

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ



Локальная интерполяция

1. Кусочно-постоянная интерполяция

На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ интерполяционный многочлен равен константе, а именно левому или правому значению функции.

Для левой кусочно-постоянной интерполяции

$$P(x) = f_{i-1}, \text{ если } x_{i-1} \leq x < x_i$$

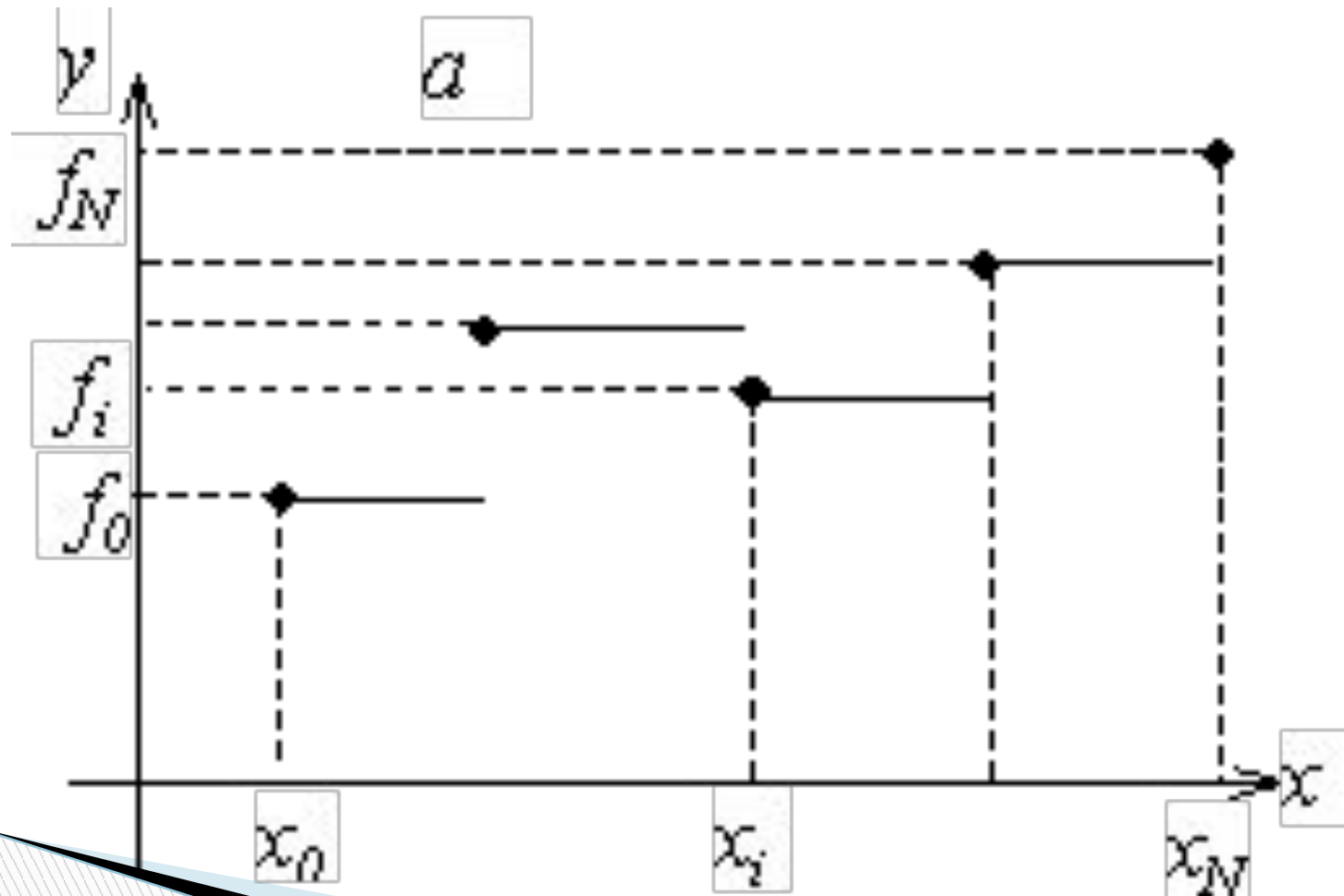
$$F(x) = \begin{cases} f_0, & x_0 \leq x < x_1 \\ f_1, & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \dots \\ f_{N-1}, & x_{N-1} \leq x < x_N \end{cases}$$

Для правой кусочно-постоянной интерполяции

$$F(x) = f_i, \text{ если } x_{i-1} < x \leq x_i$$

$$F(x) = \begin{cases} f_1, & x_0 < x \leq x_1 \\ f_2, & x_1 < x \leq x_2 \\ \dots & \dots \\ f_N, & x_{N-1} < x \leq x_N \end{cases}$$

Для левой кусочно- постоянной интерполяции имеем графическое представление



Кусочно-линейная интерполяция

На каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ функция является линейной .

$$P_i(x) = k_i x + b_i$$

Значения коэффициентов находятся из выполнения условий интерполяции в концах отрезка:

$$P_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, \quad P_i(x_i) = f_i$$

Получаем систему уравнений:

$$k_i x_{i-1} + b_i = f_{i-1}, \quad k_i x_i + b_i = f_i$$

откуда находим

$$k_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},$$

$$b_i = f_i - k_i x_i$$

Следовательно, функцию $F(z)$ можно записать в виде

$$F(x) = \frac{f_i - f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} x + f_i - k_i \lambda_i, \text{ если } \lambda_{i-1} \leq x \leq \lambda_i$$

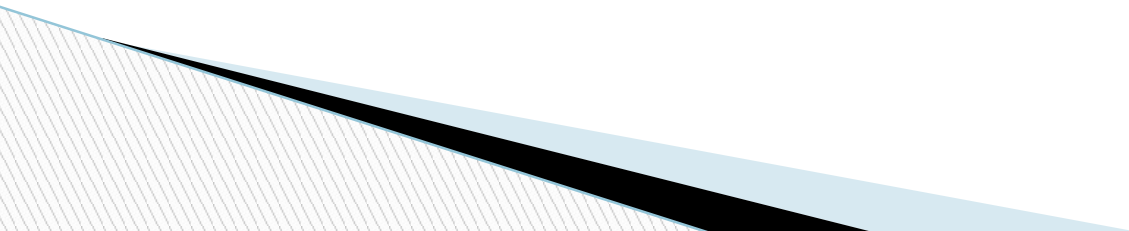
T.e.

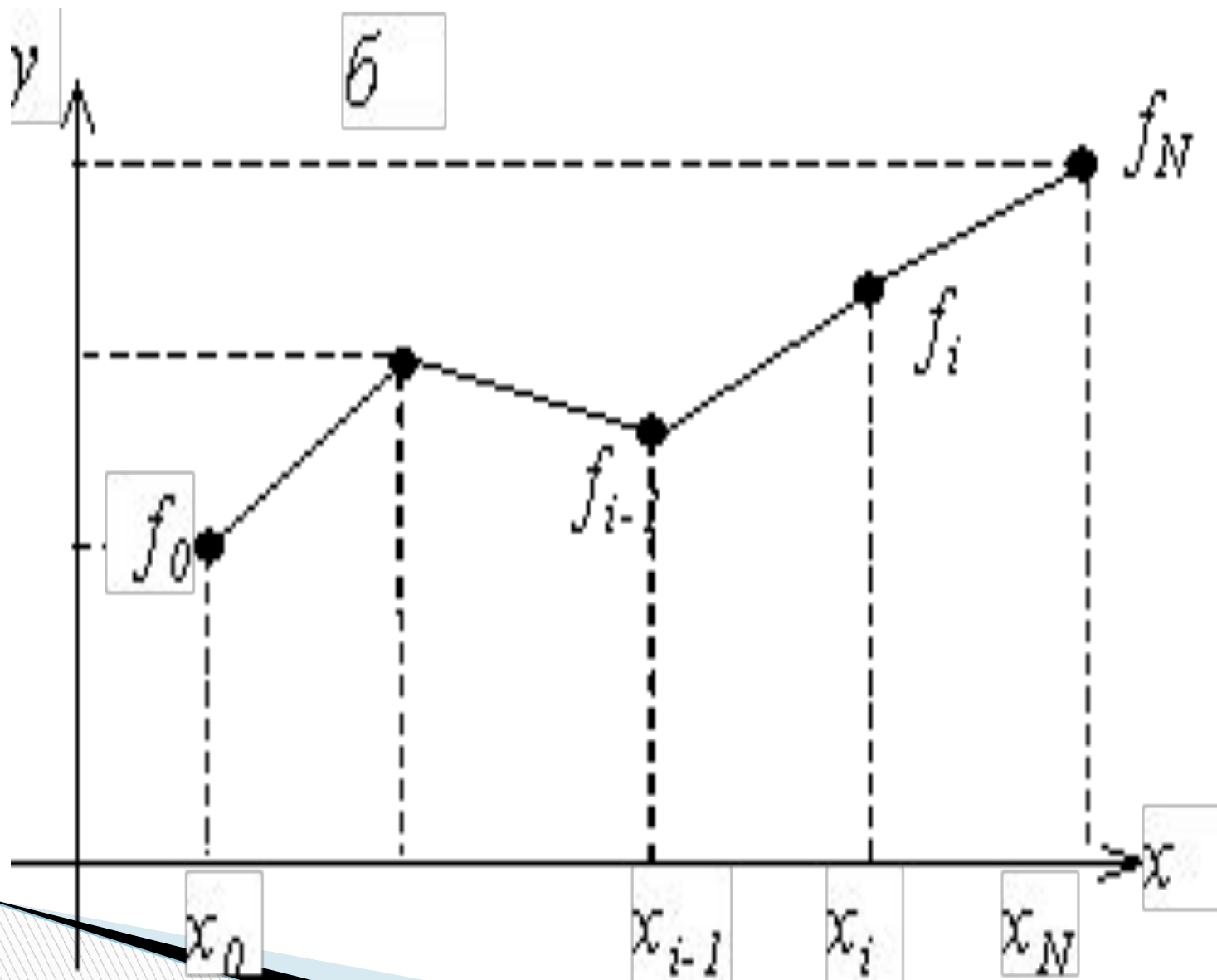
$$F(x) = \begin{cases} \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} x + f_0 - k_0 x_0, & x_0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} x + f_1 - k_1 x_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \dots \\ \frac{f_N - f_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} x + f_{N-1} - k_{N-1} x_{N-1}, & x_{N-1} \leq x \leq x_N \end{cases}$$

$$\text{Или } F(x) = k_i * (x - x_{i-1}) + f_{i-1},$$
$$k_i = (f_i - f_{i-1}) / (x_i - x_{i-1}), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$
$$i=1,2,\dots,N-1$$

При использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение x , а затем подставить его в формулу. Итоговая функция будет непрерывной, но производная будет разрывной в каждом узле интерполяции.

Иллюстрация кусочно-линейной
интерполяции приведена на рисунке





Пример:

- Заданы значения некоторой функции:

x	0	2	3	3.5
f	-1	0.2	0.5	0.8

Требуется найти значение функции при $x=1$ и $x=3.2$ по кусочно-постоянной и кусочно-линейной интерполяции.

РЕШЕНИЕ.

Точка $x=1$ принадлежит первому локальному отрезку $[0, 2]$, т.е. $i=1$ и, следовательно, по формулам левой кусочно-постоянной интерполяции

$F(1) = f_0 = -1$, по формулам правой кусочно-постоянной интерполяции

$F(1)=f_1=0.2$. Воспользуемся формулами кусочно-линейной интерполяции:

$$k_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = 0.6,$$

$$f_1 = f_0 + k_1(x_1 - x_0) = -1, \quad P(1) = -1 + 0.6 \cdot 1 = -0.4$$

Точка $x=3.2$ принадлежит третьему интервалу $[3, 3.5]$, т.е. и, следовательно, по формулам левой кусочно – постоянной интерполяции $F(3.2)=0.5$, по формулам правой кусочно – постоянной интерполяции $F(3.2)=0.8$. Воспользуемся формулами кусочно–линейной интерполяции:

$$k_1 = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{0.8 - 0.5}{3.5 - 3} = 0.6,$$

$$b_3 = f_3 - k_3 x_3 = 0.8 - 0.6 \cdot 3.5 = -1.3, \quad R(3.2) = 0.6 \cdot 3.2 - 1.3 = 0.62$$

Глобальная интерполяция

В случае глобальной интерполяции отыскивается единый полином на всём интервале $[a, b]$, т. е. строится полином, который используется для интерполяции функции $f(x)$ на всём интервале изменения аргумента x . Будем искать интерполирующую функцию в виде полинома (многочлена) m -ой степени

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_m x^m.$$

Допустим, что заданы две точки: (x_0, f_0) и (x_1, f_1) , т.е. $N=1$. Через эти точки можно провести единственную прямую, т.е. интерполирующей функцией будет полином первой степени $P_1(x) = a_0 + a_1 x$. Через три точки ($N=2$) можно провести параболу $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ и т.д. Рассуждая таким способом, можно предположить, что искомым полином должен иметь степень N

Для того, чтобы доказать это, выпишем систему уравнений на коэффициенты. Уравнения системы представляют собой условия интерполяции при каждом $x=x_i$

$$\begin{cases} P_N(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \dots + a_Nx_1^N = f_1 \\ P_N(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + \dots + a_Nx_2^N = f_2 \\ \dots \\ P_N(x_N) = a_0 + a_1x_N + a_2x_N^2 + a_3x_N^3 + \dots + a_Nx_N^N = f_N \end{cases}$$

Определитель данной системы
носит имя определителя
Вандермонда.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^N \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^N \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq k < m \leq N} (\lambda_k - \lambda_m)$$

Из курса математического анализа известно, что определитель отличен от нуля, если $x_k \neq x_m$ (т. е. все узлы интерполяции различные). Таким образом, доказано, что система имеет решение.

Для нахождения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ надо решить СЛАУ, что является сложной задачей. Но есть другой способ построения полинома N -ой степени, который не требует решения такой системы.

Полином Лагранжа

- Решение ищем в виде

$$L_n(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i l_i(z)$$

где $l_i(z)$ – базисные полиномы N -й степени, для которых выполняется условие: .

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Убедимся в том, что если такие полиномы построены, то $L_n(x)$ будет удовлетворять условиям интерполяции:

$$L_N(x_i) = \sum_{k=0}^N f_k l_k(x_i) = f_0 l_0(x_i) + \dots + f_N l_N(x_i) = f_i$$

Каким образом построить базисные полиномы? Определим

$$l_i(z) = \frac{(z - x_0)(z - x_1) \dots (z - x_{i-1})(z - x_{i+1}) \dots (z - x_N)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_N)}$$

□ $i=0, 1, \dots, N$

Легко понять, что

$$l_0(z) = \frac{(z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_N)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_N)}, \quad l_1(z) = \frac{(z - x_0)(z - x_2) \dots (z - x_N)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_N)}$$

Функция $l_i(z)$ является полиномом N -й степени от z и для нее выполняются условия "базисности":

$$l_i(x_k) = \frac{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{i-1})(x_k - x_{i+1}) \dots (x_k - x_N)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{i-1})(x_k - x_{i+1}) \dots (x_k - x_N)} \\ = 0$$

$i \neq k; \text{ т.е. } k=1, \dots, i-1 \text{ или } k=i+1, \dots, N.$

$$l_i(x_j) = \frac{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{i-1})(x_j - x_{i+1}) \dots (x_j - x_N)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_N)} = 1$$

Таким образом, нам удалось решить задачу о построении интерполирующего полинома N-ой степени, и для этого не нужно решать СЛАУ. Полином Лагранжа можно записать в виде:

$$L_N(z) = \sum_{i=0}^N f_i l_i(z) = \sum_{i=0}^N f_i \prod_{i \neq k} \frac{(z - \lambda_k)}{(\lambda_i - \lambda_k)}$$

Погрешность метода зависит от свойств исходной функции, а также от расположения узлов интерполяции и точки z . Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях $N < 20$. При больших N погрешность начинает расти, что свидетельствует о том, что метод Лагранжа не сходится (т. е. его погрешность не убывает с ростом N).

Рассмотрим частные случаи. Пусть $N=1$, т.е. заданы значения функции только в двух точках. Тогда базовые полиномы имеют вид:

$$l_0(z) = \frac{(z - x_1)}{(x_0 - x_1)}, l_1(z) = \frac{(z - x_0)}{(x_1 - x_0)},$$

$$L_N(z) = \sum_{i=0}^N f_i l_i(z) = f_0 l_0(z) + f_1 l_1(z) = f_0 \frac{(z-x_1)}{(x_0-x_1)} + f_1 \frac{(z-x_0)}{(x_1-x_0)} = \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} z + f_1 - \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$$

т.е. получаем формулы кусочно-линейной интерполяции.

□ Пусть $N=2$. Тогда:

$$l_0(z) = \frac{(z-x_1)(z-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, l_1(z) = \frac{(z-x_0)(z-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, l_2(z) = \frac{(z-x_0)(z-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$
$$L_N(z) = \sum_{i=0}^N f_i l_i(z) = f_0 \frac{(z-x_1)(z-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(z-x_0)(z-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(z-x_0)(z-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

В результате мы получили ф-лы квадратичной или параболической интерполяции

Пример: Заданы значения некоторой функции:

x	0	2	3	3.5
f	-1	0.2	0.5	0.8

Требуется найти значение функции при $z=1$, используя интерполяционный полином Лагранжа. Для этого случая $N=3$, т.е. полином Лагранжа имеет третий порядок. Вычислим значения базисных полиномов при $z=1$:

$$l_0(1) = \frac{(1-2)(1-3)(1-3.5)}{(0-2)(0-3)(0-3.5)} = \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot (-2.5)}{(-2) \cdot (-3) \cdot (-3.5)} = \frac{-5}{-21} = 0.238$$

$$l_1(1) = \frac{(1-0)(1-3)(1-3.5)}{(2-0)(2-3)(2-3.5)} = \frac{1 \cdot (-2) \cdot (-2.5)}{2 \cdot (-1) \cdot (-1.5)} = \frac{5}{3} = 1.667$$

$$l_2(1) = \frac{(1-0)(1-2)(1-3.5)}{(3-0)(3-2)(3-3.5)} = \frac{1 \cdot (-1) \cdot (-2.5)}{3 \cdot 1 \cdot (-0.5)} = \frac{2.5}{-1.5} = -1.667$$

$$l_3(1) = \frac{(1-0)(1-2)(1-3)}{(3.5-0)(3.5-2)(3.5-3.0)} = \frac{1 \cdot (-1) \cdot (-2)}{3.5 \cdot 1.5 \cdot 0.5} = \frac{2}{2.625} = 0.762$$

$$L_3(1) = \sum_{i=0}^3 f_i(1) = (-1) \cdot 0.238 + 0.2 \cdot 1.667 + \\ + 0.5 \cdot (-1.667) + 0.8 \cdot 0.762 = -0.129.$$

Кубический интерполяционный сплайн

На каждом i -м отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \dots, N$, решение будем искать в виде полинома третьей степени:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2/2 + d_i(x - x_i)^3/6$$

Неизвестные коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i , $i=1, 2, \dots, N$, находим из:

- условий интерполяции: $S_i(x_i) = f_i$, $i=1, 2, \dots, N$;
 $S_1(x_0) = f_0$,
- непрерывности функции $S_i(x_{i-1}) = S_{i-1}(x_{i-1})$, $i=2, 3, \dots, N$,

- непрерывности первой и второй производной:

$$S'_{i-1}(x_{i-1}) = S'_{i-1}(x_{i-1}), \quad S''_{i-1}(x_{i-1}) = S''_{i-1}(x_{i-1}), \\ i=2, 3, \dots, N.$$

Учитывая, что ,

$$S_{i-1}(x) = a_{i-1} + b_{i-1}(x - x_{i-1}) + c_{i-1}(x - x_{i-1})^2 / 2 + d_{i-1}(x - x_{i-1})^3 / 6$$

для определения $4N$ неизвестных
получаем систему $4N-2$ уравнений:

$$a_i = f_i, \quad i=1, 2, \dots, N,$$

$$b_i h_i - c_i h_i^2/2 + d_i h_i^3/6 = f_i - f_{i-1}, \quad i=1, 2, \dots, N,$$

$$b_i - b_{i-1} = c_i h_i - d_i h_i^2/2, \quad i=2, 3, \dots, N,$$

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1}, \quad i=2, 3, \dots, N.$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$.

- Недостающие два уравнения выводятся из дополнительных условий: $S''(a) = S''(b) = 0$. Можно показать, что при этом . Из системы можно исключить неизвестные b_i, d_i , получив систему $N+1$ линейных уравнений (СЛАУ) для определения коэффициентов c_i :

$$c_0 = 0, \quad c_N = 0,$$

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) c_i + h_{i+1} c_{i+1} = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (1)$$

После этого вычисляются коэффициенты

b_i, d_i :

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, b_i = \frac{c_i h_i}{2} - \frac{d_i h_i^2}{6} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$i=1, 2, \dots, N. (2)$

В случае постоянной сетки $h_i=h$ эта система уравнений упрощается.

$$4c_1 + c_2 = 6 \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 6 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$i = 2, \dots, N-2$$

$$c_{N-2} + 4c_{N-1} = 6 \frac{f_N - 2f_{N-1} + f_{N-2}}{h^2}$$

$$c_N = 0$$

- Данная СЛАУ имеет трехдиагональную матрицу и решается методом прогонки.
- Коэффициенты определяются из формул:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h}$$

$$b_i = 1/2c_i h - 1/6d_i h^2 + (f_i - f_{i-1})/h$$

$$a_i = f_i$$

- Для вычисления значения $S(x)$ в произвольной точке отрезка $z \in [a, b]$ необходимо решить систему уравнений на коэффициенты $c_i, i=1, 2, \dots, N-1$, затем найти все коэффициенты b_i, d_i . Далее, необходимо определить, на какой интервал $[x_{i_0}, x_{i_0-1}]$ попадает эта точка, и, зная номер i_0 , вычислить значение сплайна и его производных в точке z
- $S(z) = a_{i_0} + b_{i_0}(z - x_{i_0}) + c_{i_0}(z - x_{i_0})^2/2 + d_{i_0}(z - x_{i_0})^3/6$
- $S'(z) = b_{i_0} + c_{i_0}(z - x_{i_0}) + d_{i_0}(z - x_{i_0})^2/2, S''(z) = c_{i_0} + d_{i_0}(z - x_{i_0})$.

пример

	x_0, f_0	x_1, f_1	x_2, f_2	x_3, f_3	x_4, f_4
x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
f	1	2	1	0	1

- Требуется вычислить значения функции в точках 0.25 и 0.8, используя сплайн – интерполяцию.
- В нашем случае: $h_i = 1/4$,

$$f_0 = 1, f_1 = 2, f_2 = 1, f_3 = 0, f_4 = 1, N = 4$$

Выпишем систему уравнений для

определения C_2 :

$$4c_1 + c_2 = 6 \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} = 6 \frac{1 - 2 \cdot 2 + 1}{1} \cdot 16 = -192$$

$$c_1 + 4c_2 + c_3 = 6 \frac{f_1 - 2f_2 + f_3}{h^2} = 0$$

$$c_2 + 4c_3 = 6 \frac{f_4 - 2f_3 + f_2}{h^2} = 192$$

$$c_N = 0$$

Решая эту систему линейных уравнений,
получим:

$$c_1 = -48, c_2 = 0, c_3 = 48, c_4 = 0$$

$$d_1 = \frac{c_1 - c_0}{-h} = 4 \cdot (-48) = -192$$

$$d_2 = \frac{c_2 - c_1}{h} = 192$$

$$d_3 = \frac{c_3 - c_2}{h} = 192$$

$$d_4 = \frac{c_4 - c_3}{h} = -192$$

$$b_1 = 1/2c_1h - 1/6d_1h^2 + (f_1 - f_0)/h = 0$$

$$b_2 = 1/2c_2h - 1/6d_2h^2 + (f_2 - f_1)/h = -6$$

$$b_3 = 1/2c_3h - 1/6d_3h^2 + (f_3 - f_2)/h = 0$$

$$b_4 = 1/2c_4h - 1/6d_4h^2 + (f_4 - f_3)/h = 6$$

$$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1$$

- Рассмотрим точку 0.25, которая принадлежит первому отрезку, т.е. $i=1$. Следовательно, получим,

$$S(z) = a_1 + b_1(z - x_0) + 1/2c_1(z - x_0)^2 + 1/6d_1(z - x_0)^3,$$

$$S(0.25) = 2 + 0*(0.25 - 0) + 1/2*(-48)*(0.25 - 0)^2 + 1/6*(0.25 - 0)^3 = 0.5026$$

- Рассмотрим точку 0.8, которая принадлежит четвертому отрезку, т.е. $i=4$.

- Следовательно,

$$S(z) = a_4 + b_4(z - x_3) + 1/2c_4(z - x_3)^2 + 1/6d_4(z - x_3)^3,$$

$$S(0.8) = 1 + 6 * (0.8 - 0.75) + 1/2 * 0 * (0.8 - 0.75)^2 + 1/6 * (-192) * (0.8 - 0.75)^3 = 1.026$$

пример

- Выполнить интерполяцию сплайнами третьей степени. Построить график и отметить на нем узлы интерполяции.

x_i	7	9	13
y_i	2	-2	3

Интерполяционная формула Ньютона.

- Построение интерполяционного многочлена в форме Ньютона применяется главным образом когда разность $x_{i+1} - x_i = h$ постоянна для всех значений $x = 0..n-1$.
- Конечная разность k -го порядка:
 - $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$
 - $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$
 -
 - $\Delta^k y_i = y_{i+k} - ky_{i+1-k} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} + \dots + (-1)^k y_i$

- Будем искать интерполяционный многочлен в виде:
- $P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$
- Найдем значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$:
- Полагая $x=x_0$, находим $a_0 = P(x_0) = y_0$;
- Далее подставляя значения x_1, x_2, \dots, x_n получаем:

- $a_1 = \Delta y_0 / h$
- $a_2 = \Delta^2 y_0 / 2! h^2$
- $a_3 = \Delta^3 y_0 / 3! h^3$
-
- $a_n = \Delta^n y_0 / n! h^n$

□ Таким образом:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & y_0 + \Delta y_0 / h * (x - x_0) + \\
 & \Delta^2 y_0 / 2! h^2 * (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\
 & \Delta^n y_0 / n! h^n * (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Практически формула (1) применяется в несколько ином виде.

Возьмем: $t=(x-x_0)/h$, тогда $x=x_0+th$ и формула (1) переписывается как:

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$

(2)

Формула (2) называется интерполяционной формулой Ньютона.

пример

- Построить интерполяционный многочлен Ньютона. Начертить график и отметить на нем узлы интерполяции. Вычислить значение функции в точке $x=1.25$.

x_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y_i	0.5	2.2	2	1.8	0.5	2.25

□ **Решение.**

- Построим таблицу конечных разностей в виде матрицы:

0,5	2,2	2	1,8	0,5	2,25
1,7	-0,2	-0,2	-1,3	1,75	
-1,9	0	-1,1	3,05		
1,9	-1,1	4,15			
-3	5,25				
8,25					

- Воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона:
- $P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$
- Подставив значения получим многочлен пятой степени, упростив который получим:
- $P_5(x) = 2.2x^5 - 24x^4 + 101.783x^3 - 20.2x^2 + 211.417x - 80.7$
- Вычислим значение функции в точке $x = 1.25$;
 $P(1.25) = 2.0488$;