

Итерационные методы решения линейных алгебраических систем

1. *Метод простой итерации или метод Якоби*

Предположим, что диагональные элементы матриц A исходной системы не равны 0 ($a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$). Разрешим первое уравнение системы относительно x_1 , второе относительно x_2 и т.д. Получим следующую эквивалентную систему, записанную в скалярном виде:

Скалярный вид СЛАУ (I)

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} (f_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m))$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} (f_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m))$$

.....

$$x_m = \frac{1}{a_{mm}} (f_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{m,m-1}x_{m-1}))$$

- Теперь, задав нулевое приближение $x_i^{(0)}$, по рекуррентным соотношениям (I) можем выполнять итерационный процесс, а именно:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} (f_1 - a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} + \dots + a_{1m}x_m^{(0)})$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} (f_2 - a_{21}x_1^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)} + \dots + a_{2m}x_m^{(0)})$$

.....

$$x_m^{(1)} = \frac{1}{a_{mm}} (f_m - a_{m1}x_1^{(0)} + a_{m2}x_2^{(0)} + \dots + a_{m,m-1}x_{m-1}^{(0)})$$

Аналогично находятся следующие приближения $x_i^{(2)}$,

где в $x_i^{(0)}$ вместо необходимо $x_i^{(1)}$

подставить .

Или в общем случае:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(f_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \dots + a_{1m}x_m^{(k)}) \right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(f_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2m}x_m^{(k)}) \right)$$

.....

$$x_m^{(k+1)} = \frac{1}{a_{mm}} \left(f_m - (a_{m1}x_1^{(k)} + a_{m2}x_2^{(k)} + \dots + a_{m,m-1}x_{m-1}^{(k)}) \right)$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(c_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Условие окончания итерационного процесса

$$\max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$$

Достаточное условие сходимости

Если выполняется условие диагонального преобладания, т.е.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

То итерационный процесс сходится при любом выборе начального приближения.

Выбор начального приближения влияет на количество итераций, необходимых для получения приближенного решения. Наиболее часто в качестве начального приближения берут

$$x_i^{(0)} = \beta_i = f_i / a_{ii}$$

ИЛИ

$$x_i^{(0)} = \mathbf{0}$$

2. Метод Гаусса – Зейделя

Расчетные формулы имеют вид:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$