Нечипоренко А.В., к. филос. н.,

Новосибирск, 2014

И. Лакатос

Доказательства и опровержения

Формула Эйлера

$$V-E+F = 2$$

для V вершин, E ребер, F граней многогранника

	Многогранники	**F**	**V**	**E**
1.	Куб	6	8	12
2.	Треугольная призма	5	6	9
3.	Пятиугольная призма	7	10	15
4.	Четырехугольная пирамида	5	5	8
5.	Треугольная пирамида	4	4	6
6.	Пятиугольная пирамида	6	6	10
7.	Октаэдр	8	8	12
8.	«Башня»	9	9	16
9.	Усеченный куб	7	10	15

Доказательство теоремы

- **Первый шаг**. Вообразим, что многогранник будет полым с поверхностью из резины. Если мы вырежем одну из его граней, то всю остальную поверхность мы можем, не разрезая, растянуть на плоской доске. Грани и ребра будут деформироваться, ребра могут стать криволинейными, но V, E и F не изменятся, так что если и только если V — E + F = 2 для первоначального многогранника, то V — E + F — 1 для этой плоской сети — вспомните, что мы одну грань удалили. (На рис. 1 показана такая сеть для куба.)

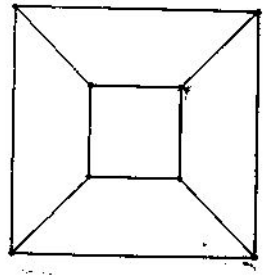


Рис. 1

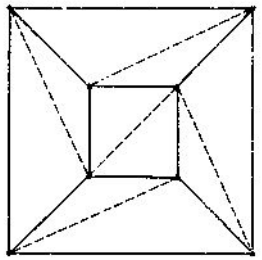
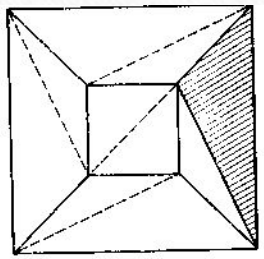
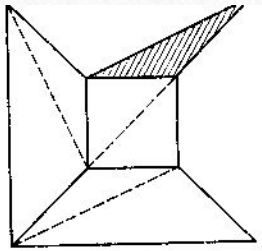


Рис. 2

- **Второй шаг**. Теперь мы стриангулируем нашу карту — она действительно выглядит как географическая карта. Проведем (может быть, криволинейные) диагонали в тех (может быть, криволинейных) многоугольниках, которые еще не являются (может быть, криволинейными) треугольниками. Проведя каждую диагональ, мы увеличиваем и E и F на единицу, так что сумма V — E + F не изменится (рис. 2).



а



б

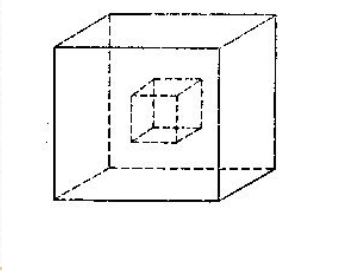
- **Третий шаг.** Теперь будем вынимать из триангулированной сети треугольники один за другим. Вынимая треугольник, мы или вынимаем ребро, причем исчезают одна грань и одно ребро (рис. 3, а), или вынимаем два ребра и вершину; тогда исчезают одна грань, два ребра и одна вершина (рис. 3, б). Таким образом, если V — E + F = 1 до выемки треугольника, то оно останется таким же и после выемки. В конце этой процедуры мы получаем один треугольник. Для него V — E + F = 1 является справедливым. Таким образом, мы доказали нашу догадку.

Примеры и контрпримеры

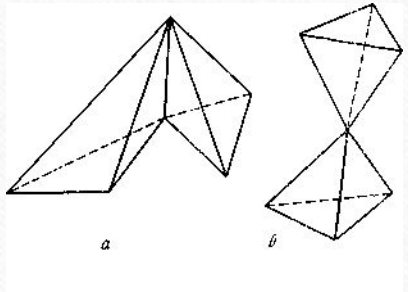
Для каждого куба V — E + F = 2,

так что для полого куба

F — E + F = 4



В обоих случаях V — E + F = 3



V — E + F = —6

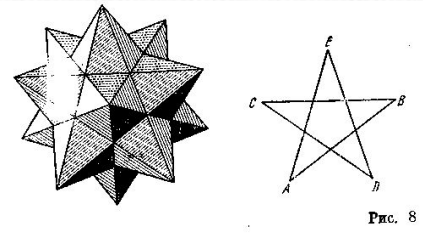


Рис. 8

Определение 1. Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из многоугольников — граней.

Определение 2. Многогранник есть поверхность, состоящая из системы многоугольников.

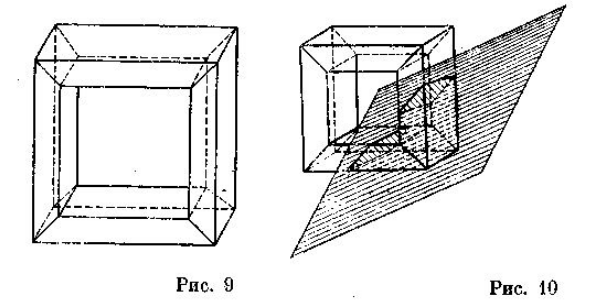
Определение 3. Под многогранником подразумевается система многоугольников, расположенных таким образом, чтобы (1) на каждом ребре встречались только два многоугольника и (2) чтобы было возможно изнутри одного многоугольника пройти во внутрь другого любой дорогой, которая никогда не пересекает ребра в вершине.

Определение 4. Многоугольником называется система ребер, расположенных таким образом, что (1) в каждой вершине встречаются только два ребра и (2) ребра не имеют общих точек, кроме вершин.

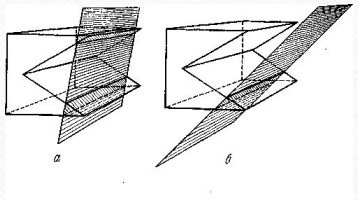
Определение 4‘. Многоугольником называется система ребер, расположенных таким образом, что (1) в каждой вершине встречаются только два ребра.

Примеры и контрпримеры

$V - E + F = 0$

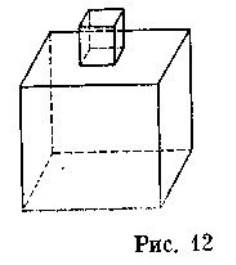


Эта картинная рама совсем не настоящий многогранник. Возьмите какую-нибудь точку в «туннеле» — пространстве, ограниченном рамой. Проведите плоскость через эту точку. Вы найдете, что всякая такая плоскость будет всегда с картинной рамой иметь **два** поперечных сечения, составляющих два отдельных, совершенно не связанных многоугольника! (рис. 10).



Определение 5. В случае настоящего многогранника через любую точку пространства можно провести по крайней мере одну плоскость, сечение которой с многогранником будет состоять из одного лишь многоугольника.

$16 - 24 + 11 = 3$



Примеры и контрпримеры

$V - E + F = 2$

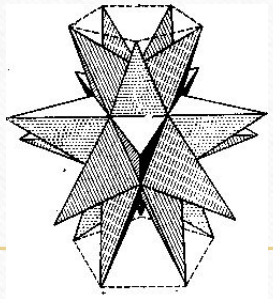


Рис. 15

$V - E + F = 2$

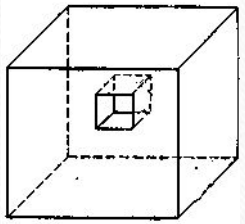
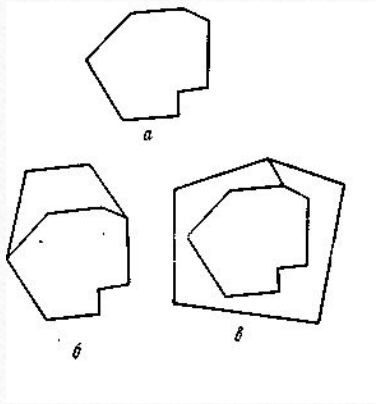


Рис. 16

«Квазигенетическое доказательство»



Для многоугольников V = E. Теперь многоугольник есть система многоугольников, состоящая из одного единственного многоугольника. Многогранник есть система многоугольников, состоящих более чем из одного многоугольника. Но для многогранников V≠E. В каком пункте отношение V=E отказалось служить при переходе от монополигональных систем к полиполигональным?

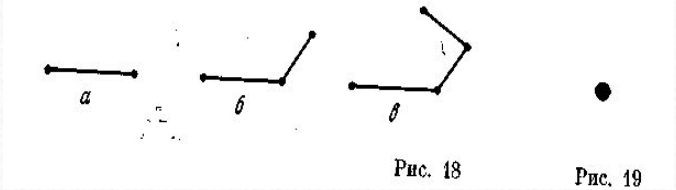
Закрытие может быть произведено, если мы такую сосудообразную систему покроем многоугольником — крышкой; прикрепление такого покрывающего многоугольника увеличит F на единицу без измене ния V или E

Для всякого многоугольника E—V = 0 (рис. 17, а). Что случится, если я прикреплю к нему другой многоугольник (необязательно в той же плоскости)? Добавляемый многоугольник имеет n_1 сторон и n_1 вершин; если мы прикрепим его к первоначальному по цепочке из n_1' ребер и $n_1'+1$ вершин, то мы увеличим число ребер на $n_1 — n_1'$, а число вершин на $n_1 — (n_1' + 1)$; значит, в новой 2-полигональной системе получится избыток в числе ребер над числом вершин: E — V = 1 (рис. 17,6); необычное, но совершенно допустимое прикрепление мы видим на рис. 17, в. «Прикрепление» новой грани к системе будет всегда увеличивать этот избыток на единицу; следовательно, для построенной таким образом F-полигональной системы будет всегда E—V=F—1.

Для закрытой полигональной системы — и закрытого многогранника,— построенной таким образом, V—E+F=2

Для треугольника V—E=0.

Для одного ребра V — E = 1 (рис. 18,а).

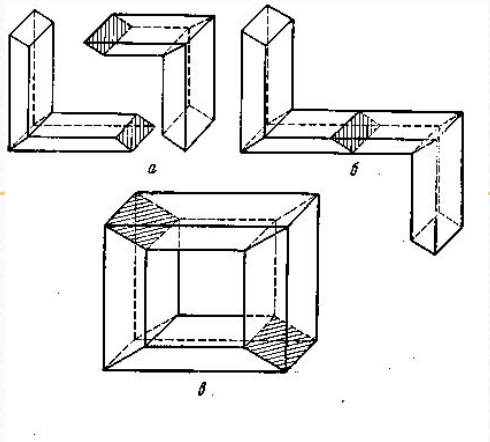


Присоединение новых ребер всегда увеличивает на единицу и число ребер и число вершин (рис. 18,6 и 18,в).

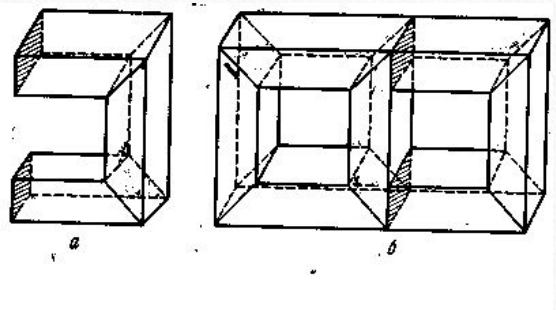
Почему же тогда в полигональных системах ребер будет V — E = 0? Это получается вследствие перехода от открытой системы ребер (которая ограничивается двумя вершинами) к закрытой системе ребер (которая не имеет такой границы), так как мы «закрываем» открытую систему, вставляя ребро без добавления новой вершины. Таким образом, доказывается, но не наблюдается, что для многоугольников будет V—E = 0.

Для одной вершины V = 1 (рис. 19).

Новые примеры и теоретическое описание



$$V - E + F = 2 - 2(n-1)\sum_{k=1}^{F} l_k$$



$$V - E + F = \sum_{j=1}^{k}\left\{2 - 2(n-1) + \sum_{k=1}^{F} l_k\right\}$$

Методологические замечания

- **дедуктивная догадка** является самой лучшей, но **наивная догадка** лучше, чем отсутствие всякой догадки. Но **наивная догадка - не ин дукция; такие вещи, как индуктивные догадки, не существуют**!
- **наивные догадки не являются индуктивными догадками; мы приходим к ним путем испытаний и ошибок, через предположения и опровержения.**
- **математическая эвристика очень похожа на научную эвристику — не потому, что обе являются индуктивными, но потому, что обе характеризуются догадками, доказательствами и опровержениями.**