

ГРАФЫ

Определение графа

Граф представляется как множество вершин (узлов), соединённых рёбрами.

Вершины, прилегающие к одному и тому же ребру, называются **смежными**.

Если ребра не имеют ориентации, граф называется **неориентированным**.

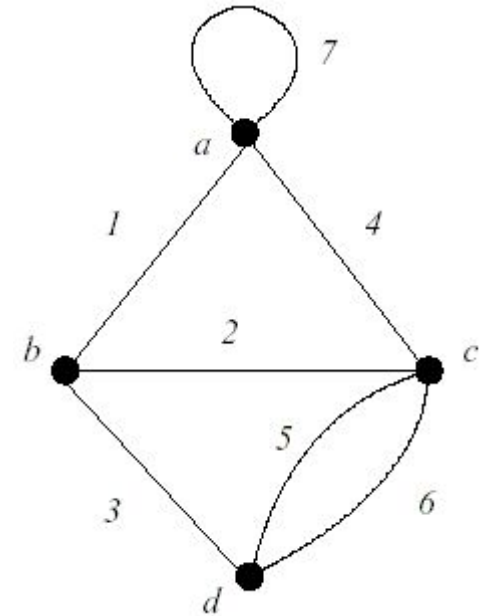
Петля это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.

Степень вершины это удвоенное количество петель, находящихся у этой вершины плюс количество остальных прилегающих к ней ребер.

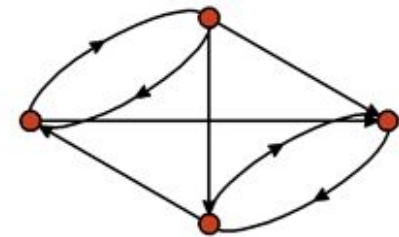
Пустым называется граф без ребер.

Полным называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

Мультиграф — граф, в котором может быть пара вершин, которая соединена более чем одним ребром (ненаправленным), либо более чем двумя дугами противоположных направлений.



Неориентированный граф состоящий из четырех вершин и семи ребер, одно из которых является петлей.



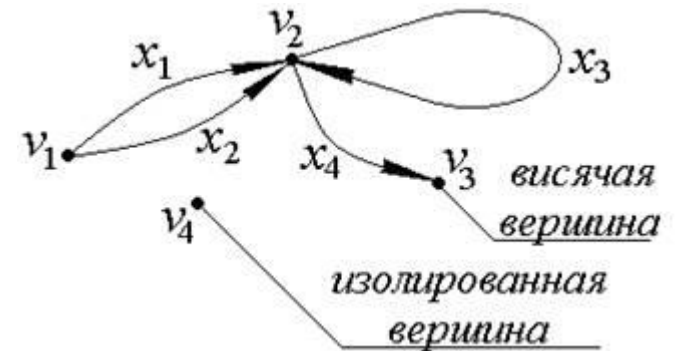
Полный граф

Ориентированный граф

Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами, и граф с такими ребрами называется **ориентированным** графом или **орграфом**.

Вершины и рёбра графа называются также элементами графа, число вершин в графе V - **порядком**, число рёбер E - **размером** графа.

Вершина графа называется **изолированной**, если она не является концом ни для одного ребра; **висячей** (или листом), если она является концом ровно одного ребра



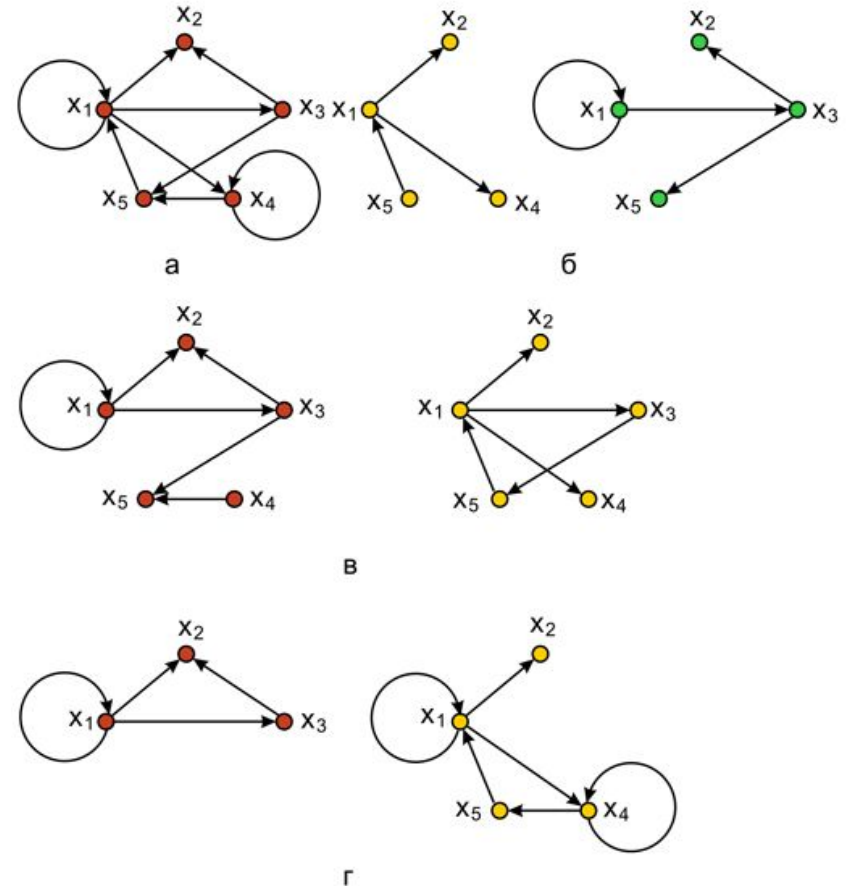
Ориентированный граф

Подграфы, остовы

Подграф графа это граф, являющийся подмоделью исходного графа, т.е. подграф содержит некоторые вершины исходного графа и некоторые ребра (только те, оба конца которых входят в подграф).

Подграф, порожденный множеством вершин V это подграф, множество вершин которого - V , содержащий те и только те ребра, оба конца которых входят в V .

Подграф называется **остовным подграфом**, если множество его вершин совпадает с множеством вершин самого графа.



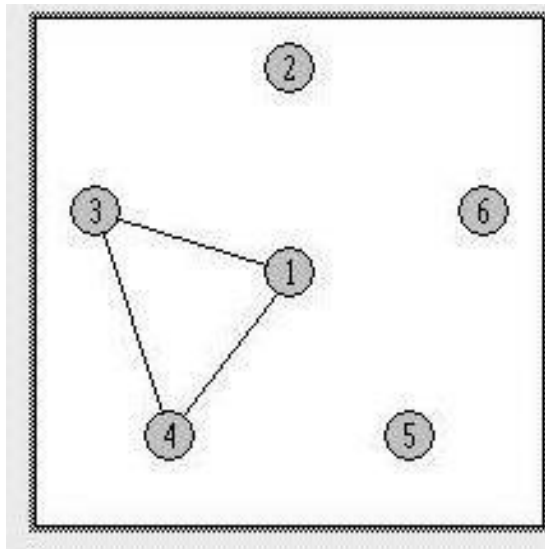
Виды подграфов: а – исходный граф; б – подграфы; в – остовные подграфы; г – порожденные подграфы

Задание неориентированного графа с помощью матриц

Матрица инциденций. Это матрица A с n строками, соответствующими вершинам, и m столбцами, соответствующими рёбрам. Если граф неориентированный, то ненулевое значение в ячейке матрицы указывает связь между вершиной и ребром (их инцидентность).

Матрица смежности. Это матрица $n \times n$ где n - число вершин, где $b_{ij} = 1$, если существует ребро, идущее из вершины x в вершину y , и $b_{ij} = 0$ в противном случае.

Матрицы инцидентности и смежности для следующего графа :



Матрица смежности

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0
4	1	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

Матрица инцидентности

	1	2	3
1	1	1	0
2	0	0	0
3	1	0	1
4	0	1	1
5	0	0	0
6	0	0	0

Задание ориентированного графа с помощью матриц

Каждый элемент матрицы смежности определяется следующим образом:

$a_{ij} = 1$, если существует дуга (x_i, x_j) ,

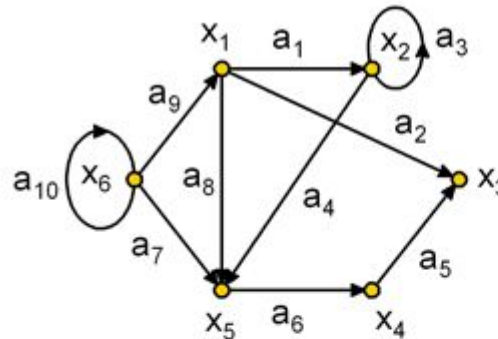
$a_{ij} = 0$, если нет дуги (x_i, x_j) .

Каждый элемент матрицы инцидентности определяется следующим образом:

$b_{ij} = 1$, если x_i является начальной вершиной дуги a_j ,

$b_{ij} = -1$, если x_i является конечной вершиной дуги a_j ,

$b_{ij} = 0$, если x_i не является концевой вершиной дуги a_j или если a_j является петлей.



а

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	1	0
x_2	0	1	0	0	1	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	0
x_6	1	0	0	0	1	1

б

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0
x_2	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	-1	0	1	-1	-1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

в

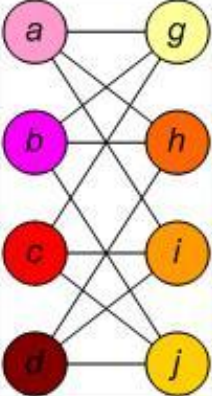
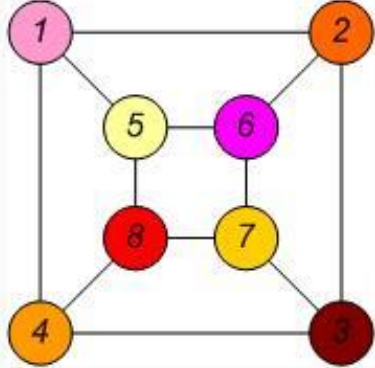
Орграф и его матричное представление: а – орграф; б – матрица смежности; в – матрица инцидентий

Изоморфизм графов

Два графа $G=(V_1, E_1)$, $H=(V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует соответствие между вершинами графа G и вершинами графа H , сохраняющее отношение смежности.

Изоморфные графы отличаются только метками вершин.

Любой неориентированный граф превращается в орграф заменой каждого ребра двумя противоположно направленными ребрами. Два полученные таким образом орграфа, очевидно, изоморфны тогда и только тогда, если изоморфны исходные графы.

Граф G	Граф H	Изоморфизм между графами G и H
		$\begin{aligned} f(a) &= 1 \\ f(b) &= 6 \\ f(c) &= 8 \\ f(d) &= 3 \\ f(g) &= 5 \\ f(h) &= 2 \\ f(i) &= 4 \\ f(j) &= 7 \end{aligned}$

Маршруты, цепи, циклы связного графа

Путем в орграфе называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, кроме последней, является начальной вершиной следующей дуги.

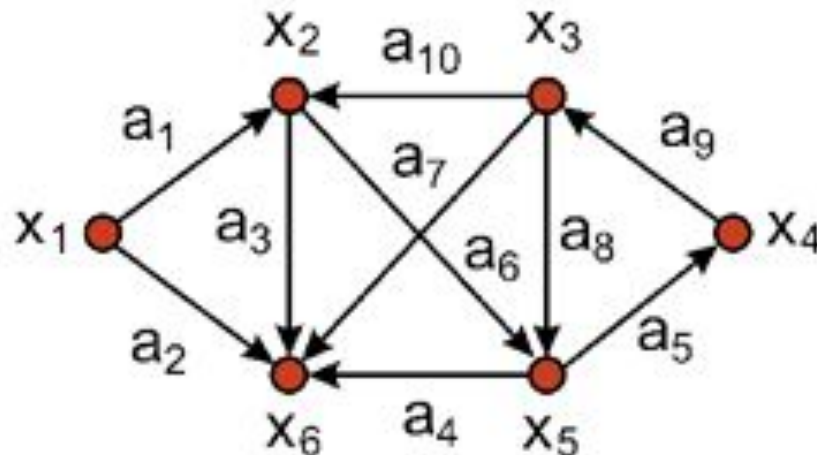
Вершины x_0 , x_n называются связанными данным путем (или просто **связанными**). Вершину x_0 называют началом, x_n - концом пути. Если $x_0 = x_n$, то путь называют **замкнутым**. Число n называется **длиной** пути.

Например, для графа на рисунке последовательности дуг

M_1 : a_1, a_6, a_5, a_9, a_7 , где x_1 – начало пути, x_6 – конец пути.

M_2 : $a_1, a_6, a_5, a_9, a_{10}, a_6, a_4$

являются путями. Пути могут быть различными.



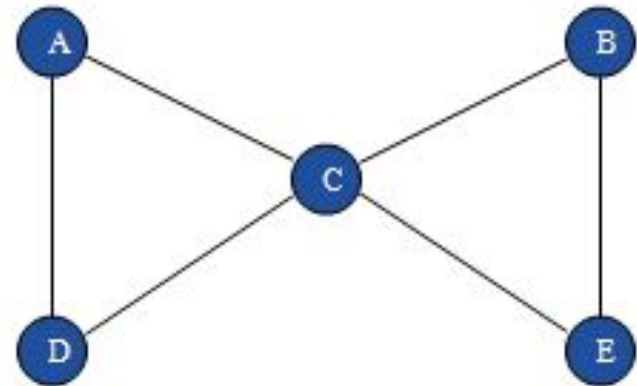
Маршрут в графе это путь, ориентацией дуг которого можно пренебречь.

Цепь - маршрут, в котором все ребра попарно различны.

Цикл - замкнутый маршрут, являющийся цепью.

Маршрут, в котором все вершины попарно различны, называют **простой цепью**. Цикл, в котором все вершины, кроме первой и последней, попарно различны, называются **простым циклом**.

Граф называется **связным**, если в нем для любых двух вершин имеется маршрут, соединяющий эти вершины.



A, C, A, D – маршрут, но не цепь;

A, C, E, B, C, D – цепь, но не простая цепь;

A, D, C, B, E, - простая цепь;

A, C, E, B, C, D, A – цикл, но не простой цикл;

A, C, D – простой цикл;

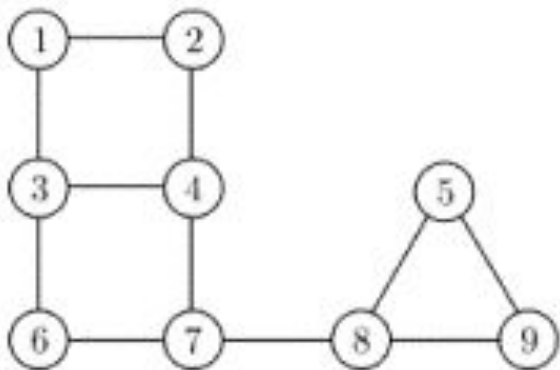
Метрические характеристики графов

Расстоянием между двумя вершинами графа называется наименьшая длина пути, соединяющего эти вершины.

Расстояние от данной вершины X до наиболее удаленной от нее вершины называется **эксцентриситетом** вершины X .

Вершину с наименьшим эксцентриситетом называют **центральной**, а вершину с наибольшим эксцентриситетом - **периферийной**. Множество всех центральных вершин называется **центром** графа. Сама величина наименьшего эксцентриситета называется **радиусом** графа, а величина наибольшего - **диаметром**.

Если расстояние между двумя вершинами равно диаметру графа, то кратчайший путь, соединяющий эти вершины, называется **диаметральным путем**, а подграф, образованный вершинами и ребрами этого пути, - **диаметральной цепью**.



Для графа, изображенного на рисунке, эксцентриситеты вершин приведены в следующей таблице:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(x)	5	4	4	3	5	3	3	4	5

Центр этого графа составляют вершины 4, 6, 7; периферийные вершины - 1, 5 и 9; радиус его равен 3, а диаметр 5. Одна из диаметральных цепей порождается множеством вершин $\{1, 3, 6, 7, 8, 9\}$.

Эйлеровы графы

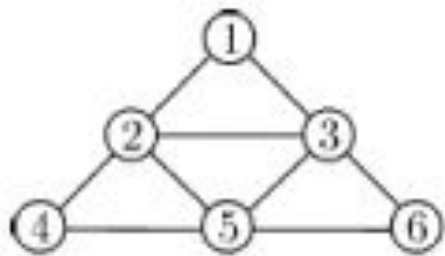
Эйлеров путь - путь, проходящий через все ребра графа (путь, по определению, не может дважды проходить по одному ребру).

Если эйлеров путь замкнут, то он является **эйлеровым циклом**.

Граф, содержащий эйлеров цикл, называется **эйлеровым графом**.

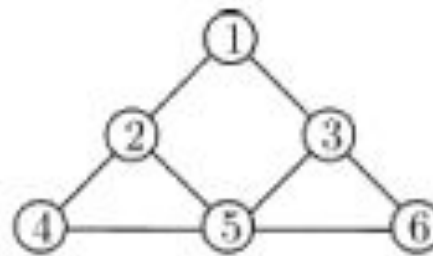
Согласно теореме, доказанной Эйлером, эйлеров цикл существует тогда и только тогда, когда граф связный и в нём отсутствуют вершины нечётной степени.

Ориентированный граф содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда в вершину входит столько же ребер, сколько из неё и выходит.



a)

Эйлеров цикл : последовательность
вершин 1,2,4,5,2,3,5,6,3,1



b)

Эйлеров путь : последовательность
вершин 2,4,5,2,1,3,5,6,3

Гамильтоновы графы

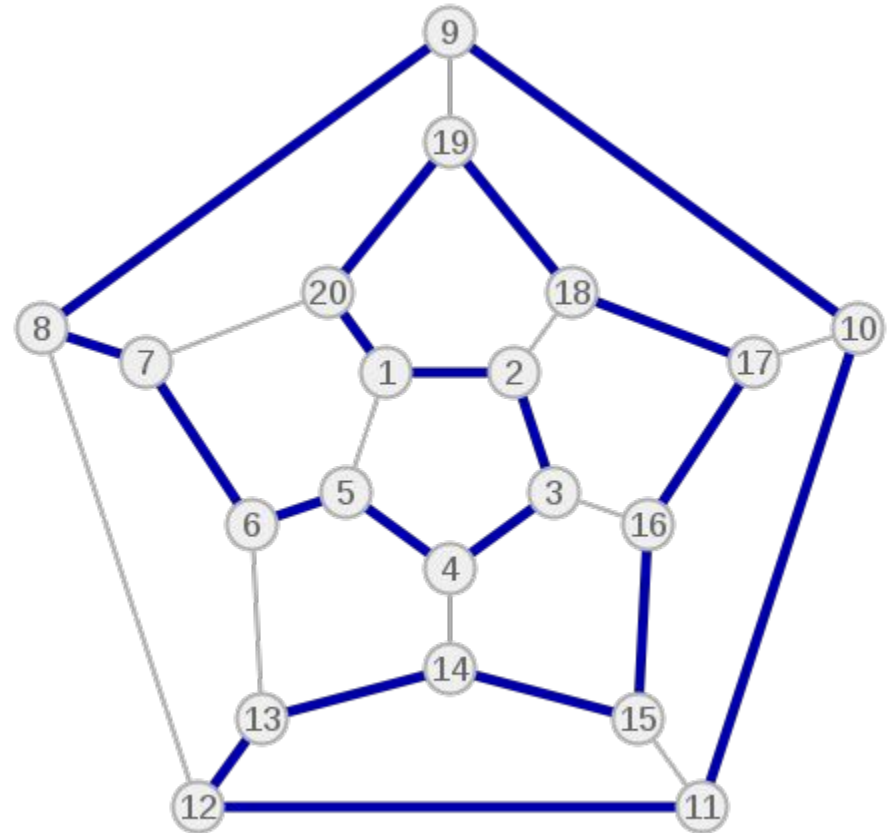
Гамильтонов граф — это граф, содержащий гамильтонов путь или гамильтонов цикл.

Гамильтонов путь — путь, содержащий каждую вершину графа ровно один раз.

Гамильтонов путь, начальная и конечная вершины которого совпадают, называется **гамильтоновым циклом**.

Условие Дирака

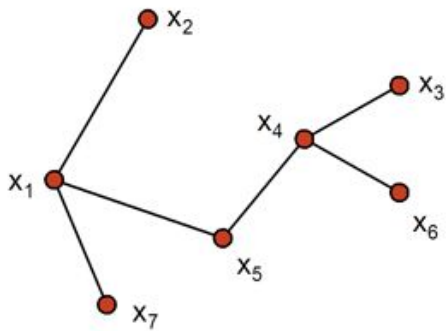
Пусть p — число вершин в данном графе; если степень каждой вершины не меньше $p/2$, чем $p/2$, то граф называется **графом Дирака**. Граф Дирака — гамильтонов.



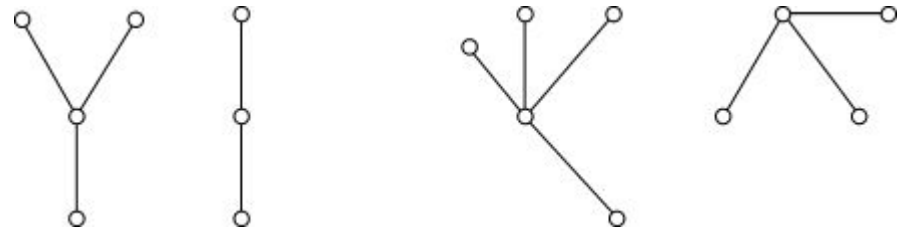
Граф с выделенным циклом Гамильтона

Лес и деревья

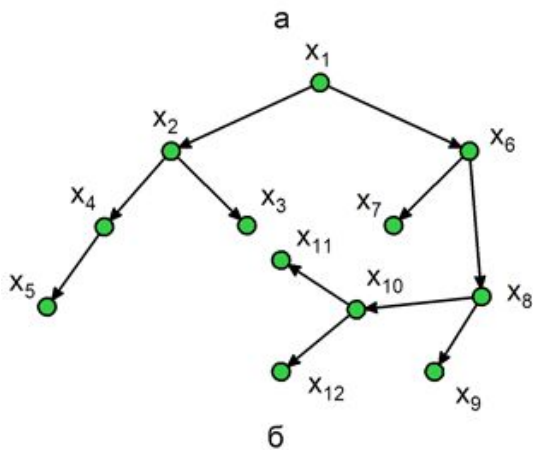
Связный граф, не имеющий циклов, либо граф, в котором каждая пара вершин соединена одной и только одной простой цепью, называется **деревом**.



Лесом называется несвязный граф, представляющий объединение деревьев



Лес, состоящий из четырех компонент, каждая из которых является деревом.



а - неориентированное дерево
б - ориентированное дерево

Цикломатическое число графа

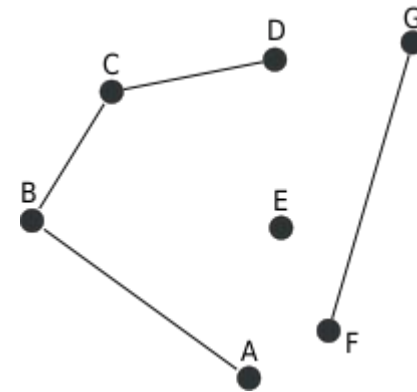
Пусть в графе m - число ребер, n - число вершин, p - число **компонент связности**.

Компонента связности — некоторое множество вершин графа такое, что для любых двух вершин из этого множества существует путь из одной в другую, и не существует пути из вершины этого множества в вершину не из этого множества.

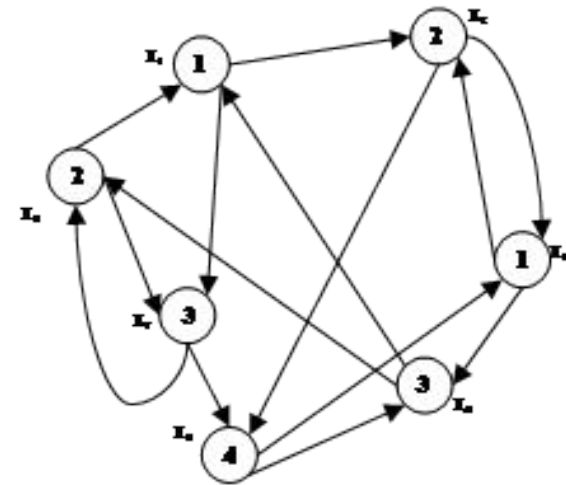
Цикломатическим числом графа называют число $\mu = m - n + p$.

Цикломатическое число графа указывает то наименьшее число рёбер, которое нужно удалить из данного графа, чтобы получить дерево (для связного графа) или лес (для несвязного графа), т. е. добиться отсутствия у графа циклов.

Цикломатическое число всегда неотрицательно.



Несвязный граф с тремя компонентами связности

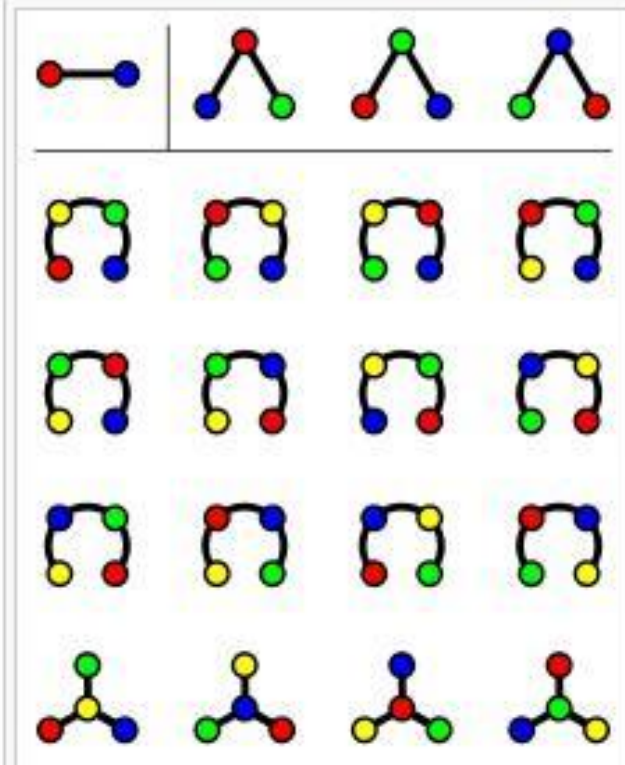


Цикломатическое число графа $V = 14 - 7 + 1 = 8$

Деревья с пронумерованными вершинами

Дерево, все n вершин которого имеют номера от 1 до n , называют **деревом с пронумерованными вершинами**.

Теорема Кэли о числе деревьев — на n вершинах, пронумерованных числами от 1 до n , существует ровно n^{n-2} различных деревьев.



Полный список деревьев на 2, 3 и 4 пронумерованных вершинах:

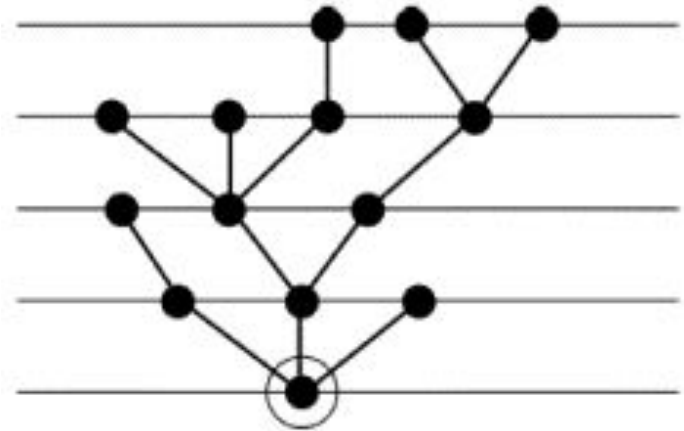
$2^{2-2} = 1$ дерево с 2 вершинами,
 $3^{3-2} = 3$ дерева с 3 вершинами и
 $4^{4-2} = 16$ деревьев с 4 вершинами.

Корневые деревья

Часто в дереве особо выделяется одна вершина, играющая роль своего рода "начала отсчета".

Дерево с выделенной вершиной называют **корневым деревом**, а саму эту вершину - **корнем**. Из дерева с вершинами можно, таким образом, образовать различных корневых деревьев.

При графическом изображении корневого дерева обычно придерживаются какого-нибудь стандарта. Один из наиболее распространенных состоит в следующем. Возьмем на плоскости семейство параллельных прямых с равными расстояниями между соседними прямыми. Изобразим корень точкой на одной из этих прямых, смежные с корнем вершины - точками на соседней прямой, вершины, находящиеся на расстоянии 2 от корня, - на следующей, и т.д. Ребра изобразим отрезками прямых. Ясно, что вершины на каждой прямой можно разместить так, чтобы ребра не пересекались.

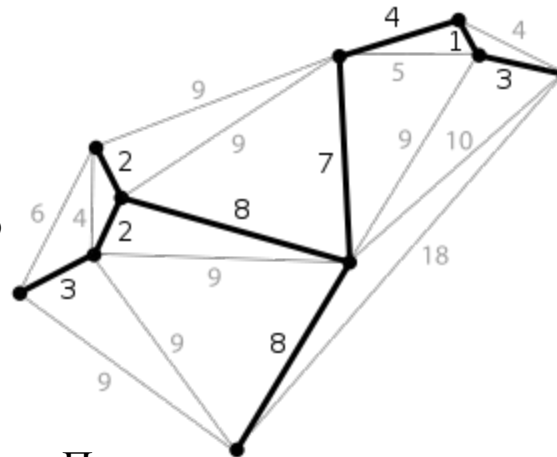


Пример корневого дерева

Остовное дерево

Остовное дерево состоит из некоторого подмножества рёбер графа, таких, что из любой вершины графа можно попасть в любую другую вершину, двигаясь по этим рёбрами, и в нём нет циклов, то есть из любой вершины нельзя попасть в саму себя, не пройдя какое-то ребро дважды.

Минимальное остовное дерево в связанном, взвешенном, неориентированном графе — это остовное дерево этого графа, имеющее минимальный возможный вес, где под **весом дерева** понимается сумма весов входящих в него рёбер.

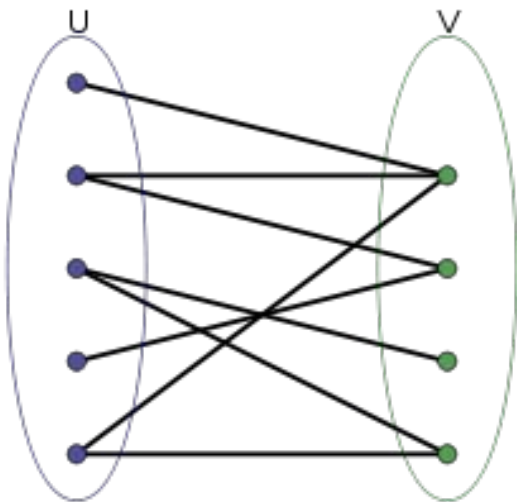


Пример минимального остовного дерева в графе. Числа на ребрах обозначают вес ребер.

Двудольный граф

Двудольный граф или **биграф** — это граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет какую-то вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части.

Для того, чтобы проверить граф на предмет двудольности, достаточно в каждой компоненте связности выбрать любую вершину и пометить оставшиеся вершины во время обхода графа поочередно как чётные и нечётные. Если при этом не возникнет конфликта, все чётные вершины образуют множество U , а все нечётные — V .



Двудольный граф



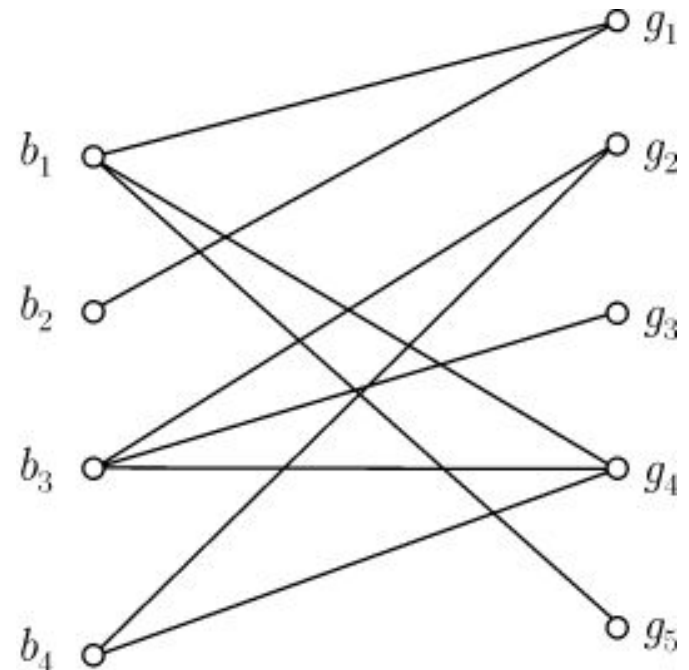
Проверка двудольности с помощью чётности расстояний

Паросочетания

Паросочетанием в двудольном графе называется любое множество попарно несмежных ребер (у них нет общих вершин).

Максимальное паросочетание — это такое паросочетание, которое не содержится ни в каком другом паросочетании этого графа.

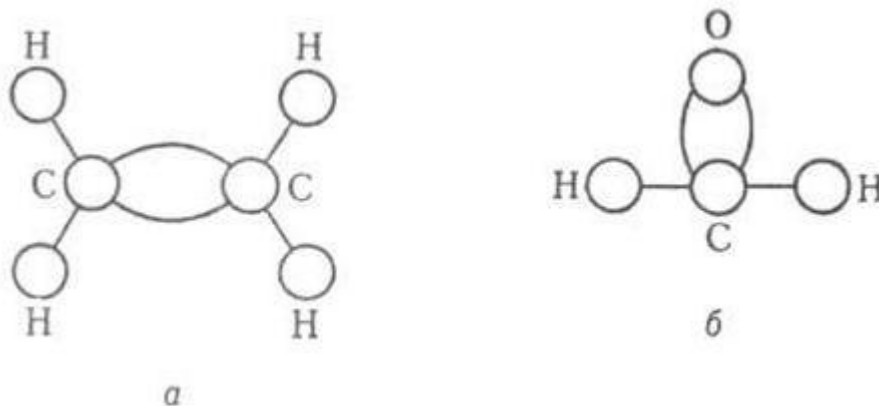
Наибольшее паросочетание — это такое паросочетание, которое содержит максимальное количество ребер.



Пример паросочетания

Применение графов

1. В информатике и программировании (граф-схема алгоритма)
2. В коммуникационных и транспортных системах. В частности, для маршрутизации данных в Интернете.
3. В экономике
4. В логистике
5. В схемотехнике (топология межсоединений элементов на печатной плате или микросхеме представляет собой граф или гиперграф)
6. В химии (для описания структур, путей сложных реакций, правило фаз также может быть интерпретировано как задача теории графов); компьютерная химия — сравнительно молодая область химии, основанная на применении теории графов. Теория графов позволяет точно определить число теоретически возможных изомеров у углеводородов и других органических соединений.



а, б - мультиграфы этилена и формальдегида