел a: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$;

узел b: $I_2 - I_4 + I_5 = 0$;

узел c: $I_4 - I_5 - I_6 = 0$.

3. Составим уравнения по второму закону Кирхгофа. Необходимо составить 6–3=3 уравнения. В схеме на рисунке 1 выбираем контура I, II, III и для них записываем уравнения:

контур I: $I_1(r_{01} + R_1) + I_3R_3 = E_1$;

контур II: $I_2R_2 + I_4R_4 + I_6R_7 - I_3R_3 = 0$;

контур III: $-I_5(r_{02} + R_5 + R_6) - I_4R_4 = -E_2$.

4. Получаем систему из 6 уравнений с 6 неизвестными:

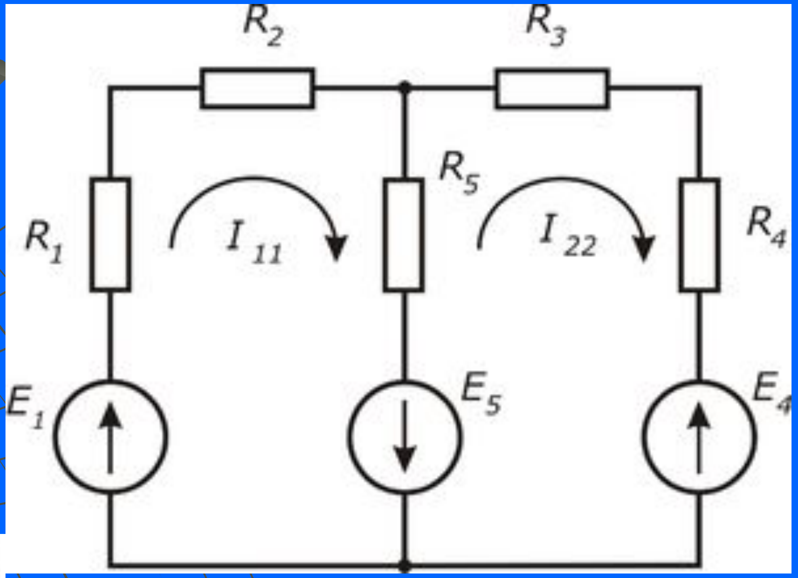
$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_2 - I_4 + I_5 = 0 \\ I_4 - I_5 + I_6 = 0 \\ I_1\left(r_{01} + R_1\right) + I_3 R_3 = E_1 \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 + I_6 R_7 = 0 \\ -I_4 R_4 - I_5\left(r_{02} + R_5 + R_6\right) = -E_2 \end{cases}$$

5. Уравнение можно представить в матричной форме. Тогда для заданной электрической цепи решение системы будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ r_{01} + R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & R_4 & 0 & R_7 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & -\left(r_{02} + R_5 + R_6\right) & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ 0 \\ -E_2 \end{vmatrix}$$

Метод контурных токов

Суть метода контурных токов: полагают, что в каждом независимом контуре схемы течет свой контурный ток. Уравнения составляют относительно контурных токов, после чего через них определяют токи ветвей. Уравнения составляются для контура лишь по второму закону Кирхгофа. Следовательно, метод контурных токов более экономен при вычислительной работе.



$$(R_1 + R_2)I_{11} + R_5(I_{11} - I_{22}) = E_1 + E_5$$

или

$$(R_1 + R_2 + R_5)I_{11} + (-R_5)I_{22} = E_1 + E_5.$$

$$-R_5(I_{11} - I_{22}) + (R_3 + R_4)I_{22} = -E_5 - E_4$$

или

$$(-R_5)I_{11} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{22} = -E_4 - E_5.$$

$$\left.\begin{array}{l} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} = E_{11}; \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} = E_{22}. \end{array}\right\}$$

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5;$$
$$E_{11} = E_1 + E_5;$$
$$R_{12} = R_{21} = -R_5;$$
$$R_{22} = R_3 + R_4 + R_5;$$
$$E_{22} = -E_4 - E_5.$$

Для трех контуров

$$\left.\begin{array}{l} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11}; \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22}; \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33}, \end{array}\right\}$$

$$[R][I] = [E];$$

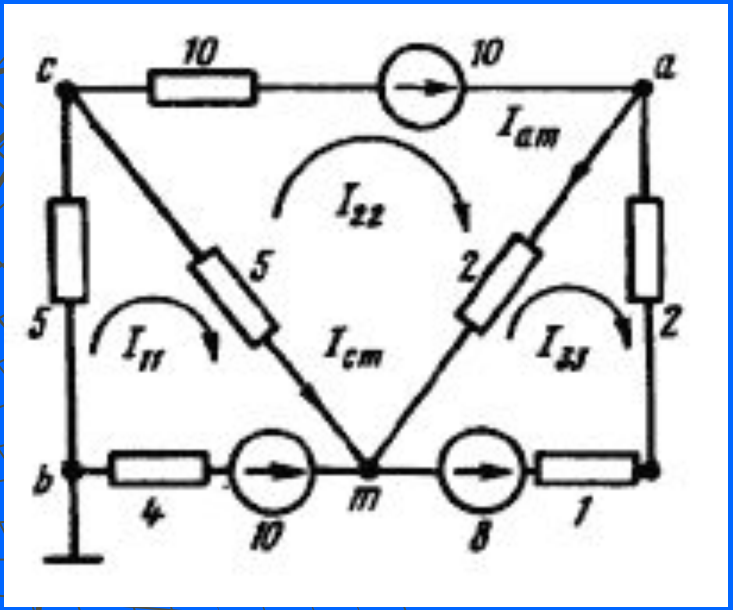
$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} R_{12} R_{13} \\ R_{21} R_{22} R_{23} \\ R_{31} R_{32} R_{33} \end{bmatrix}; \quad [I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix}; \quad [E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix}.$$

Пример: Найти токи в схеме (рис.) методом контурных токов. Числовые значения сопротивлений в Омах и ЭДС в вольтах указаны на рисунке.

Решение. Выберем направления всех контурных токов I_{11}, I_{22} и I_{33} по часовой стрелке. Определяем: $R_{11} = 5 + 5 + 4 = 14$ Ом; $R_{22} = 5 + 10 + 2 = 17$ Ом; $R_{33} = 2 + 2 + 1 = 5$ Ом; $R_{12} = R_{21} = -5$ Ом; $R_{13} = R_{31} = 0$; $R_{23} = R_{32} = -2$ Ом; $E_{11} = -10$ В; $E_{33} = -8$.

Записываем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 14I_{11} - 5I_{22} \qquad\qquad &= -10; \\ -5I_{11} + 17I_{22} - 2I_{33} &= 10; \\ -2I_{22} + 5I_{33} &= -8. \end{aligned}$$



определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1009.$$

подсчитаем контурные токи

$$I_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-640}{1009} = -0{,}634\ \text{А};$$

$$I_{22} = 0{,}224\ \text{А};\ I_{33} = -1{,}51\ \text{А}.$$

Ток в ветви *cm*

$Icm = I_{11} - I_{22} = -0{,}634 - 0{,}224 = -0{,}86$ А.

Ток в ветви *am*

$Iam = I22 - I33 = 0{,}224 + 1{,}51 = 1{,}734$ А.

1.13. Полная, активная и реактивная электрические мощности. Треугольник электрических мощностей

<u>**Активная мощность**</u> **(P) определяет среднее значение энергии, поступающей в электрическую цепь в единицу времени и превращающуюся там в тепло или в другие виды энергии.** $P = UI\cos\varphi$

Активная мощность всегда положительна, имеет размерность [Ватт].

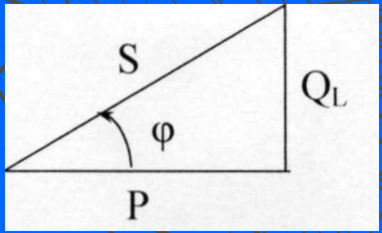
<u>**Реактивной мощностью**</u> **(Q) называют мощность, которая характеризует интенсивность обмена энергией между источником и реактивными элементами. Реактивная мощность рассчитывается по формуле:**

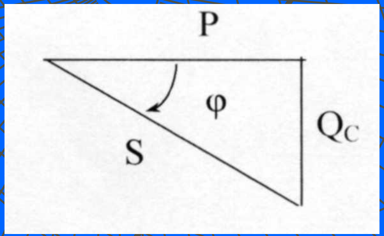
$Q = UI\sin\varphi$ **и имеет размерность [ВАр].**

$$Q = Q_L - Q_C = X_L I^2 - X_C I^2 = (X_L - X_C) I^2 = XI^2$$

Полной мощностью (S) называется величина, определяемая $S = UI$ **и характеризующая мощность источников переменного тока. Измеряется полная мощность в [ВА].**

Треугольники мощностей





$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2},$$

$$\varphi = arctg\frac{Q}{R}, \qquad P = S\cdot\cos\varphi, \qquad Q = S\cdot\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} - \textit{коэффициент мощности}$$

Позволяют установить связь между активной, реактивной и полной мощностями

Тема 1. Основы символического метода

Лекция 2 (*2 часа*)

Изучаемые вопросы:

1.8. Цепь с последовательным соединением R, L, C. Векторные диаграммы напряжений и токов

1.9. Полное сопротивление цепи. Треугольник сопротивлений

1.10. Закон Ома, законы Кирхгофа. Комплекс полного сопротивления цепи

1.11. Резонанс напряжений

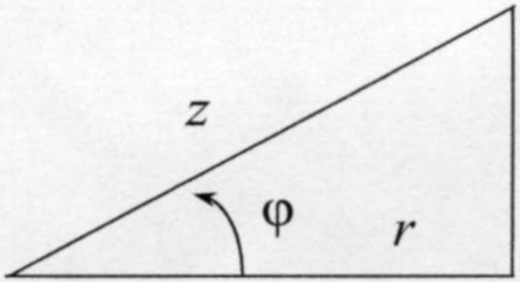
1.12. Резонанс токов

1.13. Полная, активная и реактивная электрические мощности. Треугольник электрических мощностей

Лектор – к.ф.м.н., доцент Кобзарь В.А.

1.9. Полное сопротивление цепи. Треугольник сопротивлений

Если стороны треугольника векторной диаграммы напряжений разделить на одну и ту же величину - ток *I* , то образуется подобный ему прямоугольный *треугольник сопротивлений*, из которого может быть определено полное сопротивление цепи Z

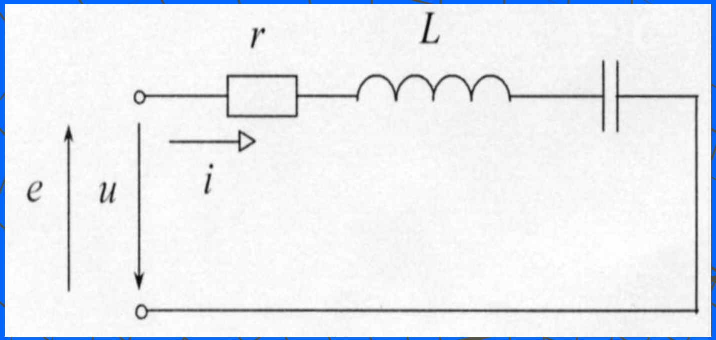


$$x = x_L - x_C$$

$$z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} \qquad \frac{U_L}{I} - \frac{U_C}{I} = x_L - x_C$$

Расчет электрических цепей с использованием векторных диаграмм треугольников сопротивлений и мощностей называют методом сопротивлений. Он применим лишь к простым цепям с последовательным соединением пассивных элементов

1.10. Закон Ома в комплексной форме. Полное сопротивления цепи



$$U = U_m \sin(\omega t + \psi_U)$$

$$U_R + U_L + U_C = U$$

$$r \cdot i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = U \qquad (1)\ \textit{интегро-дифференциальное неоднородное уравнение}$$

$$U_m \sin(\omega t + \psi_U) \to \dot{U} \qquad i = I_m \sin(\omega t + \psi_U - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi_I) \to \dot{I}$$

Решение уравнения (1) будем искать не в синусоидальных функциях, а в виде комплексных амплитуд. При этом операции дифференцирования и интегрирования заменятся соответственно умножением и делением на $j\omega$ **. Тогда (1) примет вид**

$$r \cdot \dot{I}_m + j\omega L \dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m = \dot{U}_m \qquad \textit{проделив на} \quad \sqrt{2}$$

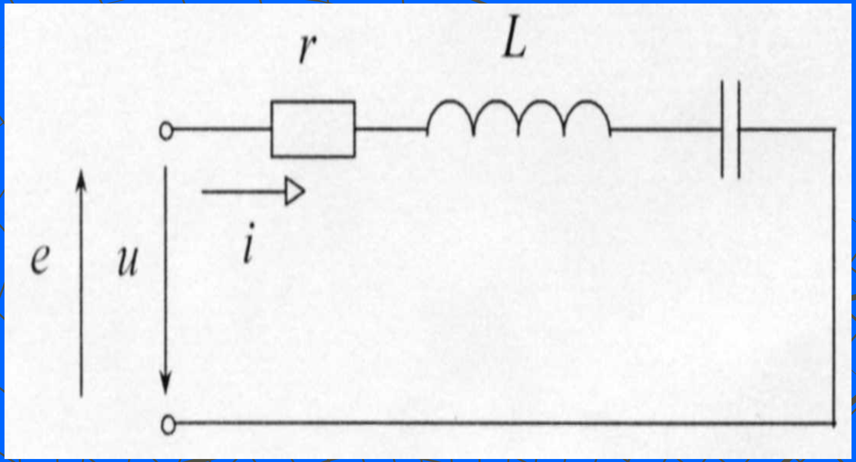
$$r \cdot \dot{I} + j\omega L \dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \dot{U} \qquad (2)$$

$$Z = r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = r + jx$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{r + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

Закон Ома в комплексной форме

1.10.1. Первый и второй законы Кирхгофа в комплексной форме



$$r\cdot\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \dot{U} \qquad (1)$$

$$r\cdot\dot{I} = \dot{U}_r, \qquad j\omega L\dot{I} = \dot{U}_L, \qquad \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \dot{U}_C$$

$$\dot{U}_r + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{U} \qquad (2)$$

Соотношение (2) представляет собой уравнение по второму закону Кирхгофа в комплексной форме.

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{U}_k = \sum_{k=1}^{m}\dot{E}_k$$

Алгебраическая сумма комплексных напряжений в контуре равна алгебраической сумме комплексных ЭДС в этом же контуре

Первый закон Киргофа в комплексной форме

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{I}_k = 0$$

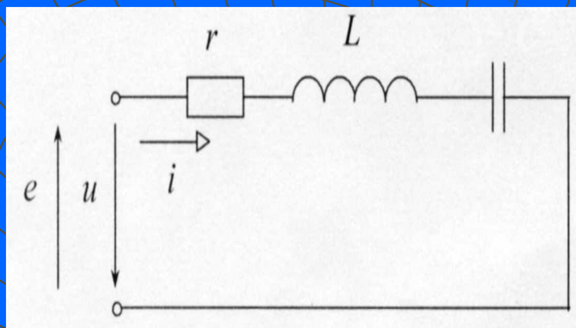
Второй закон Киргофа в комплексной форме

Алгебраическая сумма комплексных токов в узле равна нулю

1.11. Резонанс напряжений

<u>Резонансом</u> в электрической цепи, содержащей катушку индуктивности и конденсатор, называется <u>явление</u> при котором ***разность фаз напряжения и тока на входе цепи равна нулю.***

Резонансные явления имеют место, как при последовательном, так и при параллельном соединении катушек индуктивности и конденсаторов. При этом имеет место два вида резонанса: <u>резонанс напряжений</u> (в последовательной цепи) и <u>резонанс токов</u> (в параллельной цепи).



$$Z = r + jx = r + j(X_L - X_C) = r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

При резонансе

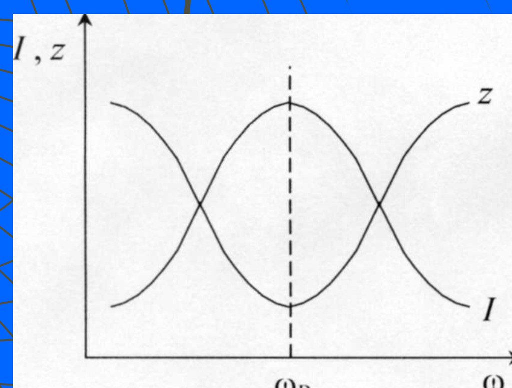
$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \qquad (1)$$

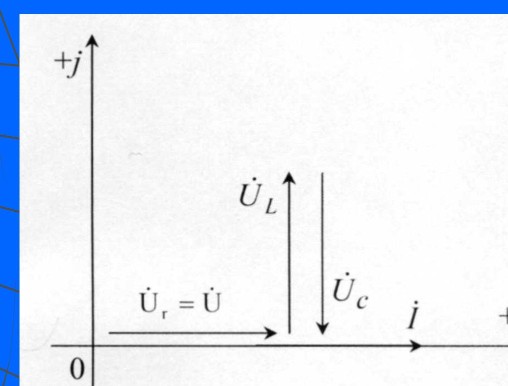
Уравнение (1) - условие возникновения резонанса напряжений. Т.е. ***<u>общее реактивное сопротивление цепи равно нулю</u>***

$$\omega = \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad I = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{U}}{r}$$

при резонансе полное сопротивление цепи минимальное и равно активному сопротивлению, т.е. **z = r**; ток в цепи при резонансе будет максимальным

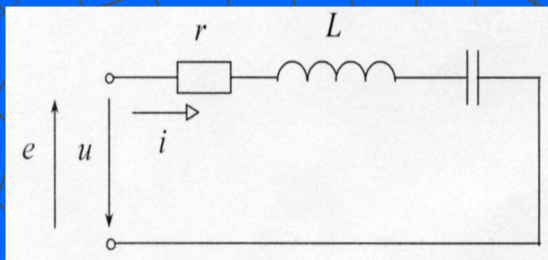
Графики зависимости I и Z от частоты и векторная диаграмма при резонансе





Добротность последовательного контура

Построим треугольник сопротивлений последовательного контура и найдем сопротивления реактивных элементов при резонансе

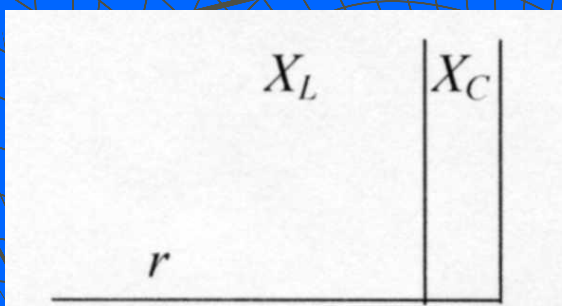


$$X_{LP} = \omega_P L = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

$$X_{CP} = \frac{1}{\omega_P C} = \frac{\sqrt{L\,C}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

$$X_{LP} = X_{CP} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

ρ- **волновое (характеристическое) сопротивление [Ом]**



Найдем напряжение на индуктивности и емкости

$$U_{Lp} = I \cdot X_{Lp} = \frac{U}{r} \cdot \rho = U \cdot \Theta,$$

$$U_{Cp} = I \cdot X_{Cp} = \frac{U}{r} \cdot \rho = U \cdot \Theta,$$

$$\Theta = \rho / r - \quad \textit{добротность} \quad \textit{контура}$$

Добротность контура (коэффициент резонанса) **показывает во сколько раз напряжение на индуктивности** U_{Lp} **или на емкости** U_{Cp} **при резонансе больше, чем напряжение, приложенное к цепи.**

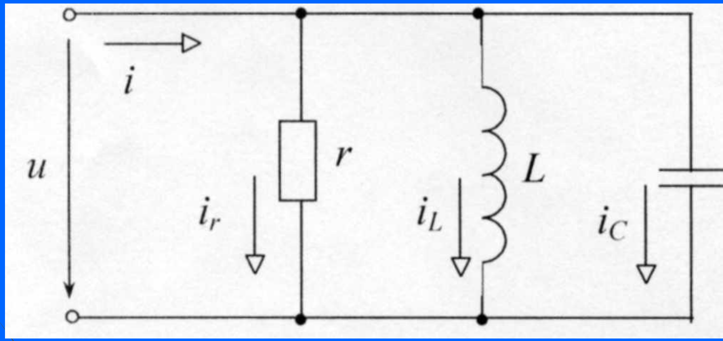
Величина, обратная добротности, называется *затуханием* и обозначается α. В радиоаппаратуре, где резонансные явления используются наиболее хорошо, значение добротности контура равно Θ=5-500.

1.12. Резонанс токов

Если к выводам электрической цепи, состоящей из параллельно соединенных элементов приложено синусоидальное напряжение, то синусоидальный ток проходящий через эту цепь равен алгебраической сумме синусоидальных токов в параллельных ветвях (первый закон Кирхгофа)

$$i = i_r + i_L + i_C$$

Ток в сопротивлении совпадает по фазе с напряжением ток в индуктивности отстает, а ток в емкости опережает напряжение на π/2 следовательно суммарный ток в цепи равен



$$I_m \sin(\omega t - \varphi) = \frac{1}{r} U_m \sin \omega t - \frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t + \omega C U_m \cos \omega t =$$

$$= U_m \left[\frac{1}{r} \sin \omega t - \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) \cos \omega t \right] = U_m \left[g \sin \omega t - b \cos \omega t \right] \qquad (1)$$

$b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$ *реактивная проводимость*

$g = \frac{1}{r}$ *активная проводимость*

$y = \sqrt{g^2 + b^2}$ *полная проводимость*

Уравнение (1) представляет собой тригонометрическую форму записи первого закона Киргофа для мгновенных токов

Явление резонанса в электрической цепи, содержащей параллельно соединенные индуктивные и емкостные элементы называется *резонансом токов.* Согласно определению, резонанс в данной цепи имеет место в том случае, когда напряжение и ток на входе совпадают по фазе, т.е. тогда, когда проводимость цепи будет чисто *активной*. Комплексная величина полной проводимости *Y* равна:

$$Y = \frac{1}{r} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = g - j(b_L - b_C) = g - jb = y e^{-j\varphi}$$

$Y = g$ *активная* *при* $b = \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = 0 \qquad \frac{1}{\omega L} = \omega C$

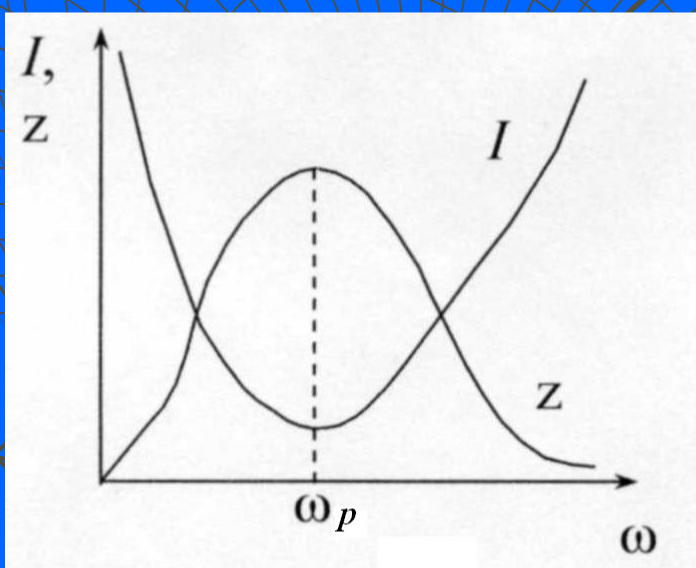
При резонансе ток в неразветвленной цепи $\dot{I} = \dot{U} g$, а угол сдвига фаз между током и напряжением равен нулю

Свойства цепи при резонансе:

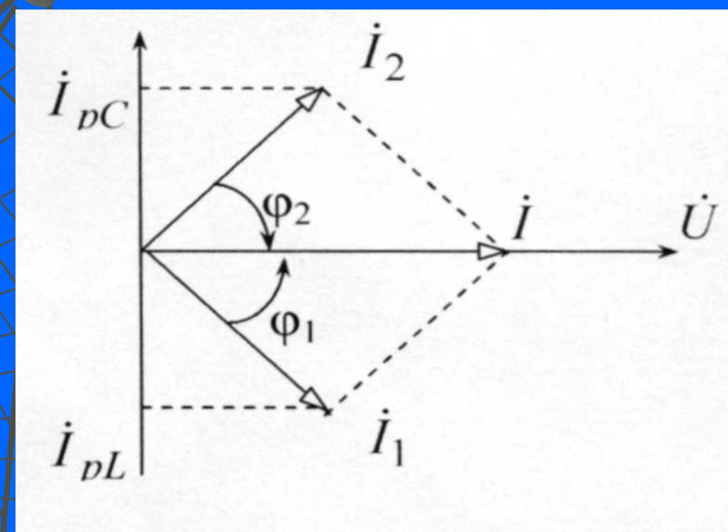
- при резонансе полное сопротивление цепи максимальное, т.к. проводимость цепи минимальная и равна чисто активной проводимости;

- ток в неразветвленной части цепи *I* будет минимальным

Графики зависимости тока в неразветвленной части цепи и полного сопротивления

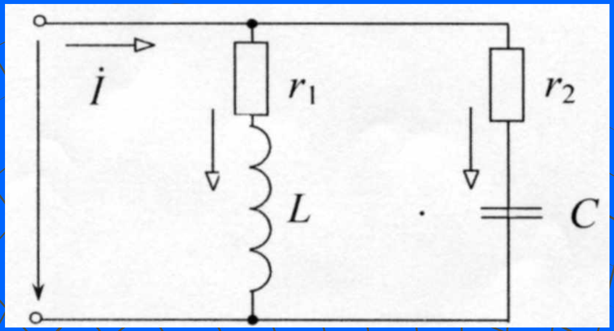


Векторная диаграмма для режима резонанса токов



Ток в цепи с *L* отстает от напряжения на угол φ_1 а ток в цепи с *C* опережает напряжение на угол φ_2. Вектор тока *I* в неразветвленной цепи при резонансе совпадает с вектором напряжения. При этом реактивные составляющие токов I_{PL} и I_{pc} равны по величине и противоположно направлены

Реальная схема с учетом активных потерь в ветвях L и C и условие возникновения резонанса для этой схемы



$$в = \frac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{\left(r_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)} = 0$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L C}} \sqrt{\frac{r_1^2 - L/C}{r_2^2 - L/C}} = \frac{1}{\sqrt{L/C}} \sqrt{\frac{r_1^2 - \rho^2}{r_2^2 - \rho^2}}$$

АНАЛИЗ ωp

1 $r_1^2 = r_2^2 \neq \rho^2$

2 $r_1^2 = r_2^2 = \rho^2$

3 $r_1^2 \rangle \rho^2$ è $r_2^2 \rangle \rho^2$

В радиотехнике и электросвязи применяются контуры с малыми потерями $r_1 \ll \rho$ и $r_2 \ll \rho$. Тогда резонансная частота, токи в неразветвленной цепи I, и в ветвях I_1 и I_2 вычисляют по формулам

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L C}}.$$

$$I = U(q_1 + q_2) \approx U\left[\frac{r_1}{x_{LP}^2} + \frac{r_1}{x_{CP}^2}\right] = \frac{U(r_1 + r_2)}{\rho^2}.$$

$$x_{LP} = \omega_p L = \frac{1 \cdot L}{\sqrt{L C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

$$x_{CP} = \frac{1}{\omega_p C} = \frac{\sqrt{L C}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

$$I_2 = U y_2 = \frac{U}{x_{CP}} = \frac{U}{\rho}$$

$$I_1 = U y_1 = \frac{U}{x_{LP}} = \frac{U}{\rho}$$

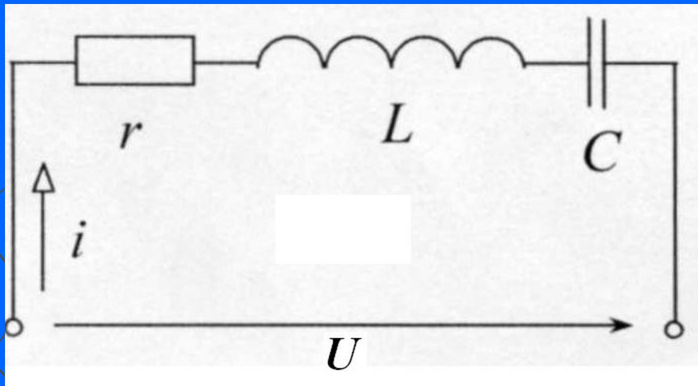
$$\frac{I_1}{I} = \frac{I_2}{I} = \frac{\rho}{r_1 + r_2} = \Theta.$$

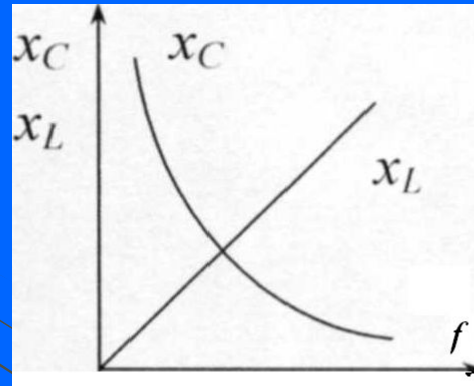
Добротность контура. Отношение тока в одной из параллельных ветвей к току в неразветвленной цепи называется добротностью контура при параллельном соединении, а обратная величина - затуханием

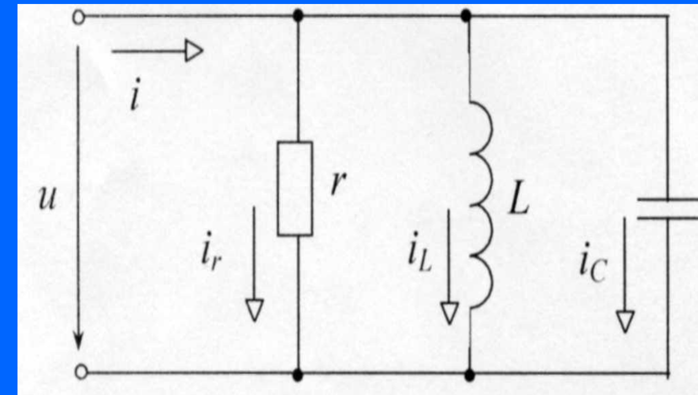
$$I_{Lp} = I \cdot \Theta,$$

$$I_{Cp} = I \cdot \Theta,$$

$$I_{Lp} = -I_{Cp}$$







$$Z = r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$Y = \frac{1}{r} - j(\frac{1}{\omega L} - \omega C)$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega_р = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}.$$

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C$$

$$U_{Lp} = U \cdot \Theta,$$

$$U_{Cp} = U \cdot \Theta$$

$$I_{Lp} = I \cdot \Theta,$$

$$I_{Cp} = I \cdot \Theta,$$

$$I_{Lp} = -I_{Cp}$$

1.13. Полная, активная и реактивная электрические мощности. Треугольник электрических мощностей

Активная мощность (P) определяет среднее значение энергии, поступающей в электрическую цепь в единицу времени и превращающуюся там в тепло или в другие виды энергии. $P = UI\cos\varphi$

Активная мощность всегда положительна, имеет размерность [Ватт].

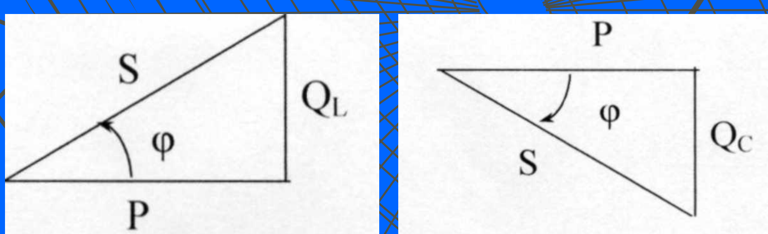
Реактивной мощностью (Q) называют мощность, которая характеризует интенсивность обмена энергией между источником и реактивными элементами. Реактивная мощность рассчитывается по формуле:

$Q = UI\sin\varphi$ и имеет размерность [ВАр].

$$Q = Q_L - Q_C = X_L I^2 - X_C I^2 = (X_L - X_C) I^2 = X I^2$$

Полной мощностью (S) называется величина, определяемая $S = UI$ и характеризующая мощность источников переменного тока. Измеряется полная мощность в [ВА].

Треугольники мощностей



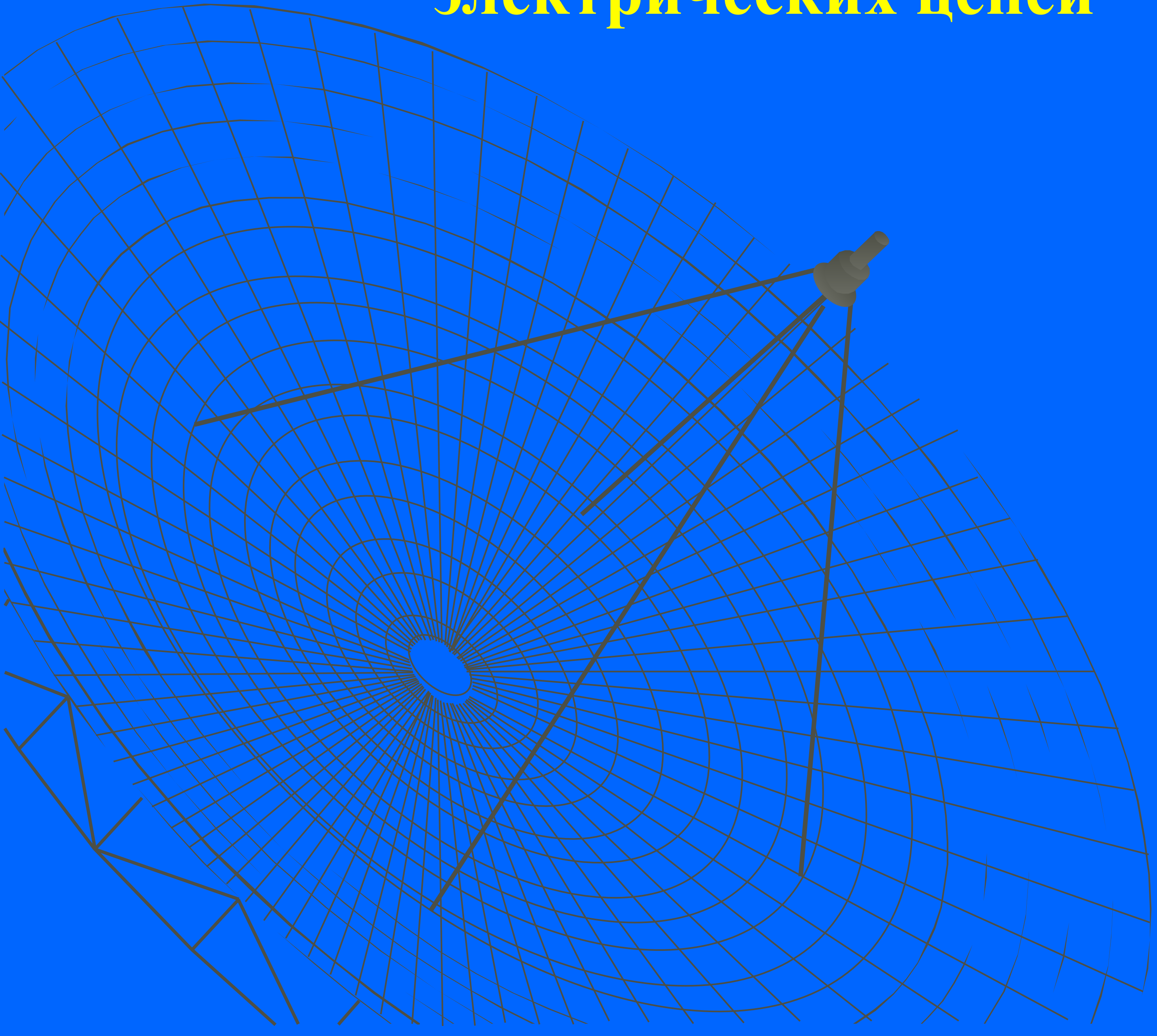
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2},$$

$$\varphi = arctg\frac{Q}{P}, \qquad P = S\cdot\cos\varphi, \qquad Q = S\cdot\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} - \quad коэффициент \quad мощности$$

Позволяют установить связь между активной, реактивной и полной мощностями

Методы расчета разветвленных электрических цепей



Метод уравнений Кирхгофа для расчета разветвленной электрической цепи

Система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Метод Крамера

Определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

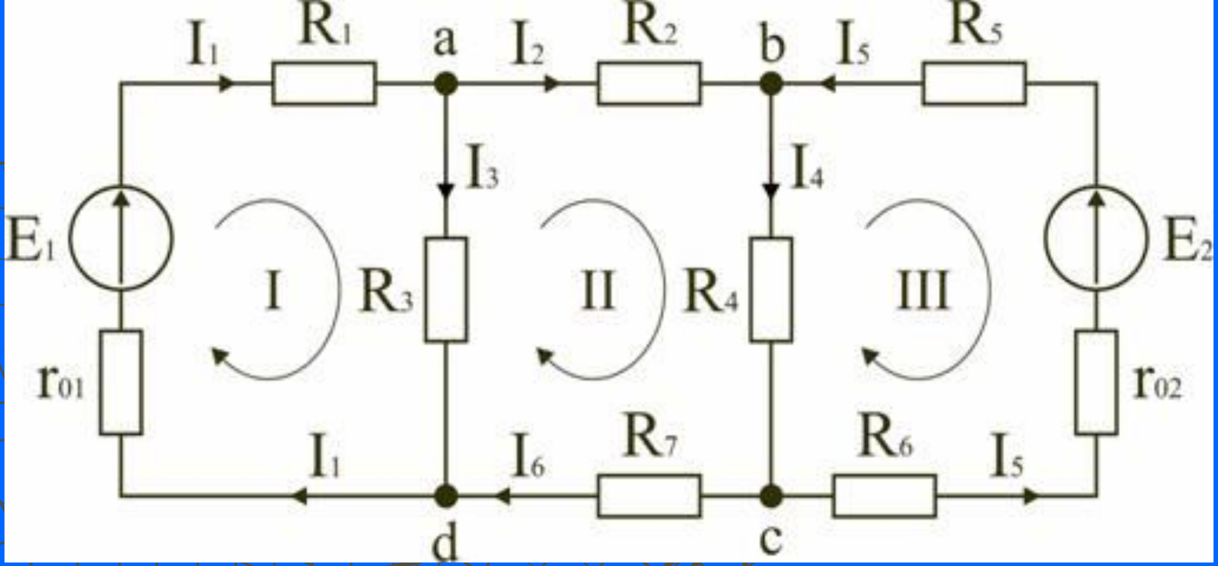
Пример

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 30 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 150 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 110 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 5 & 4 \\ 150 & 3 & 2 \\ 110 & 10 & 9 \end{vmatrix} = -760,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 30 & 4 \\ 1 & 150 & 2 \\ 2 & 110 & 9 \end{vmatrix} = 1350, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 30 \\ 1 & 3 & 150 \\ 2 & 10 & 110 \end{vmatrix} = -1270.$$

$$x_1 = -\frac{760}{5} = -152, \quad x_2 = \frac{1350}{5} = 270, \quad x_3 = -\frac{1270}{5} = -254$$



Ветвь, узел и замкнутый контур!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Первый закон Кирхгофа:

***Алгебраическая сумма** токов в узле равна нулю*

$$\sum I = 0$$

Должно быть учтено направление тока по отношению к узлу. Все токи, направленные к узлу входят в сумму с одним знаком, а направленные от узла – с противоположным. Первый закон Кирхгофа может быть сформулирован иначе:

Сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов вытекающих из узла:

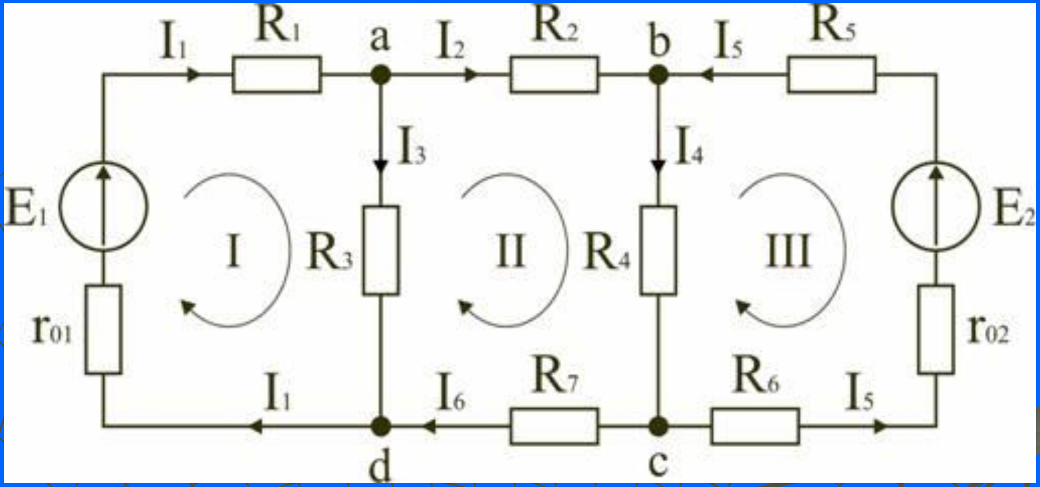
$$\sum I_{\text{вх}} = \sum I_{\text{вых}}$$

Второй закон Кирхгофа применяется <u>к замкнутым контурам</u> электрической цепи и формулируется следующим образом:

В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на элементах контура равна сумме ЭДС в этом контуре

$$\sum U = \sum E$$

На основании законов Кирхгофа составляются уравнения для <u>неизвестных токов в ветвях</u>. Система полученных уравнений линейна, ее решение позволяет найти неизвестные токи в ветвях цепи.



1. Обозначим токи во всех ветвях. Направление токов выбираем произвольно, но в цепях с источниками ЭДС рекомендуется, чтобы направление токов совпадало с направлением ЭДС.

2. Составим уравнения по первому закону Кирхгофа. Выбираем 4–1=3 узла (a, b, c) и для них записываем уравнения:

узел a: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$;

узел b: $I_2 - I_4 + I_5 = 0$;

узел c: $I_4 - I_5 - I_6 = 0$.

3. Составим уравнения по второму закону Кирхгофа. Необходимо составить 6–3=3 уравнения. В схеме на рисунке 1 выбираем контура I, II, III и для них записываем уравнения:

контур I: $I_1(r_{01} + R_1) + I_3R_3 = E_1$;

контур II: $I_2R_2 + I_4R_4 + I_6R_7 - I_3R_3 = 0$;

контур III: $-I_5(r_{02} + R_5 + R_6) - I_4R_4 = -E_2$.

4. Получаем систему из 6 уравнений с 6 неизвестными:

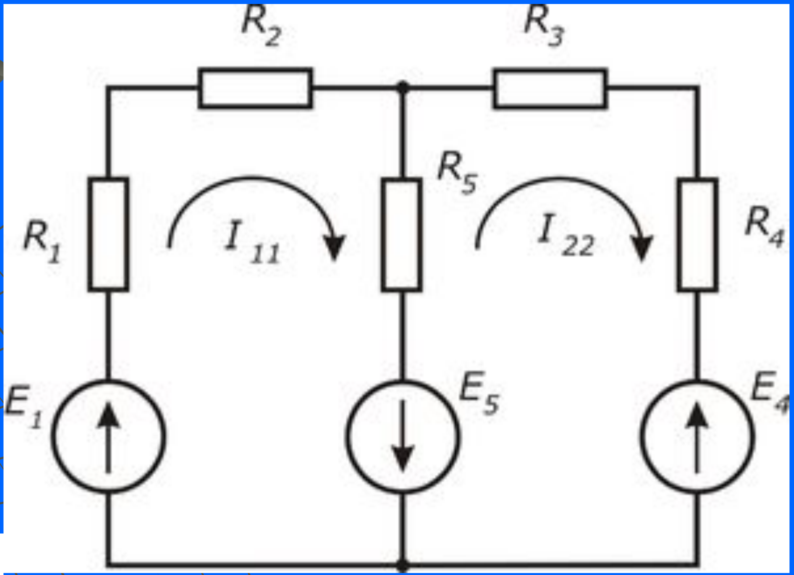
$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_2 - I_4 + I_5 = 0 \\ I_4 - I_5 + I_6 = 0 \\ I_1\left(r_{01} + R_1\right) + I_3 R_3 = E_1 \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 + I_6 R_7 = 0 \\ -I_4 R_4 - I_5\left(r_{02} + R_5 + R_6\right) = -E_2 \end{cases}$$

5. Уравнение можно представить в матричной форме. Тогда для заданной электрической цепи решение системы будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ r_{01} + R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & R_4 & 0 & R_7 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & -\left(r_{02} + R_5 + R_6\right) & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ 0 \\ -E_2 \end{vmatrix}$$

Метод контурных токов

<u>Суть **методa контурных токов**</u>: полагают, что в каждом независимом контуре схемы течет свой контурный ток. Уравнения составляют относительно контурных токов, после чего через них определяют токи ветвей. Уравнения составляются для контура лишь по второму закону Кирхгофа. Следовательно, метод контурных токов более экономен при вычислительной работе.



$$(R_1 + R_2)I_{11} + R_5(I_{11} - I_{22}) = E_1 + E_5$$

или

$$(R_1 + R_2 + R_5)I_{11} + (-R_5)I_{22} = E_1 + E_5.$$

$$-R_5(I_{11} - I_{22}) + (R_3 + R_4)I_{22} = -E_5 - E_4$$

или

$$(-R_5)I_{11} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{22} = -E_4 - E_5.$$

$$\left.\begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} &= E_{11}; \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} &= E_{22}. \end{aligned}\right\}$$

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5;$$
$$E_{11} = E_1 + E_5;$$
$$R_{12} = R_{21} = -R_5;$$
$$R_{22} = R_3 + R_4 + R_5;$$
$$E_{22} = -E_4 - E_5.$$

Для трех контуров

$$\left.\begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} &= E_{11}; \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} &= E_{22}; \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} &= E_{33}, \end{aligned}\right\}$$

$$[R][I] = [E];$$

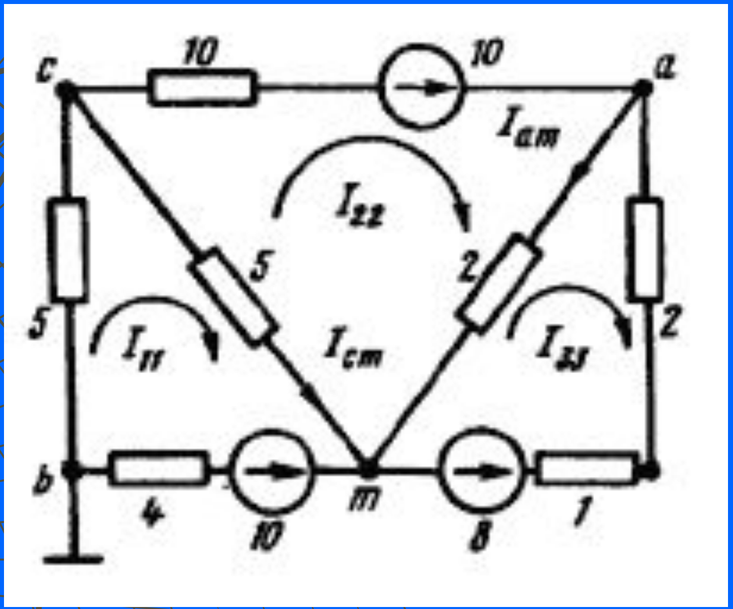
$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} R_{12} R_{13} \\ R_{21} R_{22} R_{23} \\ R_{31} R_{32} R_{33} \end{bmatrix}; \quad [I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix}; \quad [E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix}.$$

Пример: Найти токи в схеме (рис.) методом контурных токов. Числовые значения сопротивлений в Омах и ЭДС в вольтах указаны на рисунке.

Решение. Выберем направления всех контурных токов I_{11}, I_{22} и I_{33} по часовой стрелке. Определяем: $R_{11} = 5 + 5 + 4 = 14$ Ом; $R_{22} = 5 + 10 + 2 = 17$ Ом; $R_{33} = 2 + 2 + 1 = 5$ Ом; $R_{12} = R_{21} = -5$ Ом; $R_{13} = R_{31} = 0$; $R_{23} = R_{32} = -2$ Ом; $E_{11} = -10$ В; $E_{33} = -8$.

Записываем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 14I_{11} - 5I_{22} \qquad\qquad &= -10; \\ -5I_{11} + 17I_{22} - 2I_{33} &= 10; \\ -2I_{22} + 5I_{33} &= -8. \end{aligned}$$



определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1009.$$

подсчитаем контурные токи

$$I_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-640}{1009} = -0{,}634\ \text{А};$$

$$I_{22} = 0{,}224\ \text{А};\ I_{33} = -1{,}51\ \text{А}.$$

Ток в ветви *cm*

$Icm = I_{11} - I_{22} = -0{,}634 - 0{,}224 = -0{,}86$ А.

Ток в ветви *am*

$Iam = I22 - I33 = 0{,}224 + 1{,}51 = 1{,}734$ А.

1.13. Полная, активная и реактивная электрические мощности. Треугольник электрических мощностей

<u>Активная мощность</u> (P) определяет среднее значение энергии, поступающей в электрическую цепь в единицу времени и превращающуюся там в тепло или в другие виды энергии. $P = UI\cos\varphi$

Активная мощность всегда положительна, имеет размерность [Ватт].

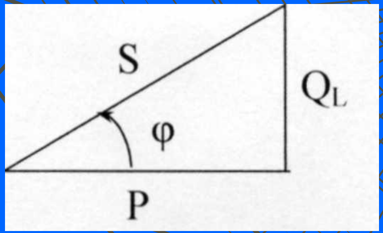
<u>Реактивной мощностью</u> (Q) называют мощность, которая характеризует интенсивность обмена энергией между источником и реактивными элементами. Реактивная мощность рассчитывается по формуле:

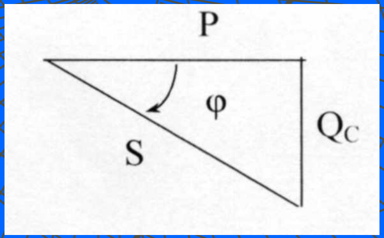
$Q = UI\sin\varphi$ и имеет размерность [ВАр].

$$Q = Q_L - Q_C = X_L I^2 - X_C I^2 = (X_L - X_C) I^2 = X I^2$$

Полной мощностью (S) называется величина, определяемая $S = UI$ и характеризующая мощность источников переменного тока. Измеряется полная мощность в [ВА].

Треугольники мощностей





$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2},$$

$$\varphi = arctg\frac{Q}{R}, \qquad P = S \cdot \cos\varphi, \qquad Q = S \cdot \sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} - \textit{коэффициент мощности}$$

Позволяют установить связь между активной, реактивной и полной мощностями