Иррациональные неравенства

Клобертанц Е.П.

Иррациональными называют неравенства, в которых переменные входят под знак корня

«Простейшие иррациональные неравенства»:

	$\sqrt{x} < a$	$\sqrt{x} > a$
$a < 0$	решений нет	$x \geq 0, x \in [0;+\infty)$
$a = 0$	решений нет	$x > 0, x \in (0;+\infty)$
$a > 0$	$x < a^2, x \in [0; a^2)$	$x > a^2, x \in (a^2;+\infty)$

$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$
равносильно системе $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2 x \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$	равносильно системам $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ или $g(x) \geq 0$ $f(x) > g^2(x)$	равносильно системе $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Решим неравенства:

1.

$$\sqrt{x-5}<1$$

2.

$$\sqrt{x+7}>x+1$$

3.

$$(x-1)\cdot\sqrt{x^2-x-2}\le 0$$

Решение первого неравенства

$\sqrt{x-5} < 1$ равносильно $\sqrt{x-5} - 1 < 0$

Шаг 1. Рассмотрим иррациональную функцию $f(x) = \sqrt{x-5} - 1$

и найдем область определения $x - 5 \geq 0$

$x \geq 5$ **- область определения**

Шаг 2. Вычислим нули функции

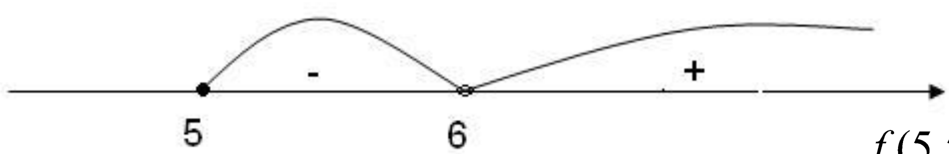
$$\sqrt{x-5} - 1 = 0$$

$$\sqrt{x-5} = 1$$

$$(\sqrt{x-5})^2 = 1^2$$

$$x - 5 = 1$$

- нуль функции $x = 6$



$$f(5.5) = \sqrt{5.5-5} - 1 = \sqrt{0.5} - 1 < 0$$

$$f(7) = \sqrt{7-5} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0$$

Ответ $x \in [5;6)$

2.

$$\sqrt{x+7} > x+1$$

равносильно

$$\sqrt{x+7} - x - 1 > 0$$

Шаг 1. Рассмотрим иррациональную функцию и найдем область ее определения

$$f(x) = \sqrt{x+7} - x - 1$$

$$x + 7 \geq 0$$

$x \geq -7$ **- область определения**

Шаг 2. Вычислим нули функции

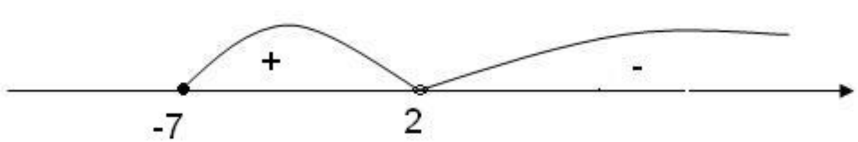
$$\sqrt{x+7} - x - 1 = 0$$

$$\sqrt{x+7} = x+1$$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (\sqrt{x+7})^2 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+7 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x_1 = -3; x_2 = 2 \end{cases}$$

$x = 2$ **- нуль функции**

Шаг 3.



$$f(-6) = \sqrt{-6+7} - (-6) - 1 = 1 + 6 - 1 = 6 > 0$$

$$f(9) = \sqrt{9+7} - 9 - 1 = 4 - 10 = -6 < 0$$

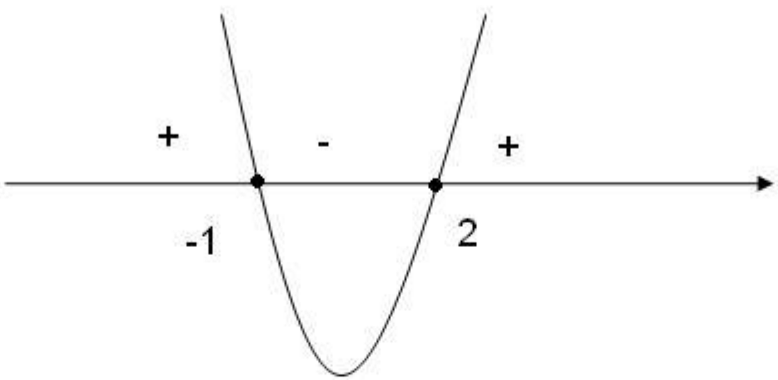
$$x \in [-7;2)$$

$$(x-1)\cdot\sqrt{x^2-x-2}\le 0$$

Шаг1.расмотрим иррациональную функцию

Найдем область определения

$$f(x)=(\mathrm{x}\ \text{-}1)\cdot\sqrt{\mathrm{x}^2-x-2}$$



$$x^2--x-2\ge 0$$

$$x_1=2$$

$$x_2=-1$$

Область определения $x\le -1$ **и** $x\ge 2$

Шаг 2. Вычислим нули функции

$$(x-1)\cdot\sqrt{x^2-x-2}=0$$

$$\sqrt{x^2-x-2}=0$$

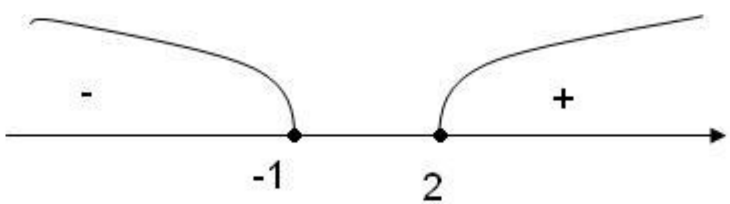
-1; 1; 2 - нули функции

Шаг 3.

$x-1=0$ $\qquad$ $x^2-x-2=0$

$x_1=1$ $\qquad$ $x_2=-1$ $\qquad$ $x_3=2$

Ответ: и



$$f(-3)<0$$

$$f(3)>0$$

$x\in(-\infty;1]$ $\qquad$ $x=2$

Алгоритм решения иррациональных неравенств:

1. Введение иррациональной функции; нахождение области определения функции.
2. Вычисление нулей функции.
3. На координатной прямой:
   - отмечаем нули функции, принадлежащие области определения;
   - определяем знак функции на каждом промежутке;
   - с учетом знака неравенства выписываем

Упражнения для самостоятельного решения: :

1. $\sqrt{2x+9} < 3 - x$

2. $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$

3. $\sqrt{9 - x^2} > 3 - \sqrt{6x - x^2}$

Для контроля используем лист самопроверки