

Нечипоренко А.В., к. филос. н.,

Новосибирск, 2014

И. Лакатос

Доказательства и
опровержения

Формула Эйлера

$$V - E + F = 2$$

для V вершин, E ребер, F граней многогранника

	Многогранники	F	V	E
1.	Куб	6	8	12
2.	Треугольная призма	5	6	9
3.	Пятиугольная призма	7	10	15
4.	Четырехугольная пирамида	5	5	8
5.	Треугольная пирамида	4	4	6
6.	Пятиугольная пирамида	6	6	10
7.	Октаэдр	8	8	12
8.	«Башня»	9	9	16
9.	Усеченный куб	7	10	15

Доказательство теоремы

- **Первый шаг.** Вообразим, что многогранник будет полым с поверхностью из резины. Если мы вырежем одну из его граней, то всю остальную поверхность мы можем, не разрезая, растянуть на плоской доске. Грани и ребра будут деформироваться, ребра могут стать криволинейными, но V , E и F не изменятся, так что если и только если $V - E + F = 2$ для первоначального многогранника, то $V - E + F = 1$ для этой плоской сети — вспомните, что мы одну грань удалили. (На рис. 1 показана такая сеть для куба.)

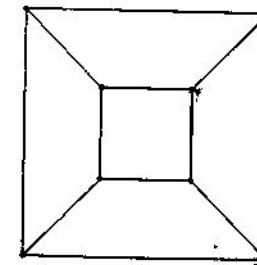


Рис. 1

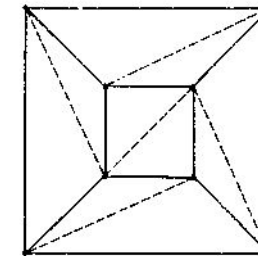
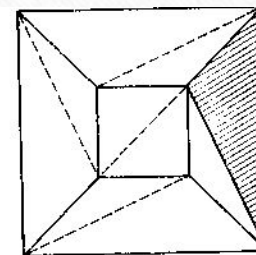
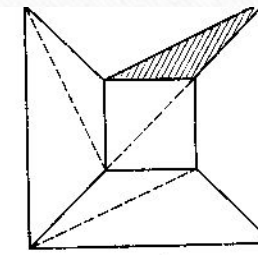


Рис. 2

- **Второй шаг.** Теперь мы триангулируем нашу карту — она действительно выглядит как географическая карта. Проведем (может быть, криволинейные) диагонали в тех (может быть, криволинейных) многоугольниках, которые еще не являются (может быть, криволинейными) треугольниками. Проведем каждую диагональ, мы увеличиваем и E и F на единицу, так что сумма $V - E + F$ не изменится (рис. 2).



а



б

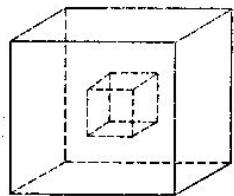
- **Третий шаг.** Теперь будем вынимать из триангулированной сети треугольники один за другим. Вынимая треугольник, мы или вынимаем ребро, причем исчезают одна грань и одно ребро (рис. 3, а), или вынимаем два ребра и вершину; тогда исчезают одна грань, два ребра и одна вершина (рис. 3, б). Таким образом, если $V - E + F = 1$ до выемки треугольника, то оно останется таким же и после выемки. В конце этой процедуры мы получаем один треугольник. Для него $V - E + F = 1$ является справедливым. Таким образом, мы доказали нашу догадку.

Примеры и контрпримеры

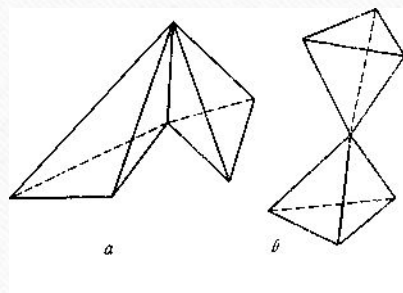
Для каждого куба $V - E + F = 2$,

так что для полого куба

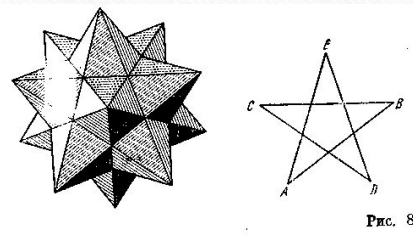
$$F - E + F = 4$$



В обоих случаях $V - E + F = 3$



$$V - E + F = -6$$



Определение 1. Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из многоугольников — граней.

Определение 2. Многогранник есть поверхность, состоящая из системы многоугольников.

Определение 3. Под многогранником подразумевается система многоугольников, расположенных таким образом, чтобы (1) на каждом ребре встречались только два многоугольника и (2) чтобы было возможно изнутри одного многоугольника пройти во внутрь другого любой дорогой, которая никогда не пересекает ребра в вершине.

Определение 4. Многоугольником называется система ребер, расположенных таким образом, что (1) в каждой вершине встречаются только два ребра и (2) ребра не имеют общих точек, кроме вершин.

Определение 4'. Многоугольником называется система ребер, расположенных таким образом, что (1) в каждой вершине встречаются только два ребра.

Примеры и контрпримеры

$$V - E + F = 0$$

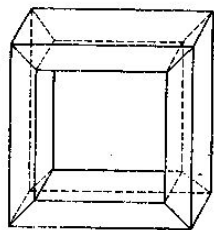


Рис. 9

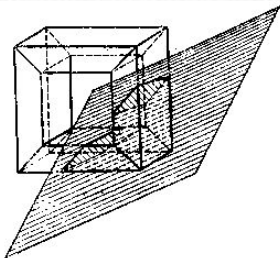
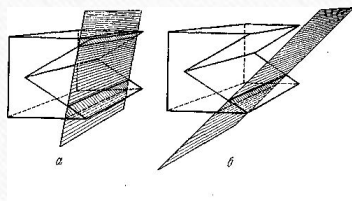


Рис. 10



$$16 - 24 + 11 = 3$$

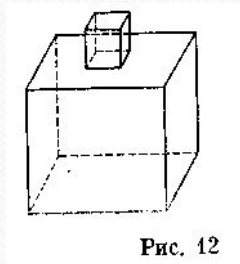


Рис. 12

Эта картинная рама совсем не настоящий многогранник. Возьмите какую-нибудь точку в «туннеле» — пространстве, ограниченном рамой. Проведите плоскость через эту точку. Вы найдете, что всякая такая плоскость будет всегда с картинной рамой иметь ~~два поперечных сечения, составляющих два~~ отдельных, совершенно не связанных многоугольника! (рис. 10).

Определение 5. В случае настоящего многогранника через любую точку пространства можно провести по крайней мере одну плоскость, сечение которой с многогранником будет состоять из одного лишь многоугольника.

Примеры и контрпримеры

$$V - E + F = 2$$

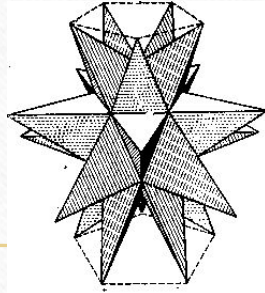


Рис. 15.

$$V - E + F = 2$$

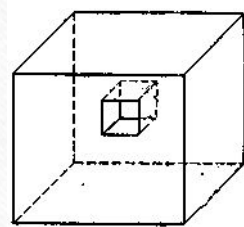
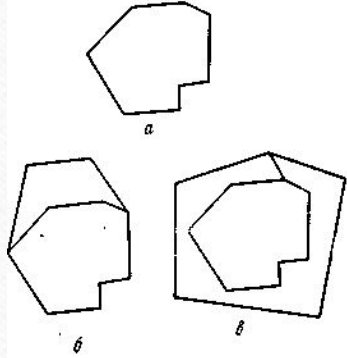


Рис. 16

«Квазигенетическое доказательство»

Для многоугольников $V = E$. Теперь многоугольник есть система многоугольников, состоящая из одного единственного многоугольника. Многогранник есть система многоугольников, состоящих более чем из одного многоугольника. Но для многогранников $V \neq E$. В каком пункте отношение $V=E$ отказалось служить при переходе от монополигональных систем к полиполигональным?



Закрытие может быть произведено, если мы такую сосудообразную систему покроем многоугольником — крышкой; прикрепление такого покрывающего многоугольника увеличит F на единицу без изменения V или E

Для всякого многоугольника $E - V = 0$ (рис. 17, а). Что случится, если я прикреплю к нему другой многоугольник (необязательно в той же плоскости)? Добавляемый многоугольник имеет n_1 сторон и n_1 вершин; если мы прикрепим его к первоначальному по цепочке из n_1' ребер и $n_1' + 1$ вершин, то мы увеличим число ребер на $n_1 - n_1'$, а число вершин на $n_1 - (n_1' + 1)$; значит, в новой 2-полигональной системе получится избыток в числе ребер над числом вершин: $E - V = 1$ (рис. 17,б); необычное, но совершенно допустимое прикрепление мы видим на рис. 17, в. «Прикрепление» новой грани к системе будет всегда увеличивать этот избыток на единицу; следовательно, для построенной таким образом F -полигональной системы будет всегда $E - V = F - 1$.

Для закрытой полигональной системы — и закрытого многогранника, — построенной таким образом, $V - E + F = 2$

Для треугольника $V - E = 0$.

Для одного ребра $V - E = 1$ (рис. 18,а).

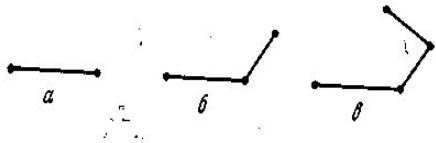


Рис. 18

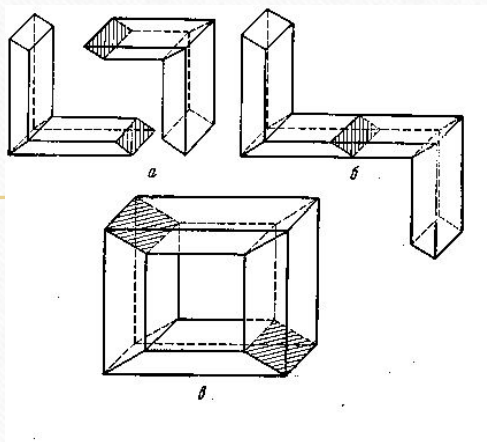
Рис. 19

Присоединение новых ребер всегда увеличивает на единицу и число ребер и число вершин (рис. 18,б и 18,в).

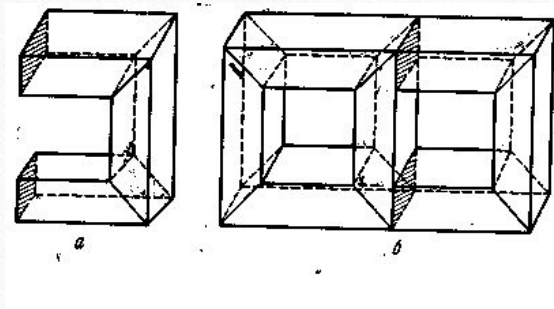
Почему же тогда в полигональных системах ребер будет $V - E = 0$? Это получается вследствие перехода от открытой системы ребер (которая ограничивается двумя вершинами) к закрытой системе ребер (которая не имеет такой границы), так как мы «закрываем» открытую систему, вставляя ребро без добавления новой вершины. Таким образом, доказывается, но не наблюдается, что для многоугольников будет $V - E = 0$.

Для одной вершины $V = 1$ (рис. 19).

Новые примеры и теоретическое описание



$$V - E + F = 2 - 2(n - 1) \sum_{k=1}^F l_k$$



$$V - E + F = \sum_{j=1}^k \left\{ 2 - 2(n - 1) + \sum_{k=1}^F l_k \right\}$$

Методологические замечания

- дедуктивная догадка является самой лучшей, но наивная догадка лучше, чем отсутствие всякой догадки. Но наивная догадка - не индукция; такие вещи, как индуктивные догадки, не существуют!
- наивные догадки не являются индуктивными догадками; мы приходим к ним путем испытаний и ошибок, через предположения и опровержения.
- математическая эвристика очень похожа на научную эвристику — не потому, что обе являются индуктивными, но потому, что обе характеризуются догадками, доказательствами и опровержениями.