Изоморфное вложение графов

Подграфы

- Скажем, что граф $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ изоморфен графу $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$, если существует взаимно-однозначное отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, такое, что:
$$\{v, u\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(v), \varphi(u)\} \in \langle V_2, E_2 \rangle$$
- Введем на множестве графов бинарное отношение изоморфизма $\sim$: скажем, что $G_1 \sim G_2$, если и только если G_1 изоморфен G_2
- Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности
- Если необходимо подчеркнуть, что изоморфизм осуществляется отображением φ, будем писать
$$G_1 \underset{\varphi}{\sim} G_2$$

Изоморфизм графов

- Скажем, что граф $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ изоморфен графу $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$, если существует взаимно-однозначное отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, такое, что:
$$\{v, u\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(v), \varphi(u)\} \in \langle V_2, E_2 \rangle$$
- Введем на множестве графов бинарное отношение изоморфизма $\sim$: скажем, что $G_1 \sim G_2$, если и только если G_1 изоморфен G_2
- Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности
- Если необходимо подчеркнуть, что изоморфизм осуществляется отображением φ, будем писать
$$G_1 \underset{\varphi}{\sim} G_2$$

Изоморфизм графов

- Задача: для двух данных графов $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ определить, существует ли между ними изоморфизм
- Изоморфизма не существует, если $|V_1| \neq |V_2|$
- Будем считать, что $V_1 = V_2 = \{1,2,3, \dots, n\}$
- В таком случае вопрос о существовании изоморфизма $\varphi: V_1 \to V_2$ сводится к вопросу о существовании перестановки $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ элементов множества $\{1,2,3, \dots, n\}$ такой, что

$$\{i, j\} \in E_1 \Leftrightarrow \{x_1, x_2\} \in E_2$$

Инварианты графов

- Пусть Γ – некоторое множество графов, f – функция, определенная на Γ
- Скажем, что f является инвариантом на множестве Γ, если
$$\forall G_1, G_2 \in \Gamma \colon G_1 \sim G_2 \Rightarrow f(G_1) = f(G_2)$$
- Примеры простейших инвариантов:
  - $f(\langle V, E\rangle) = |V|$
  - $f(\langle V, E\rangle) = |E|$
  - $f(\langle V, E\rangle) = \sum_{v \in V} \deg v$
  - …

Локальные инварианты

- Помимо инвариантов графов можно также рассматривать инварианты их фрагментов
- Для примера рассмотрим инварианты вершин
- Скажем, что функция $f(G,v)$, определенная на множестве пар, в которых первой компонентой является граф $G \in \Gamma$, а второй – некоторая вершина графа G, является инвариантом вершин, если

$$\forall G_1, G_2 \in \Gamma: G_1 \underset{\varphi}{\sim} G_2, \forall v \in G_1 \Rightarrow f(G_1, v) = f(G_2, \varphi(v))$$

Локальные инварианты

- Можно рассматривать также инварианты более сложных фрагментов: ребер, путей заданной длины, деревьев и т.д.
- Ясно, что, если f – локальный инвариант, то функция $\varphi: V_1 \to V_2$ не может осуществлять изоморфизм, если в графе G_1 существует такой фрагмент x, что $f(G_1, x) \neq f(G_2, \varphi(x))$
- Примеры локальных инвариантов:
  - Степень вершины
  - Количество путей заданной длины, принадлежащих фрагменту

Локальные инварианты

- Примеры инвариантов вершин:
  - Степень вершины
  - Количество путей заданной длины, проходящих через вершину
  - Количество циклов, проходящих через вершину
  - …
- Примеры локальных инвариантов:
  - Количество путей заданной длины, принадлежащих фрагменту
  - Цикломатическое число фрагмента
  - Хроматическое число фрагмента
  - …

Алгоритм распознавания изоморфизма графов

- Основная процедура – генерация перестановок, осуществляющих изоморфизм
- До запуска этой процедуры производится проверка равенства инвариантов рассматриваемых графов; если обнаружено неравенство, графы не изоморфны
- Каждая перестановка-кандидат проверяется на сохранение локальных инвариантов
- Для простоты будем рассматривать только инварианты вершин

Проверка локальных инвариантов

- Пусть $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ – вектор, определяющий текущее частичное отображение
- Пусть $f_1, f_2, \dots, f_l$ – инварианты вершины
- Для каждой вершины из множества $\{1,2,\dots,k\}$ осуществляется проверка локальных инвариантов:

$$f_i(G_1, j) = f_i\left(G_2, x_j\right), 1 \le i \le l, 1 \le j \le k$$

- Кроме того, необходимо проверить основное условие изоморфизма:

$$\{i, j\} \in E_1 \Leftrightarrow \left\{x_i, x_j\right\} \in E_2, 1 \le i, j \le k$$

Проверка локальных инвариантов

- Если потребовать, чтобы требуемые свойства были выполнены для всех вершин из множества $\{1,2,\dots,k-1\}$, достаточно будет осуществить только проверки

$$f_i(G_1,k)=f_i(G_2,x_k), 1\le i\le l$$
$$\{i,k\}\in E_1 \Leftrightarrow \{x_i,x_k\}\in E_2, 1\le i\le k$$

Порождение перестановок

- Пусть $\langle x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \rangle$ – текущая частичная перестановка
- Рассмотрим множество вершин-кандидатов: $V_k = V \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$
- Для каждой вершины $x \in V_k$ проверим свойства

$$f_i(G_1, k) = f_i(G_2, x), 1 \leq i \leq l$$
$$\{i, k\} \in E_1 \Leftrightarrow \{x_i, x\} \in E_2, 1 \leq i < k$$

- Для всех вершин $x \in V_k$, которые прошли проверку, нужно запустить процесс построения перестановок из частичной перестановки $\langle x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x \rangle$