

Идеальный газ. МКТ.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Законы идеальных газов

1.1. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева)

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

1.2. Закон

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n,$$

Дальтона

1.3. Молярная масса M смеси газов

$$M = (m_1 + m_2 + \dots + m_k) / (v_1 + v_2 + \dots + v_k),$$

2. Молекулярно-кинетическая теория газов (МКТ)

2.1. Количество вещества ν

$$\nu = m/M = N/N_A,$$

2.2. Молярная масса вещества M

$$M = m/\nu.$$

2.3. Масса одной молекулы вещества

$$m_0 = M/N_A.$$

2.4. Количество вещества смеси

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_k = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots + \frac{m_k}{M_k},$$

2.5. Концентрация частиц n однородной системы

$$n = \frac{N}{V} = \rho \frac{N_A}{M},$$

2.6. Основное уравнение кинетической теории газов

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{ном}} \rangle, \langle \varepsilon_{\text{ном}} \rangle = \frac{3}{2} kT$$

2.7. Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы молекулы

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

2.8. Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на все возбужденные степени свободы молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

2.9. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

2.10. Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$P = nkT.$$

2.11. Молярная C и удельная c теплоемкости газа связаны между собой соотношением

2.12. Молярные теплоемкости C газа при постоянном объеме и постоянном давлении равны соответственно

$$C_v = iR/2; C_p = (i+2)R/2,$$

2.13. Удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{M}; \quad c_p = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{M}.$$

2.14. Уравнение Майера для молярных теплоемкостей

$$C_p - C_v = R.$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Давление 1 мм рт. ст.=133 Па.

Давление 1 атм=760 мм рт. ст.

Молярная масса воздуха $\mu=29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Нормальные условия: $P=1,01 \cdot 10^5$ Па, $T=273$ К.

Постоянная Больцмана $k=1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Универсальная газовая постоянная $R=8,31$ Дж/(моль · К).

Число Авогадро $N_A=6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

A1. Чему равна плотность ρ воздуха в сосуде, если сосуд откачан до наивысшего разрежения, создаваемого современными методами ($P = 10^{-11}$ мм рт. ст.)? Температура воздуха равна 15°C . Молярная масса воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Дано:
 $P = 10^{-11}$ мм рт. ст.
 $T = 15^{\circ}\text{C}$
 $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
 $\rho - ?$

Решение

A1. Чему равна плотность ρ воздуха в сосуде, если сосуд откачан до наивысшего разрежения, создаваемого современными методами ($P = 10^{-11}$ мм рт. ст.)? Температура воздуха равна 15°C . Молярная масса воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Дано:
 $P = 10^{-11}$ мм рт. ст.
 $T = 15^{\circ}\text{C}$
 $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
 $\rho - ?$

Решение

Для определения плотности газа применим уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона)

$$PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Согласно определению
плотность

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Разделим левую и правую части уравнения состояния идеального газа на V .

$$P = \frac{m}{V} \frac{RT}{\mu} = \rho \frac{RT}{\mu}.$$

Отсюда
плотность

$$\rho = \frac{\mu P}{RT}.$$

$$\rho = \frac{\mu P}{RT} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 133 \cdot 10^{-11}}{8,31 \cdot 288} \approx 1,6 \cdot 10^{-14} \frac{\hat{e}\tilde{a}}{\hat{i}^3}.$$

Ответ: $\rho = 1,6 \cdot 10^{-14}$ кг/м³.

A2. Масса $m = 12$ г газа занимают объем $V = 4 \cdot 10^{-3}$ м³ при температуре $t = 7^{\circ}\text{C}$. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $\rho = 6 \cdot 10^{-4}$ г/см³. До какой температуры нагрели газ?

Дано:

$$m = 12 \text{ г}$$

$$V = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$T = 7^{\circ}\text{C}$$

$$\underline{\rho = 6 \cdot 10^{-4}}$$

$$\underline{\text{г/см}^3}$$

$$T - ?$$

Решение

A2. Масса $m = 12$ г газа занимают объем $V = 4 \cdot 10^{-3}$ м³ при температуре $t = 7^{\circ}\text{C}$. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $\rho = 6 \cdot 10^{-4}$ г/см³. До какой температуры нагрели газ?

Дано:

$$m = 12 \text{ г}$$

$$V = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$T = 7^{\circ}\text{C}$$

$$\rho = 6 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{г/см}^3$$

$$T - ?$$

Решение

Для определения плотности газа применим уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона)

$$PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Согласно
плотность

определению

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Разделим левую и правую части уравнения состояния идеального газа на V .

$$P = \frac{m}{V} \frac{RT}{\mu} = \rho \frac{RT}{\mu}.$$

Отсюда
плотность

$$\rho = \frac{\mu P}{RT}.$$

При различных температурах, но при одинаковых давлениях плотность

A2. Масса $m = 12$ г газа занимают объем $V = 4 \cdot 10^{-3}$ м³ при температуре $t = 7^{\circ}\text{C}$. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $\rho = 6 \cdot 10^{-4}$ г/см³. До какой температуры нагрели газ?

Решение (продолжение)

$$\rho_1 = \frac{\mu P}{RT_1}, \quad \rho_2 = \frac{\mu P}{RT_2}.$$

Отсюда

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2}, \quad T_2 = T_1 \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Согласно определению плотности

$$\rho_1 = \frac{m}{V}.$$

$$T_2 = T_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} = T_1 \frac{m}{\rho_2 V}.$$

$$T_2 = T_1 \frac{m}{\rho_2 V} = 280 \frac{12 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-3}} \approx 1,4 \cdot 10^3 \text{ K}.$$

Ответ: $T = 1400^{\circ}\text{K}$.

A3. В сосуде находится $m_1 = 14$ г азота и $m_2 = 9$ г водорода при температуре $t = 10^0\text{C}$ и давлении $P = 1$ МПа. Найти: 1) молярную массу смеси, 2) объем сосуда.

Дано:

$$m_1 = 14 \text{ г } N_2$$

$$m_2 = 9 \text{ г } H_2$$

$$t = 10^0\text{C}$$

$$P = 1 \text{ МПа}$$

$$\mu - ?$$

$$V - ?$$

Решение

А3. В сосуде находится $m_1 = 14$ г азота и $m_2 = 9$ г водорода при температуре $t = 10^\circ\text{C}$ и давлении $P = 1$ МПа. Найти: 1) молярную массу смеси, 2) объем сосуда.

Дано:

$$m_1 = 14 \text{ г } \text{N}_2$$

$$m_2 = 9 \text{ г } \text{H}_2$$

$$t = 10^\circ\text{C}$$

$$P = 1 \text{ МПа}$$

$$\mu - ?$$

$$V - ?$$

Решение

Количество вещества смеси
$$V_c = \frac{m_c}{\mu_c}.$$

Молярную массу смеси найдём как
$$\mu_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{m_1 + m_2}{V_c}.$$

Количество молекул вещества можно представить, $N = \nu N_A.$

как
Количество молекул вещества азота, водорода и смеси

$$N_1 = \nu_1 N_A,$$

$$N_2 = \nu_2 N_A,$$

$$N_c = \nu_c N_A.$$

При смешивании газов общее число молекул равно сумме чисел молекул азота и водорода.

$$N_c = N_1 + N_2,$$

$$\nu_c N_A = \nu_1 N_A + \nu_2 N_A,$$

$$\nu_c = \nu_1 + \nu_2.$$

Количество вещества смеси равно сумме количеств вещества компонентов смеси.

A3. В сосуде находится $m_1 = 14$ г азота и $m_2 = 9$ г водорода при температуре $t = 10^0\text{C}$ и давлении $P = 1$ МПа. Найти: 1) молярную массу смеси, 2) объем сосуда.

Решение (продолжение)

$$\mu_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{m_1 + m_2}{V_c}, \quad V_c = V_1 + V_2.$$

$$\mu_c = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}.$$

$$\mu_c = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = \frac{14 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-3}}{\frac{14 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} + \frac{9 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}} = \frac{23}{0,5 + 4,5} \cdot 10^{-3} = 4,6 (\text{г/м}^3).$$

A3. В сосуде находится $m_1 = 14$ г азота и $m_2 = 9$ г водорода при температуре $t = 10^{\circ}\text{C}$ и давлении $P = 1$ МПа. Найти: 1) молярную массу смеси, 2) объем сосуда.

Решение (продолжение)

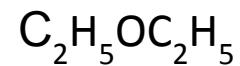
Объём сосуда найдём из уравнения состояния идеального газа (уравнения Менделеева-Клапейрона)

$$PV = \frac{m_{\tilde{n}}}{\mu_{\tilde{n}}} RT.$$
$$V = \frac{m_{\tilde{n}} RT}{\mu_{\tilde{n}} P} = \frac{(m_1 + m_2) RT}{\mu_{\tilde{n}} P}.$$

Ответ: $\mu = 4,6$ г/моль; $V = 11,8$ л .

A4. В закрытый сосуд, наполненный воздухом при нормальных условиях, вводится диэтиловый эфир ($C_2H_5OC_2H_5$). После того, как эфир испарился, давление в сосуде стало равно $P = 0,14$ МПа. Какое количество эфира было введено в сосуд? Объем сосуда $V = 2$ л. Атмосферное давление $P_0 = 100$ кПа. Температуру считать неизменной.

Дано:



$$V = 2 \text{ л}$$

$$T = 20^\circ\text{C}$$

$$P_0 = 100 \text{ кПа}$$

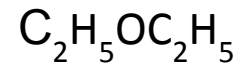
$$\underline{P = 140 \text{ кПа}}$$

$$m - ?$$

Решение

A4. В закрытый сосуд, наполненный воздухом при нормальных условиях, вводится диэтиловый эфир ($C_2H_5OC_2H_5$). После того, как эфир испарился, давление в сосуде стало равно $P = 0,14$ МПа. Какое количество эфира было введено в сосуд? Объем сосуда $V = 2$ л. Атмосферное давление $P_0 = 100$ кПа. Температуру считать неизменной.

Дано:



$$V = 2 \text{ л}$$

$$T = 20^\circ\text{C}$$

$$P_0 = 100 \text{ кПа}$$

$$\underline{P = 140 \text{ кПа}}$$

$$m - ?$$

Решение

После введения эфира в сосуде образуется смесь воздуха и эфира, создающая общее давление P . Согласно закону Дальтона давление смеси газов равно сумме парциальных давлений этих газов.

$$P = P_{\hat{a}} + P_{\hat{y}}.$$

Согласно условию, парциальное давление воздуха равно атмосферному.

$$P_{\hat{a}} = P_0.$$

Давление эфира найдём из уравнения состояния идеального газа.

$$P_{\hat{y}}V = \frac{m_{\hat{y}}}{\mu_{\hat{y}}} RT.$$

$$P_{\hat{y}} = \frac{m_{\hat{y}}RT}{\mu_{\hat{y}}V}.$$

A4. В закрытый сосуд, наполненный воздухом при нормальных условиях, вводится диэтиловый эфир ($C_2H_5OC_2H_5$). После того, как эфир испарился, давление в сосуде стало равно $P = 0,14$ МПа. Какое количество эфира было введено в сосуд? Объем сосуда $V = 2$ л. Атмосферное давление $P_0 = 100$ кПа.

Решение (продолжение)

Согласно закону Дальтона давление в сосуде равно

$$P = P_{\hat{a}} + P_{\hat{y}} = P_0 + \frac{m_{\hat{y}}RT}{\mu_{\hat{y}}V}.$$

Отсюда

$$\mu_{\hat{y}}V(P - P_0) = m_{\hat{y}}RT, \quad m_{\hat{y}} = \frac{\mu_{\hat{y}}V(P - P_0)}{RT}.$$

Молярную массу диэтилового эфира найдём из его химической формулы

$$\mu_{\hat{y}} = 4\mu_C + 10\mu_H + \mu_O = 4 \cdot 12 + 10 \cdot 1 + 16 = 74 \text{ (}\tilde{a}/\hat{i} \hat{i} \ddot{u}\text{)}$$

Нормальные условия: давление - 100 кПа, температура - 273 К.

$$m_{\hat{y}} = \frac{\mu_{\hat{y}}V(P - P_0)}{RT} = \frac{74 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot (1,4 - 1,0) \cdot 10^5}{8,31 \cdot 273} \approx 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ (}\hat{e}\tilde{a}\text{)}.$$

Ответ: $m = 2,3$ г.

5А Чему равна энергия теплового движения $m=20$ г кислорода (O_2) при температуре $t=10^{\circ}C$? Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения, а какая – на долю вращательного?

Ответ: $W=3,7$ кДж; $W_{\text{пост.}}=2,2$ кДж; $W_{\text{вр.}}=1,5$ кДж.

6А Чему равна энергия теплового движения молекул двух-
атомного газа, заключенного в сосуд объемом $V=2$ л и находящегося под
давлением $P=150$ кПа?

Ответ: $W=750$ Дж.

Теплоёмкость идеального газа

- Теплоёмкость при постоянном давлении.
- Теплоёмкость при постоянном объёме.
- Теплоёмкость смеси газов.

A5. Чему равна энергия теплового движения молекул $m = 20$ г кислорода (O_2) при температуре $t = 10^\circ$ С. Какая часть энергии приходится на долю поступательного движения, а какая – на долю вращательного?

Дано:
 $m = 20$ г (O_2)
 $\mu = 32$ г/моль
 $T_1 = 10^\circ$ С

$E - ?$
 $E_{\text{п}} / E - ?$
 $E_{\text{вр}} / E - ?$

Решение

Кислород является двухатомным газом, и, если считать его молекулы жёсткими, число степеней свободы молекул $i = 5$.

Из пяти степеней свободы три соответствуют поступательному движению молекул, две – вращательному.

Средняя энергия теплового движения молекул идеального газа

$$E_{\text{cp}} = \frac{i}{2} kT.$$

Суммарная энергия теплового движения всех молекул идеального газа

$$E = N \frac{i}{2} kT,$$

где N – полное число молекул идеального газа.

$$N = \frac{m}{\mu} N_A.$$

$$E = N \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} N_A kT = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{5}{2} \frac{20 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 283 \approx 3,7 \cdot 10^3 \text{ (Дж)}.$$

A5. Чему равна энергия теплового движения молекул $m = 20$ г кислорода (O_2) при температуре $t = 10^\circ$ С. Какая часть энергии приходится на долю поступательного движения, а какая – на долю вращательного?

Решение (продолжение)

Средняя энергия поступательного движения молекул идеального газа

$$E_n = \frac{3}{2} kT.$$

Средняя энергия вращательного движения молекул идеального двухатомного газа

$$E_b = \frac{i-3}{2} kT = kT.$$

$$E = \frac{i}{2} kT. \quad E_n = \frac{3}{2} kT. \quad E_b = \frac{i-3}{2} kT = kT.$$

$$\frac{E_n}{E} = \frac{3kT}{2} \frac{2}{ikT} = \frac{3}{i} = \frac{3}{5}.$$

$$\frac{E_b}{E} = \frac{(i-3)kT}{2} \frac{2}{ikT} = \frac{2}{i} = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $E = 3,7$ к Дж;
 $E_n/E = 0,6$, $E_b/E = 0,4$.

A6. Чему равна энергия теплового движения молекул двухатомного газа, заключённого в сосуд объёмом $V = 2$ л и находящегося под давлением $P = 150$ кПа?

Дано:
 $i = 5$
 $V = 2$ л
 $P = 150$ кПа

 $E = ?$

Решение

Для двухатомного газа с жёсткими молекулами число степеней свободы молекул $i = 5$.

Средняя энергия теплового движения молекул идеального газа

$$E_{cp} = \frac{i}{2} kT.$$

Суммарная энергия теплового движения всех молекул идеального газа

$$E = N \frac{i}{2} kT,$$

где N – полное число молекул идеального газа.

$$N = \frac{m}{\mu} N_A.$$

$$E = N \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} N_A kT = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

$$PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

$$E = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{i}{2} PV = \frac{5}{2} 150 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 750 \text{ (Дж)}.$$

Ответ: $E = 750$ Дж.

A7. Для некоторого двухатомного газа удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении равна $c_p = 14,67 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К). Чему равна молярная масса этого газа?

Дано:

$$i = 5$$

$$c_p = 14,67 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг · К)}$$

μ - ?

Решение

Удельная теплоёмкость численно равна количеству теплоты, необходимому для нагревания единицы массы (1 кг) вещества на 1 К. Процесс происходит при постоянном давлении.

$$C_p = \frac{\Delta Q_p}{m \Delta T}.$$

Согласно первому закону термодинамики

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A.$$

Изменение внутренней энергии идеального двухатомного газа

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Работа идеального газа в изобарическом процессе

$$\begin{aligned} \Delta A &= p \Delta V = p(V_2 - V_1) = pV_2 - pV_1 = p_2 V_2 - p_1 V_1 = \\ &= \frac{m}{\mu} R T_2 - \frac{m}{\mu} R T_1 = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R \Delta T. \end{aligned}$$

A7. Для некоторого двухатомного газа удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении равна $c_p = 14,67 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К). Чему равна молярная масса этого газа?

Решение (продолжение)

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A. \quad \Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad \Delta A = \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Подставим выражения для изменения внутренней энергии и работы газа.

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i+2}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении

$$c_p = \frac{\Delta Q_p}{m \Delta T} = \frac{\frac{i+2}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T}{m \Delta T} = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}.$$

$$c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}. \quad \mu = \frac{i+2}{2} \frac{R}{c_p}. \quad \mu = \frac{5+2}{2} \frac{8,31}{14,67 \cdot 10^3} \approx 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль)}.$$

Ответ: $\mu = 2$ г/моль (водород).

A8. Найти удельные теплоёмкости c_p и c_v некоторого газа, если известно, что его молярная масса $\mu = 0,03$ кг/моль и отношение $c_p/c_v = 1,4$.

Дано:

$$\mu = 0,03 \text{ кг/моль}$$

$$c_p/c_v = 1,4$$

$$c_p - ?$$

$$c_v - ?$$

Решение

Удельная теплоёмкость численно равна количеству теплоты, необходимому для нагревания единицы массы (1 кг) вещества на 1 К.

$$c_p = \frac{\Delta Q_p}{m\Delta T},$$

$$c_v = \frac{\Delta Q_v}{m\Delta T}.$$

Согласно первому закону $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$.

термодинамики

Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Работа идеального газа в изобарическом процессе

$$\begin{aligned} \Delta A &= p\Delta V = p(V_2 - V_1) = pV_2 - pV_1 = p_2V_2 - p_1V_1 = \\ &= \frac{m}{\mu} RT_2 - \frac{m}{\mu} RT_1 = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R\Delta T. \end{aligned}$$

A8. Найти удельные теплоёмкости c_p и c_v некоторого газа, если известно, что его молярная масса $\mu = 0,03$ кг/моль и отношение $c_p/c_v = 1,4$.

Решение (продолжение)

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A. \quad \Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad \Delta A = \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Подставим выражения для изменения внутренней энергии и работы газа.

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i+2}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении

$$c_p = \frac{\Delta Q_p}{m \Delta T} = \frac{\frac{i+2}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T}{m \Delta T} = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}.$$

В изохорическом процессе работа не совершается,

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A. \quad \Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad \Delta A = 0.$$

$$\Delta Q_V = \Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad c_v = \frac{\Delta Q_V}{m \Delta T} = \frac{\frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T}{m \Delta T} = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}.$$

A8. Найти удельные теплоёмкости c_p и c_v некоторого газа, если известно, что его молярная масса $\mu = 0,03$ кг/моль и отношение $c_p/c_v = 1,4$.

Решение (продолжение)

$$c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}, \quad c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}.$$

Отсюда

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i} = \gamma, \quad i = \frac{2}{\gamma-1} = \frac{2}{1,4-1} = 5.$$

$$c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu} = \frac{5+2}{2} \frac{8,31}{0,03} = 969,5 \text{ (Дж·кг/моль)}.$$

$$c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu} = \frac{5}{2} \frac{8,31}{0,03} = 692,5 \text{ (Дж·кг/моль)}.$$

Ответ: $c_p = 970$ (Дж·кг)/моль, $c_v = 693$ (Дж·кг)/моль.

A9. Найти удельную теплоёмкость при постоянном давлении газовой смеси, состоящей из $\nu_1 = 3$ кмоль аргона (Ar) и $\nu_2 = 2$ кмоль азота (N_2).

Дано:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 3 \text{ кмоль (Ar)} \\ \nu_2 &= 2 \text{ кмоль (N}_2\text{)} \end{aligned}$$

c_p - ?

Решение

Удельная теплоёмкость смеси численно равна количеству теплоты, необходимому для нагревания единицы массы (1 кг) смеси на 1 К. Процесс происходит при постоянном давлении.

$$c_p = \frac{\Delta Q_p}{m\Delta T} = \frac{\Delta Q_{p1} + \Delta Q_{p2}}{(m_1 + m_2)\Delta T}.$$

Согласно первому закону термодинамики $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$.
Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Работа идеального газа в изобарическом процессе

$$\begin{aligned} \Delta A &= p\Delta V = p(V_2 - V_1) = pV_2 - pV_1 = p_2V_2 - p_1V_1 = \\ &= \frac{m}{\mu} RT_2 - \frac{m}{\mu} RT_1 = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R\Delta T. \end{aligned}$$

A9. Найти удельную теплоёмкость при постоянном давлении газовой смеси, состоящей из $\nu_1 = 3$ кмоль аргона (Ar) и $\nu_2 = 2$ кмоль азота (N_2).

Решение (продолжение)

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A. \quad \Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad \Delta A = \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Подставим выражения для изменения внутренней энергии и работы газа.

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i+2}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Удельная теплоёмкость смеси газов при постоянном давлении

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{\Delta Q_{p1} + \Delta Q_{p2}}{(m_1 + m_2) \Delta T} = \frac{\frac{i_1 + 2}{2} \frac{m_1}{\mu_1} R \Delta T + \frac{i_2 + 2}{2} \frac{m_2}{\mu_2} R \Delta T}{(m_1 + m_2) \Delta T} = \\ &= \frac{\frac{i_1 + 2}{2} \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{i_2 + 2}{2} \frac{m_2}{\mu_2}}{(m_1 + m_2)} R = \frac{(i_1 + 2) \nu_1 + (i_2 + 2) \nu_2}{(\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2)} \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

A9. Найти удельную теплоёмкость при постоянном давлении газовой смеси, состоящей из $\nu_1 = 3$ кмоль аргона (Ar) и $\nu_2 = 2$ кмоль азота (N_2).

Решение (продолжение)

$$c_p = \frac{(i_1 + 2)\nu_1 + (i_2 + 2)\nu_2}{(\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2)} \frac{R}{2}.$$

$$c_p = \frac{(3 + 2) \cdot 3 \cdot 10^3 + (5 + 2) \cdot 2 \cdot 10^3}{(40 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^3 + 28 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3)} \frac{8,31}{2} \approx 680 \text{ (Дж}\cdot\text{кг/моль)}.$$

Ответ: $c_p = 680$ (Дж·кг)/моль.

A10. Найти отношение c_p/c_v для газовой смеси, состоящей из $m_1 = 8$ г гелия (He) и $m_2 = 16$ г кислорода (O_2).

Дано:

$m_1 = 8$ г (He)

$m_2 = 16$ г (O_2)

c_p/c_v - ?

Решение

Удельная теплоёмкость смеси численно равна количеству теплоты, необходимому для нагревания единицы массы (1 кг) смеси на 1 К. Процесс происходит при постоянном давлении.

$$c_p = \frac{\Delta Q_p}{m\Delta T} = \frac{\Delta Q_{p1} + \Delta Q_{p2}}{(m_1 + m_2)\Delta T}. \quad c_v = \frac{\Delta Q_v}{m\Delta T} = \frac{\Delta Q_{v1} + \Delta Q_{v2}}{(m_1 + m_2)\Delta T}.$$

Согласно первому закону $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$.

термодинамики

Изменение внутренней энергии идеального двухатомного газа

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Работа идеального газа в изобарическом процессе

$$\begin{aligned} \Delta A &= p\Delta V = p(V_2 - V_1) = pV_2 - pV_1 = p_2V_2 - p_1V_1 = \\ &= \frac{m}{\mu} RT_2 - \frac{m}{\mu} RT_1 = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R\Delta T. \end{aligned}$$

A10. Найти отношение c_p/c_v для газовой смеси, состоящей из $m_1 = 8$ г гелия (He) и $m_2 = 16$ г кислорода (O_2).

Решение (продолжение)

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A. \quad \Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad \Delta A = \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Подставим выражения для изменения внутренней энергии и работы газа.

$$\Delta Q_p = \Delta U + \Delta A = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i+2}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

В изохорическом процессе работа не совершается,

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A. \quad \Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad \Delta A = 0.$$

$$\Delta Q_V = \Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

A10. Найти отношение c_p/c_v для газовой смеси, состоящей из $m_1 = 8$ г гелия (He) и $m_2 = 16$ г кислорода (O_2).

Решение (продолжение)

Удельная теплоёмкость смеси газов при постоянном давлении

$$c_p = \frac{\Delta Q_{p1} + \Delta Q_{p2}}{(m_1 + m_2) \Delta T} = \frac{\frac{i_1 + 2}{2} \frac{m_1}{\mu_1} R \Delta T + \frac{i_2 + 2}{2} \frac{m_2}{\mu_2} R \Delta T}{(m_1 + m_2) \Delta T}.$$

$$c_p = \frac{\frac{i_1 + 2}{2} \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{i_2 + 2}{2} \frac{m_2}{\mu_2}}{(m_1 + m_2)} R.$$

Удельная теплоёмкость смеси газов при постоянном объёме

$$c_v = \frac{\Delta Q_{v1} + \Delta Q_{v2}}{(m_1 + m_2) \Delta T} = \frac{\frac{i_1}{2} \frac{m_1}{\mu_1} R \Delta T + \frac{i_2}{2} \frac{m_2}{\mu_2} R \Delta T}{(m_1 + m_2) \Delta T} = \frac{\frac{i_1}{2} \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{i_2}{2} \frac{m_2}{\mu_2}}{(m_1 + m_2)} R.$$

A10. Найти отношение c_p/c_v для газовой смеси, состоящей из $m_1 = 8$ г гелия (He) и $m_2 = 16$ г кислорода (O_2).

Решение (продолжение)

$$c_p = \frac{\frac{i_1 + 2}{2} \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{i_2 + 2}{2} \frac{m_2}{\mu_2}}{(m_1 + m_2)} R. \quad c_v = \frac{\frac{i_1}{2} \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{i_2}{2} \frac{m_2}{\mu_2}}{(m_1 + m_2)} R.$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{i_1 + 2}{2} \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{i_2 + 2}{2} \frac{m_2}{\mu_2}}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{(m_1 + m_2)}{\frac{i_1}{2} \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{i_2}{2} \frac{m_2}{\mu_2}} = \frac{(i_1 + 2) \frac{m_1}{\mu_1} + (i_2 + 2) \frac{m_2}{\mu_2}}{i_1 \frac{m_1}{\mu_1} + i_2 \frac{m_2}{\mu_2}}.$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{(3 + 2) \frac{8}{4} + (5 + 2) \frac{16}{32}}{3 \frac{8}{4} + 5 \frac{16}{32}} \approx 1,6.$$

Ответ: $c_p / c_v = 1,6$.