ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Локальная интерполяция

1. ***Кусочно–постоянная интерполяция***

На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ интерполяционный многочлен равен константе , а именно левому или правому значе-нию функции.

Для левой кусочно-постоянной интерполяции

$$F(x) = f_{i-1}, \text{ если } x_{i-1} <= x < x_i$$

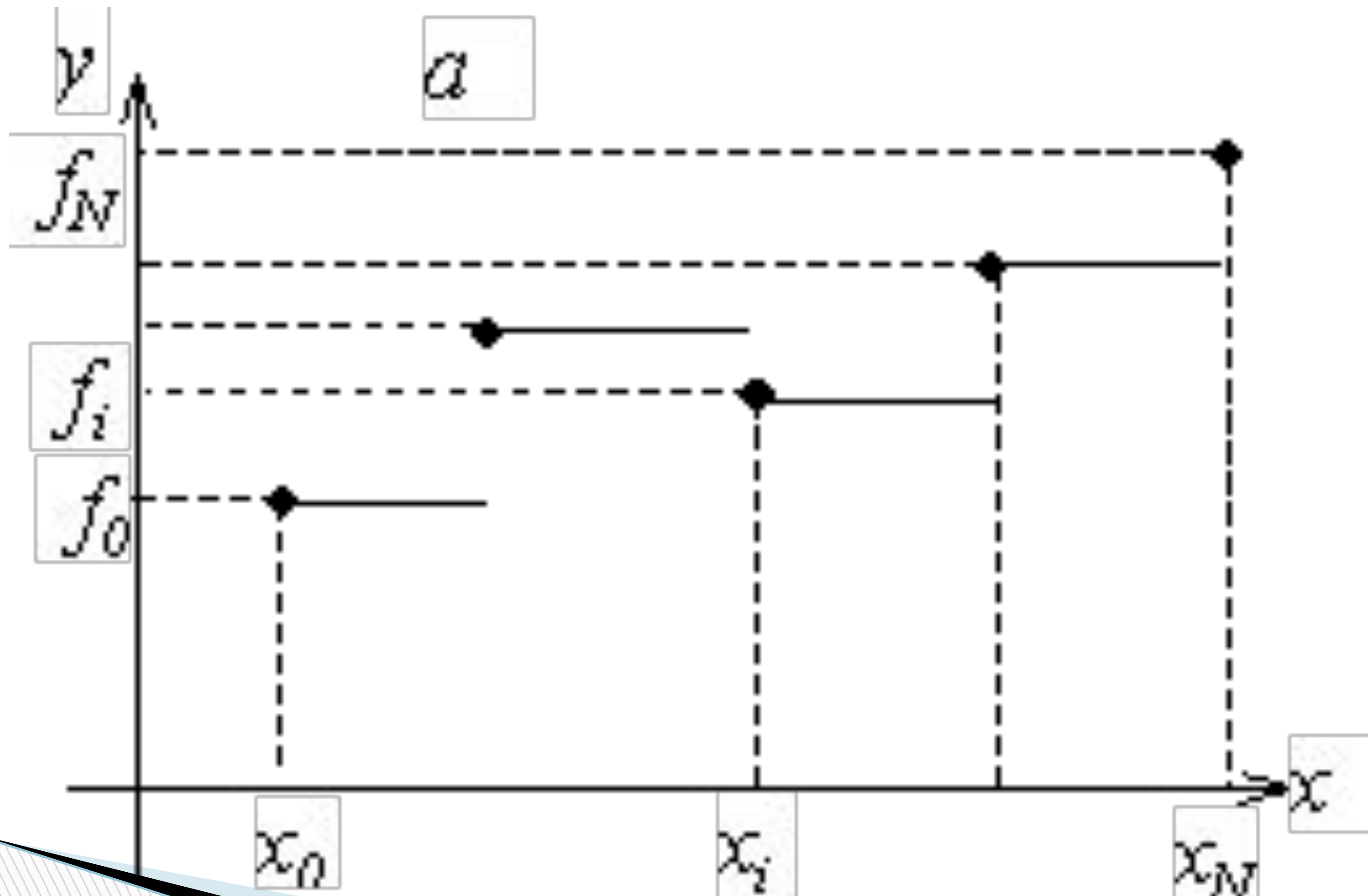
$$F(x) = \begin{cases} f_0, & x_0 \Leftarrow x < x_1 \\ f_1, & x_1 \Leftarrow x < x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_{N-1}, & x_{N-1} \Leftarrow x < x_N \end{cases}$$

Для правой кусочно-постоянной интерполяции

$$F(x) = f_i,\ если\ \ x_{i-1} < x <= x_i$$

$$F(x) = \begin{cases} f_1, & x_0 < x <= x_1 \\ f_2, & x_1 < x <= x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_N, & x_{N-1} < x <= x_N \end{cases}$$

Для левой кусочно- постоянной интерполяции имеем графическое представление



Кусочно–линейная интерполяция

На каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ функция является линейной .

$$F_i(x) = k_i x + l_i$$

Значения коэффициентов находятся из выполнения условий интерполяции в концах отрезка:

$$F_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, \quad F_i(x_i) = f_i$$

Получаем систему уравнений:

$$k_i x_{i-1} + b_i = f_{i-1}, \quad k_i x_i + b_i = f_i$$

откуда находим

$$k_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},$$

$$b_i = f_i - k_i x_i$$

Следовательно, функцию F(z) можно записать в виде

$$F(x) = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} x + f_i - k_i x_i, \text{ если } x_{i-1} \le x \le x_i$$

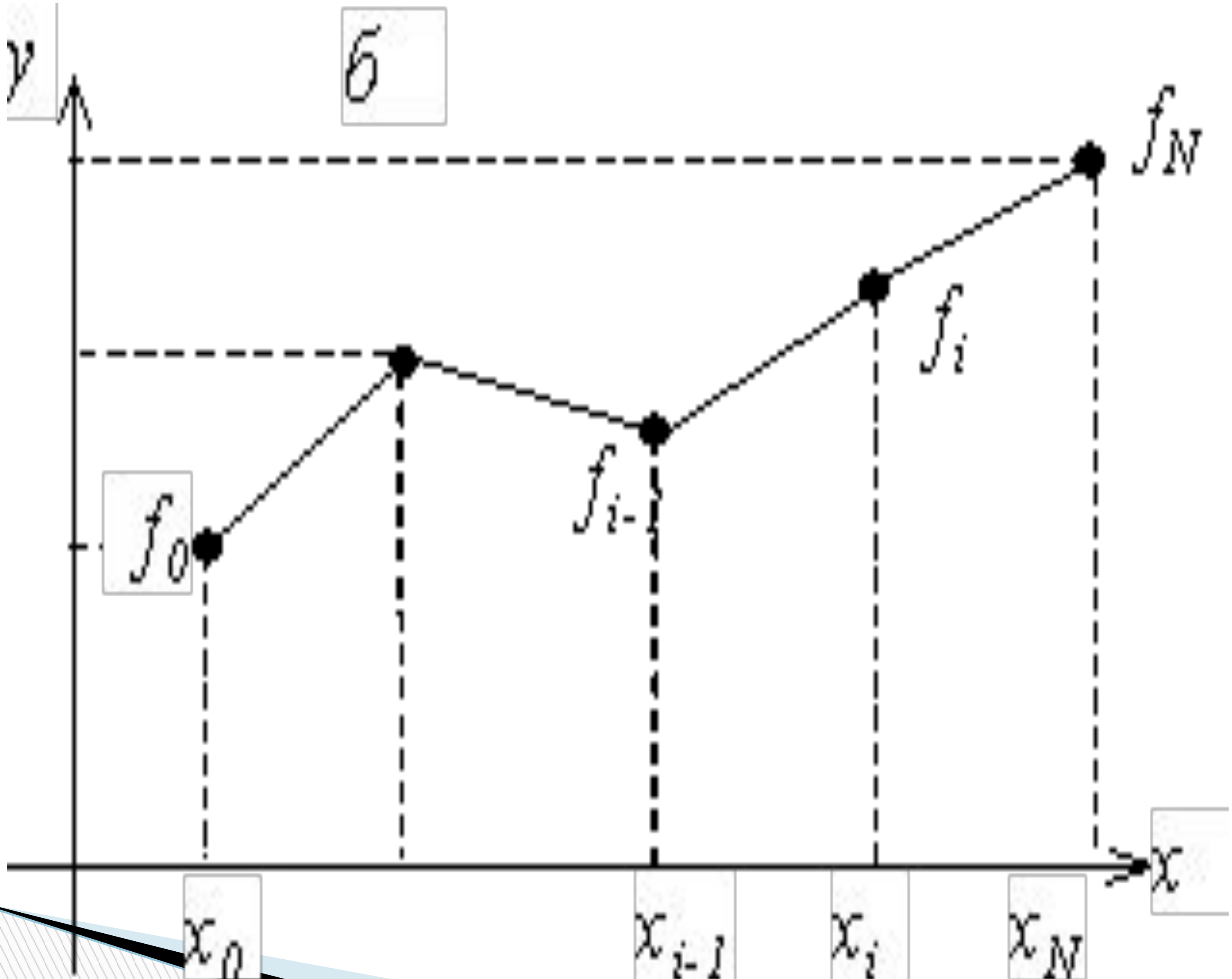
Т.е.

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}x+f_0-k_0x_0, & x_0\Leftarrow x\Leftarrow x_1\\ \dfrac{f_2-f_1}{x_2-x_1}x+f_1-k_1x_1, & x_1\Leftarrow x\Leftarrow x_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dfrac{f_N-f_{N-1}}{x_N-x_{N-1}}x+f_{N-1}-k_{N-1}x_{N-1}, & x_{N-1}\Leftarrow x\Leftarrow x_N\end{cases}$$

Или $F(x) = k_i * (x - x_{i-1}) + f_{i-1}$,
$k_i = (f_i - f_{i-1}) / (x_i - x_{i-1})$, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$,
$i=1,2,...,N-1$

При использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение x, а затем подставить его в формулу. Итоговая функция будет непрерывной, но производная будет разрывной в каждом узле интерполяции.

Иллюстрация кусочно-линейной интерполяции приведена на рисунке



y
б
f_N
f_i
f_{i-1}
f_0
x
x_0
x_{i-1}
x_i
x_N

Пример:

- Заданы значения некоторой функции:

x	0	2	3	3.5
f	-1	0.2	0.5	0.8

Требуется найти значение функции при $x=1$ и $x=3.2$ по кусочно-постоянной и кусочно-линейной интерполяции.

РЕШЕНИЕ.

Точка $x=1$ принадлежит первому локальному отрезку [0, 2], т.е. $i=1$ и, следовательно, по формулам левой кусочно-постоянной интерполяции

$F(1) = f_0 = -1$, по формулам правой кусочно-постоянной интерполяции

$F(1)=f_1=0.2$. Воспользуемся формулами кусочно-линейной интерполяции:

$$k_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = 0.6,$$

$$b_1 = f_1 - k_1 x_1 = -1, \quad F(1) = -1 + 0.6 \cdot 1 = -0.4$$

Точка x=3.2 принадлежит третьему интервалу [3, 3.5], т.е. и, следовательно, по формулам левой кусочно – постоянной интерполяции F(3.2)= =0.5, по формулам правой кусочно – постоянной интерполяции F(3.2)= =0.8. Воспользуемся формулами кусочно-линейной интерполяции:

$$k_1 = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{0.8-0.5}{3.5-3} = 0.6,$$

$$b_3 = f_3 - k_3 x_3 = 0.8 - 0.6 \cdot 3.5 = -1.3, \quad F(3.2) = 0.6 \cdot 3.2 - 1.3 = 0.62$$

Глобальная интерполяция

В случае глобальной интерполяции отыскивается единый полином на всём интервале [a, b], т. е. строится полином, который используется для интерполяции функции f(x) на всём интервале изменения аргумента x. Будем искать интерполирующую функцию в виде полинома (многочлена) *m*–ой степени $P_m(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\ldots+a_m x^m$.

Допустим, что заданы две точки: (x_0, f_0) и (x_1, f_1), т.е. N=1. Через эти точки можно провести единственную прямую, т.е. интерполирующей функцией будет полином первой степени $P_1(x)=a_0+a_1 x$. Через три точки (N=2) можно провести параболу $P_2(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2$ и т.д. Рассуждая таким способом, можно предположить, что искомый полином должен иметь степень N

Для того, чтобы доказать это, выпишем систему уравнений на коэффициенты. Уравнения системы представляют собой условия интерполяции при каждом $x=x_i$

$$
\begin{cases}
P_N(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots + a_N x_1^N = f_1 \\
P_N(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \ldots + a_N x_2^N = f_2 \\
\ldots \\
P_N(x_N) = a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 + a_3 x_N^3 + \ldots + a_N x_N^N = f_N
\end{cases}
$$

Определитель данной системы носит имя определителя Вандермонда.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^N \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^N \\ \dots & & & \dots \\ 1 & \lambda_N & & \lambda_N^N \end{vmatrix} = \prod_{0 \le k < m \le N} (\lambda_k - \lambda_m)$$

Из курса математического анализа известно, что определитель отличен от нуля, если $x_k \neq x_m$ (т. е. все узлы интерполяции различные). Таким образом, доказано, что система имеет решение.

Для нахождения коэффициентов a_0, a_1, a_2, …, a_n надо решить СЛАУ, что является сложной задачей. Но есть другой способ построения полинома N-ой степени, который не требует решения такой системы.

Полином Лагранжа

- Решение ищем в виде

$$L_N(z) = \sum_{i=0}^{N} f_i l_i(z)$$

где $l_i(z)$ – базисные полиномы N–й степени, для которых выполняется условие: .

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Убедимся в том, что если такие полиномы построены, то *Ln(x)* будет удовлетворять условиям интерполя-ции:

$$L_N(x_i) = \sum_{k=0}^{N} f_k l_k(x_i) = f_0 l_0(x_i) + \ldots + f_N l_N(x_i) = f_i$$

Каким образом построить базисные полиномы? Определим

$$l_i(z) = \frac{(z - x_0)(z - x_1)\dots(z - x_{i-1})(z - x_{i+1})\dots(z - x_N)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_N)}$$

- i=0,1,…, N

Легко понять, что

$$l_0(z)=\frac{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_N)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_N)},\quad l_1(z)=\frac{(z-x_0)(z-x_2)\ldots(z-x_N)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_N)}$$

Функция $l_i(z)$ является полиномом N–й степени от z и для нее выполняются условия "базисности":

$$l_i(x_k)=\frac{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{i-1})(x_k-x_{i+1})\ldots(x_k-x_N)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{i-1})(x_k-x_{i+1})\ldots(x_k-x_N)}$$

$=0$

$i \neq k$;, *т.е.* k=1,…,i-1 или k=i+1,…,N.

$$l_i(x_i) = \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_N)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_N)} = 1$$

Таким образом, нам удалось решить задачу о построении интерполирующего полинома N-ой степени, и для этого не нужно решать СЛАУ. Полином Лагранжа можно записать в виде:

$$L_N(z) = \sum_{i=0}^{N} f_i l_i(z) = \sum_{i=0}^{N} f_i \prod_{i \neq k} \frac{(z - \lambda_k)}{(\lambda_i - \lambda_k)}$$

Погрешность метода зависит от свойств исходной функции, а также от расположения узлов интерполяции и точки z. Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях $N<20$. При больших N погрешность начинает расти, что свидетельствует о том, что метод Лагранжа не сходится (т. е. его погрешность не убывает с ростом N).

Рассмотрим частные случаи. Пусть N=1, т.е. заданы значения функции только в двух точках. Тогда базовые полиномы имеют вид:

$$l_0(z)=\frac{(z-x_1)}{(x_0-x_1)},\quad l_1(z)=\frac{(z-x_0)}{(x_1-x_0)},$$

$$L_N(z)=\sum_{i=0}^{N} f_i l_i(z)=f_0 l_0(z)+f_1 l_1(z)=f_0\frac{(z-x_1)}{(x_0-x_1)}+f_1\frac{(z-x_0)}{(x_1-x_0)}=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}z+f_1-\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$$

т.е. получаем формулы кусочно–линейной интерполяции.

- Пусть N=2. Тогда:

$$l_0(z)=\frac{(z-x_1)(z-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\quad l_1(z)=\frac{(z-x_0)(z-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},\quad l_2(z)=\frac{(z-x_0)(z-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

$$L_N(z)=\sum_{i=0}^{N} f_i l_i(z)=f_0\frac{(z-x_1)(z-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f_1\frac{(z-x_0)(z-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f_2\frac{(z-x_0)(z-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

В результате мы получили ф-лы квадратичной или параболической интерполяции

Пример: Заданы значений неко-торой функции:

x	0	2	3	3.5
f	-1	0.2	0.5	0.8

Требуется найти значение функ-ции при $z=1$, используя интерпо-ляционный полином Лагранжа. Для этого случая $N=3$, т.е. полином Лагранжа имеет третий порядок. Вычислим значения базисных полиномов при $z=1$:

$$l_0(1) = \frac{(1-2)(1-3)(1-3.5)}{(0-2)(0-3)(0-3.5)} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-2.5)}{(-2)\cdot(-3)\cdot(-3.5)} = \frac{-5}{-21} = 0.238$$

$$l_1(1) = \frac{(1-0)(1-3)(1-3.5)}{(2-0)(2-3)(2-3.5)} = \frac{1\cdot(-2)\cdot(-2.5)}{2\cdot(-1)\cdot(-1.5)} = \frac{5}{3} = 1.667$$

$$l_2(1) = \frac{(1-0)(1-2)(1-3.5)}{(3-0)(3-2)(3-3.5)} = \frac{1\cdot(-1)\cdot(-2.5)}{3\cdot 1\cdot(-0.5)} = \frac{2.5}{-1.5} = -1.667$$

$$l_3(1) = \frac{(1-0)(1-2)(1-3)}{(3.5-0)(3.5-2)(3.5-3.0)} = \frac{1\cdot(-1)\cdot(-2)}{3.5\cdot 1.5\cdot 0.5} = \frac{2}{2.625} = 0.762$$

$$L_3(1) = \sum_{i=0}^{3} f_i l_i(1) = (-1) \cdot 0.238 + 0.2 \cdot 1.667 +$$

$$+0.5 \cdot (-1.667) + 0.8 \cdot 0.762 = -0.129.$$

Кубический интерполяционный сплайн

На каждом i–м отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2,\ldots, N$, решение будем искать в виде полинома третьей степени:

$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2/2+d_i(x-x_i)^3/6$

Неизвестные коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i, $i=1, 2,\ldots, N$, находим из:

- условий интерполяции: $S_i(x_i)=f_i$, $i=1, 2,\ldots, N$; $S_1(x_0)=f_0$,
- непрерывности функции $S_i(x_{i-1})=S_{i-1}(x_{i-1})$, $i=2, 3,\ldots, N$,

- непрерывности первой и второй производной:

$S'_i(x_{i-1})=S'_{i-1}(x_{i-1})$, $S''_i(x_{i-1})=S''_{i-1}(x_{i-1})$, $i=2, 3, \ldots, N$.

Учитывая, что ,

$$S_{i-1}(x)=a_{i-1}+b_{i-1}(x-x_{i-1})+c_{i-1}(x-x_{i-1})^2/2+d_{i-1}(x-x_{i-1})^3/6$$

для определения $4N$ неизвестных получаем систему $4N-2$ уравнений:

$a_i = f_i,\ i=1,\ 2, \ldots,\ N,$

$b_i h_i - c_i h_i^2/2 + d_i h_i^3/6 = f_i - f_{i-1},\ i=1,\ 2, \ldots,\ N,$

$b_i - b_{i-1} = c_i h_i - d_i h_i^2/2,\ i=2,\ 3, \ldots,\ N,$

$d_i h_i = c_i - c_{i-1},\ i=2,\ 3, \ldots,\ N.$

где $h_i = x_i - x_{i-1}.$

- Недостающие два уравнения выводятся из дополнительных условий: $S^{//}(a)=S^{//}(b)=0$. Можно показать, что при этом . Из системы можно исключить неизвестные b_i, d_i, получив систему $N+1$ линейных уравнений (СЛАУ) для определения коэффициентов c_i:

$c_0=0$, $c_N=0$,

$$h_i c_{i-1}+2(h_i+h_{i+1})c_i+h_{i+1}c_{i+1}=6\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$$

$i=1, 2,\ldots, N-1.$ *(1)*

После этого вычисляются коэффициенты b_i, d_i:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, b_i = \frac{c_i h_i}{2} - \frac{d_i h_i^2}{6} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

i=1, 2,..., N. (2)

В случае постоянной сетки $h_i = h$ эта система уравнений упрощается.

$$4c_1 + c_2 = 6\,\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 6\,\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

$$i = 2,\ldots,N-2$$

$$c_{N-2} + 4c_{N-1} = 6\,\frac{f_N - 2f_{N-1} + f_{N-2}}{h^2}$$

$$c_N = 0$$

- Данная СЛАУ имеет трехдиагональную матрицу и решается методом прогонки.
- Коэффициенты определяются из формул:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h}$$

$$b_i = 1/2 c_i h - 1/6 d_i h^2 + (f_i - f_{i-1})/h$$

$$a_i = f_i$$

- Для вычисления значения $S(x)$ в произвольной точке отрезка $z \in [a, b]$ необходимо решить систему уравнений на коэффициенты c_i, $i=1,2,\ldots, N-1$, затем найти все коэффициенты b_i, d_i. Далее, необходимо определить, на какой интервал $[x_{i0,}\ x_{i0-1}]$ попадает эта точка, и, зная номер i_0, вычислить значение сплайна и его производных в точке z
- $S(z)=a_{i0} + b_{i0}(z-x_{i0})+c_{i0}(z-x_{i0})^2/2+d_{i0}(z-x_{i0})^3/6$
- $S^{/}(z)=b_{i0}+c_{i0}(z-x_{i0})+d_{i0}(z-x_{i0})^2/2$, $S^{//}(z)=c_{i0}+d_{i0}(z-x_{i0})$.

пример

	x_0, f_0	x_1, f_1	x_2, f_2	x_3, f_3	x_4, f_4
x	0	¼	1/2	3/4	1
f	1	2	1	0	1

- Требуется вычислить значения функции в точках 0.25 и 0.8, используя сплайн – интерполяцию.
- В нашем случае: $h_i=1/4$,

$$f_0=1,\ f_1=2,\ f_2=1,\ f_3=0,\ f_4=1,\ N=4$$

Выпишем систему уравнений для

определения c_i :

$$4c_1 + c_2 = 6\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} = 6\frac{1-2\cdot 2+1}{1}\cdot 16 = -192$$

$$c_1 + 4c_2 + c_3 = 6\frac{f_1 - 2f_2 + f_3}{h^2} = 0$$

$$c_2 + 4c_3 = 6\frac{f_4 - 2f_3 + f_2}{h^2} = 192$$

$$c_N = 0$$

Решая эту систему линейных уравнений, получим:

$$c_1 = -48,\ c_2 = 0,\ c_3 = 48, c_4 = 0$$

$$d_1 = \frac{c_1 - c_0}{-h} = 4 \cdot (-48) = -192$$

$$d_2 = \frac{c_2 - c_1}{h} = 192$$

$$d_3 = \frac{c_3 - c_2}{h} = 192$$

$$d_4 = \frac{c_4 - c_3}{h} = -192$$

$$b_1 = 1/2c_1h - 1/6d_1h^2 + (f_1 - f_0)/h = 0$$

$$b_2 = 1/2c_2h - 1/6d_2h^2 + (f_2 - f_1)/h = -6$$

$$b_3 = 1/2c_3h - 1/6d_3h^2 + (f_3 - f_2)/h = 0$$

$$b_4 = 1/2c_4h - 1/6d_4h^2 + (f_4 - f_3)/h = 6$$

$$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1$$

- Рассмотрим точку 0.25, которая принадлежит первому отрезку, т.е. $i=1$. Следовательно, получим,

$$S(z)=a_1+b_1(z-x_0)+1/2c_1(z-x_0)^2+1/6d_1(z-x_0)^3,$$

$$S(0.25)=2+0*(0.25-0)+1/2*(-48)*(0.25-0)^2+1/6*(0.25-0)^3=0.5026$$

- Рассмотрим точку 0.8, которая принадлежит четвертому отрезку, т.е. i=4.
- Следовательно,

$$S(z) = a_4 + b_4(z - x_3) + 1/2c_4(z - x_3)^2 + 1/6d_4(z - x_3)^3,$$

$$S(0.8) = 1 + 6*(0.8 - 0.75) + 1/2*0*(0.8 - 0.75)^2 + 1/6*(-192)*(0.8 - 0.75)^3 = 1.026$$

пример

- Выполнить интерполяцию сплайнами третьей степени. Построить график и отметить на нем узлы интерполяции.

x_i	**7**	**9**	**13**
y_i	2	-2	3

Интерполяционная формула Ньютона.

- Построение интерполяционного многочлена в форме Ньютона применяется главным образом когда разность $x_{i+1}-x_i=\mathbf{h}$ постоянна для всех значений $x=0..n-1$.
- Конечная разность k-го порядка:
- $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$
- $\Delta^2 y_i= \Delta y_{i+1}- \Delta y_i=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i$
- ……………………………
- $\Delta^k y_i=y_{i+k}-ky_{i+1-k}+k(k-1)/2!*y_{i+k-2}+...+(-1)^k y_i$

- Будем искать интерполяционный многочлен в виде:
- $Pn(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$
- Найдем значения коэффициентов a_0, a_1, a_2, ...,a_n:
- Полагая $x=x_0$, находим $a_0=P(x_0)=y_0$;
- Далее подставляя значения x_1, x_2, ...,x_n получаем:

- $a_1=\Delta y_0/h$
- $a_2=\Delta^2 y_0/2!h^2$
- $a_3=\Delta^3 y_0/3!h^3$
- ....
- $a_n=\Delta^n y_0/n!h^n$
- Таким образом:
  $Pn(x)=y_0+ \Delta y_0/h*(x-x_0)+$
  $\Delta^2 y_0/2!h^2*(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+$
  $\Delta^n y_0/n!h^n*(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$ (1)

Практически формула (1) применяется в несколько ином виде.

Возьмем: $t=(x-x_0)/h$, тогда $x=x_0+th$ и формула (1) переписывается как:

$$\mathbf{P_n(x)=y_0+t\Delta y_0+t(t-1)/2!\,\Delta^2 y_0+\ldots+t(t-1)\ldots(t-n+1)/n!\,\Delta^n y_0} \quad (2)$$

Формула (2) называется интерполяционной формулой Ньютона.

пример

- Построить интерполяционный многочлен Ньютона. Начертить график и отметить на нем узлы интерполяции. Вычислить значение функции в точке x=1.25.

x_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y_i	0.5	2.2	2	1.8	0.5	2.25

- **<u>Решение.</u>**
- Построим таблицу конечных разностей в виде матрицы:

0,5	2,2	2	1,8	0,5	2,25
1,7	-0,2	-0,2	-1,3	1,75	
-1,9	0	-1,1	3,05		
1,9	-1,1	4,15			
-3	5,25				
8,25					

- Воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона:
- $\mathbf{P_n(x)=y_0+t\Delta y_0+t(t-1)/2!\,\Delta^2 y_0+\ldots+t(t-1)\ldots(t-n+1)/n!\,\Delta^n y_0}$
- Подставив значения получим многочлен пятой степени, упростив который получим:
- $P_5(x)=2.2x^5-24x^4+101.783x^3-20.2x^2+211.417x-80.7$
- Вычислим значение функции в точке $x=1.25$; $P(1.25)=2.0488$;