

Иррациональные неравенства

Клобертанц Е.П.

Иррациональными называют
неравенства, в которых
переменные входят под знак
корня

«Простейшие иррациональные неравенства»:

	$\sqrt{x} < a$	$\sqrt{x} > a$
$a < 0$	решений нет	$x \geq 0, x \in [0; +\infty)$
$a = 0$	решений нет	$x > 0, x \in (0; +\infty)$
$a > 0$	$x < a^2, x \in [0; a^2)$	$x > a^2, x \in (a^2; +\infty)$
$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$
<p>равносильно системе</p> $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$	<p>равносильно системам</p> $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ <p>ИЛИ</p> $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$	<p>равносильно системе</p> $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Решим неравенства:

1.

$$\sqrt{x-5} < 1$$

2.

$$\sqrt{x+7} > x+1$$

3.

$$(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} \leq 0$$

Решение первого неравенства

$$\sqrt{x-5} < 1 \quad \text{равносильно} \quad \sqrt{x-5} - 1 < 0$$

Шаг 1. Рассмотрим иррациональную функцию $f(x) = \sqrt{x-5} - 1$ и найдем область определения $x - 5 \geq 0$

$x \geq 5$ - область определения

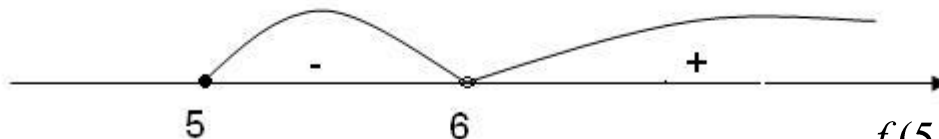
Шаг 2. Вычислим нули функции $\sqrt{x-5} - 1 = 0$

$$\sqrt{x-5} = 1$$

$$(\sqrt{x-5})^2 = 1^2$$

$$x - 5 = 1$$

- нуль функции $x = 6$



$$f(5.5) = \sqrt{5.5-5} - 1 = \sqrt{0.5} - 1 < 0$$

$$f(7) = \sqrt{7-5} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0$$

Ответ $x \in [5;6)$

$$\sqrt{x+7} > x+1 \quad 2.$$

равносильно

$$\sqrt{x+7} - x - 1 > 0$$

Шаг 1. Рассмотрим иррациональную функцию и найдем область ее определения

$$f(x) = \sqrt{x+7} - x - 1$$

$$x + 7 \geq 0$$

Шаг 2. Вычислим нули функции

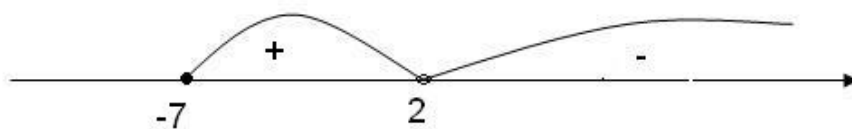
$$\sqrt{x+7} = x+1$$

$$\sqrt{x+7} - x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (\sqrt{x+7})^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+7 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x_1 = -3; x_2 = 2 \end{cases} \end{cases}$$

нуль функции

Шаг 3.
 $x = 2$



$$x \in [-7; 2)$$

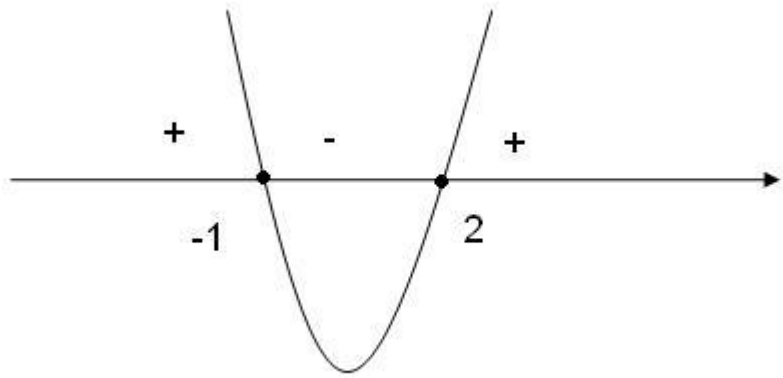
$$f(-6) = \sqrt{-6+7} - (-6) - 1 = 1 + 6 - 1 = 6 > 0$$

$$f(9) = \sqrt{9+7} - 9 - 1 = 4 - 10 = -6 < 0$$

$$(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} \leq 0$$

Шаг1. рассмотрим иррациональную функцию
Найдем область определения

$$f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2}$$



$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

Область определения

и

$$x \leq -1$$

$$x \geq 2$$

Шаг 2. Вычислим нули функции

$$(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} = 0$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = 0$$

-1; 1; 2 - нули функции
Шаг 2.

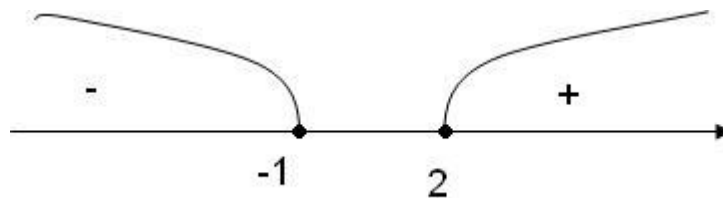
$$x - 1 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Ответ: $x_1 = 1$ и

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 2$$



$$f(-3) < 0$$

$$f(3) > 0$$

$$x \in (-\infty; 1] \quad x = 2$$

Алгоритм решения иррациональных неравенств:

1. Введение иррациональной функции; нахождение области определения функции.
2. Вычисление нулей функции.
3. На координатной прямой:
 - отмечаем нули функции, принадлежащие области определения;
 - определяем знак функции на каждом промежутке;
 - с учетом знака неравенства выписываем

Упражнения для самостоятельного решения: :

1. $\sqrt{2x + 9} < 3 - x$

2. $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$

3. $\sqrt{9 - x^2} > 3 - \sqrt{6x - x^2}$

[Для контроля используем лист самопроверки](#)