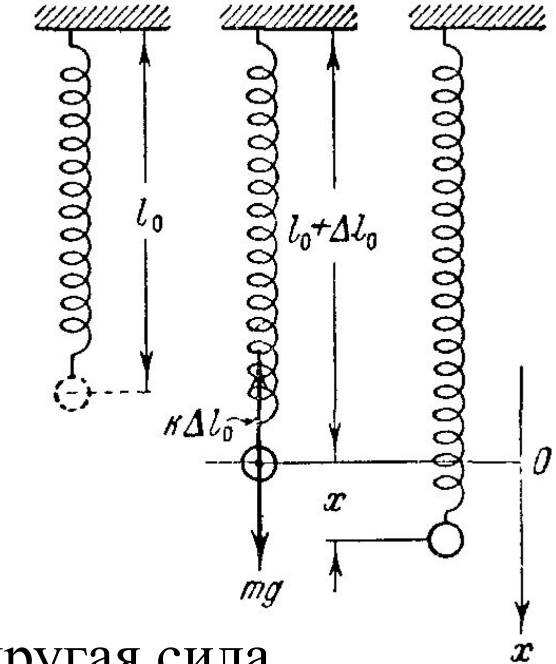
Колебания-1.

Гармоническое колебание и его характеристики. Модель гармонического осциллятора. Уравнение свободных колебаний модельных систем (груз на пружине, математический и физический маятники). Сложение колебаний. Биения.

- Колебания – процессы, отличающиеся повторяемостью. В зависимости от природы бывают: механическими, электромагнитными, электромеханическими.
- Механическими колебаниями называются периодические (или почти периодические) изменения физической величины, описывающей механическое движение (скорость, перемещение, кинетическая и потенциальная энергия и т. п.), это движения тел, повторяющиеся точно (или приблизительно) через одинаковые промежутки времени. Колебательные явления различной физической природы подчиняются общим закономерностям.
- Свободные (собственные) колебания- колебания, происходящие в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия.
- Вынужденные- колебания, в процессе которых система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.
- Параметрические колебания- колебания, при которых происходят периодическое изменение какого-либо параметра системы.

- Рассмотрим систему, состоящую из шарика подвешенного на пружине. В состоянии равновесия- сила тяжести уравновешивается силой упругости:

$$mg = k\,\Delta l_0.$$



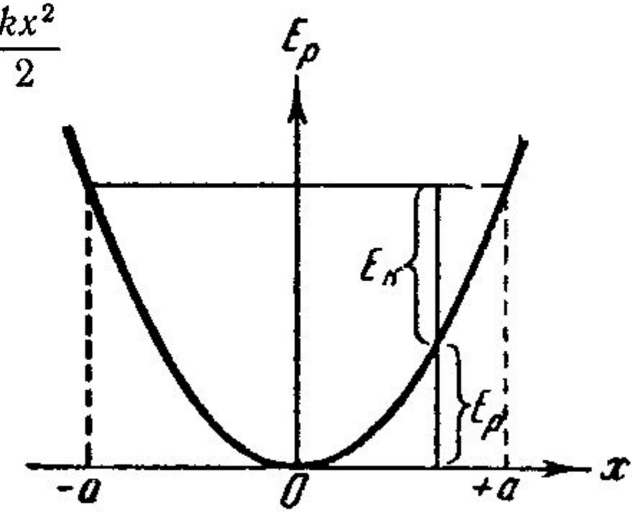
- Х-смещение из положения равновесия, нуль совмещен с положением равновесия.
- Сместим из положения равновесия, то удлинение равно: $\Delta l_0 + x$
- Проекция результирующей силы на ось x:

$$f = mg - k\,(\Delta l_0 + x) \blacktriangleright f = -kx$$ - квазиупругая сила

- Работа для смещения на х против квазиупругой силы:

$$A = \int_0^x (-f)\,dx = \int_0^x kx\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

- Потенциальная энергия системы при смещении из положения равновесия:
- Кинетическая $E_p = \frac{kx^2}{2}$ потенциальная энергии взаимнопревращаются.



- Уравнение второго закона Ньютона для шарика:

$$m\ddot{x} = -kx \;\blacktriangleright\; \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

- Обозначим $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и получим:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Движение шарика под действием силы описывается линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка:

Общее решение имеет вид:

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Движение системы, находящейся под действием квазиупругой силы представляет собой гармонические колебания.

- Закон движения тела, совершающего колебания, задается с помощью некоторой периодической функции времени $x = f(t)$.
- Простейшим видом колебательного процесса являются простые гармонические колебания-колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону косинуса или синуса: $x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$.
- Здесь x – смещение тела от положения равновесия, $\mathbf{x_m}$ – амплитуда колебаний, т. е. максимальное смещение от положения равновесия, ω – циклическая или круговая частота колебаний, t – время. Величина, стоящая под знаком косинуса $\boldsymbol{\varphi = \omega t + \varphi_0}$ называется фазой гармонического процесса. При $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, поэтому $\boldsymbol{\varphi_0}$ называют начальной фазой. Минимальный интервал времени, через который происходит повторение движения тела, называется периодом колебаний **T** .
- Физическая величина, обратная периоду колебаний, называется частотой колебаний: $\boldsymbol{\nu = 1/T}$. Частота колебаний f показывает, сколько колебаний совершается за 1 с. Единица частоты – герц (Гц). Частота колебаний f связана с **циклической (круговой) частотой** ω и периодом колебаний T соотношениями:
- $$w = 2\pi/T = 2\pi\nu$$

- Смещение: $x = a\cos(\omega_0 t + \alpha)$
- Скорость: $v = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$
- Ускорение: $\ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi)$
- Ускорение и смещение в противофазе!
- Кинетическая энергия равна:

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \alpha)$$

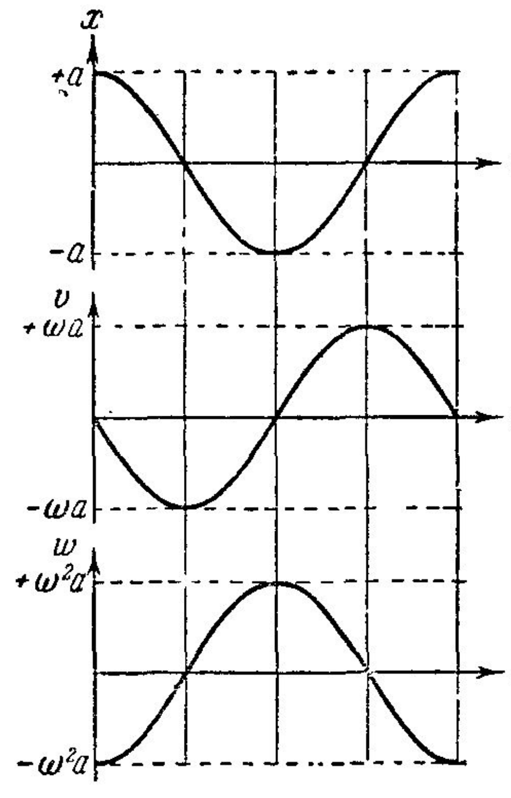
- Потенциальная энергия равна:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \alpha)$$

- Полная энергия:

$$E = E_k + E_p = \frac{ka^2}{2}\left(\text{или } \frac{ma^2\omega_0^2}{2}\right)$$

- Ек и Ер изменяются с частотой в два раза превышающие частоту гармонических колебаний. Среднее значение Ек = среднему значению Ер = ½ Е



- Систему, описываемую уравнением:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

- где $w_0^{\;2}$- постоянная положительная величина, называют гармоническим осциллятором. Решение имеет вид:

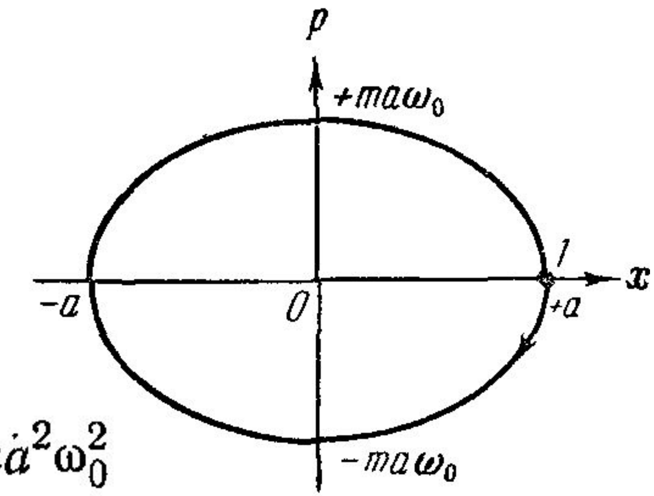
$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

- Гармонический осциллятор представляет собой систему, совершающую гармонические колебания около положения равновесия.
- Импульс гармонического осциллятора:

$$p = m\dot{x} = -ma\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

- Импульс как функция от координаты –фазовая траектория:

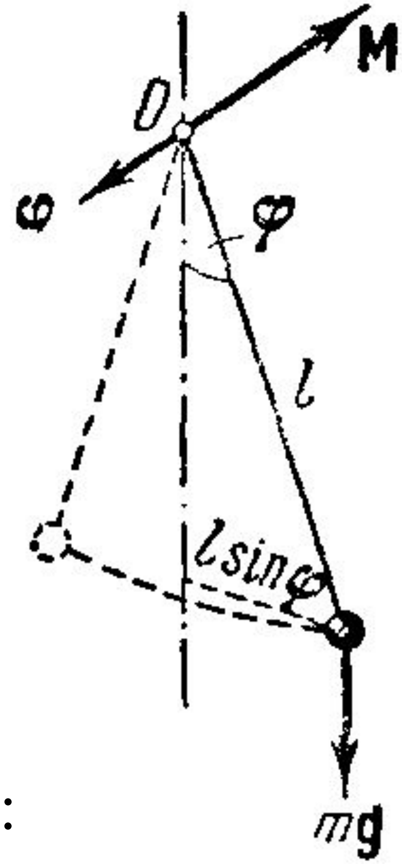
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{m^2 a^2 \omega_0^2} = 1$$



- Плоскость (p,x) – фазовая плоскость.
- Полная энергия гармонического осциллятора = произведению собственной частоты и площади эллипса:

$$E = \nu_0 S\,, S = \pi a m a \omega_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{m a^2 \omega_0^2}{2}$$

- Математический маятник- идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.
- Отклонение маятника от положения равновесия описывается углом φ.
- Вращательный момент при отклонении маятника(«-» - стремится вернуть маятник в положение равновесия): $M = -mgl\sin\varphi$



- Уравнение динамики вращательного движения:
- $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$ ➤ $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$
- Рассмотрим малы колебания sin φ≈ φ и обозначим g/l= w_0^2:

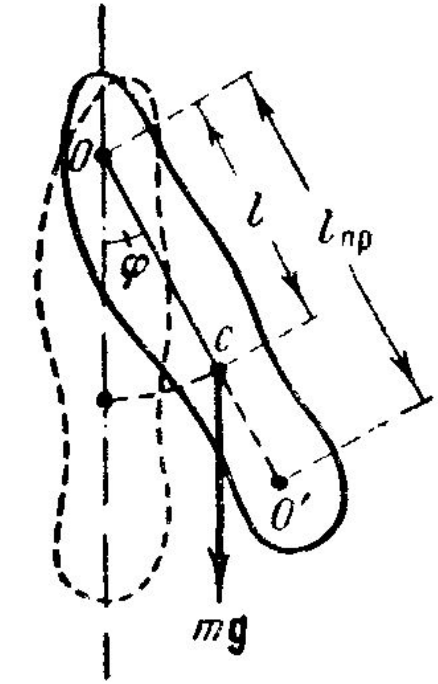
$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

- Решение имеет вид: $\varphi = a\cos(\omega_0 t + \alpha)$ вое отклонение изменяется по гармоническому закону.
- Период колебания математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

- Физическим маятником называется твёрдое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции.
- Вращательный момент, возникающий при смещении из положения равновесия:

$$M = -mgl\sin\varphi$$

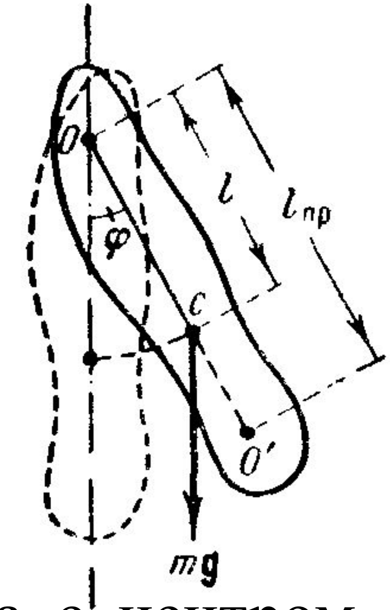
- где m – масса маятника, l- расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника.



- Уравнение динамики вращательного движения: $I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$
- Рассмотрим малы колебания sin φ ≈ φ и обозначим mgl/I= w_0^2: $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$.
- Отклонение от положения равновесия описывается гармоническим законом!
- Частота колебаний зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния от оси вращения до центра масс

- <u>Период колебания физического маятника</u>:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$



- <u>Приведённая длина</u> – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника: $l_{\text{пр}} = \frac{I}{ml}$
- Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, лежащей на расстоянии приведённой длины от оси вращения, называется <u>центром качения физического маятника</u>.
- Подставим теорему Штейнера: $I=I_0+ml^2$ и получим:

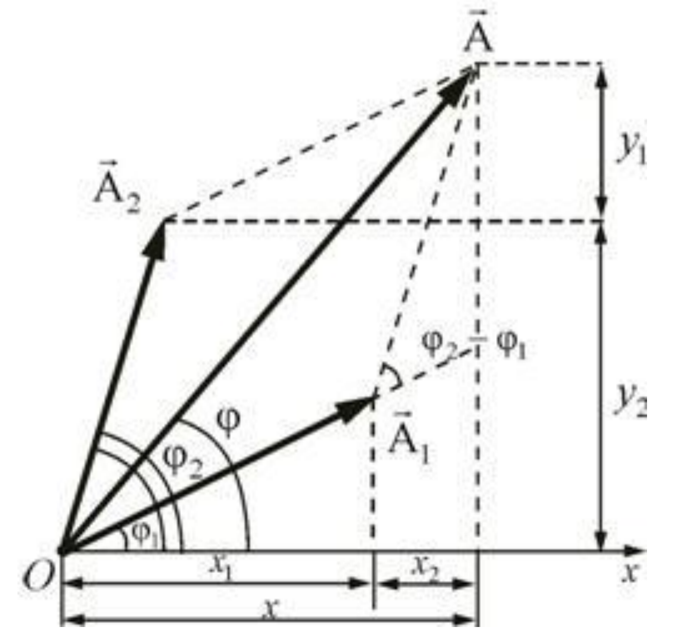
$$l_{\text{пр}} = \frac{I_0}{ml} + l$$

- Приведённая длина всегда больше l! Точка подвеса и центр качения лежат по разные стороны от центра инерции.
- <u>Период колебаний</u>: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}$$

Метод векторных диаграмм

- Пусть точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.
- Пусть колебания заданы уравнениями: $x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1)$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_2)$$



- Отложим из точки *O* вектор под углом φ_1 и вектор под углом φ_2. Оба вектора вращаются против часовой стрелки с одинаковой угловой скоростью ω, поэтому их разность фаз не зависит от времени. Такие колебания называют когерентными.
- Суммарная проекция вектора **A** равна сумме проекций на ось: результирующее колебание изображено вектором амплитуды $\mathbf{A}=\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2$, вращающимся вокруг точки *O* с угловой скоростью ω.
- Результирующее колебание : $x = A\cos(\omega t + \phi)$

- По правилу сложения векторов, суммарная амплитуда:

$$A^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2 =$$

$$= A_1^2 \cos^2 \phi_1 + 2A_1 A_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 + A_2^2 \cos^2 \phi_2 + A_1^2 \sin^2 \phi_1 +$$

$$+ 2A_1 A_2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + A_2^2 \sin^2 \phi_2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2}\cos(\phi_2 - \phi_1) - \frac{1}{2}\cos(\phi_2 + \phi_1) + \frac{1}{2}\cos(\phi_2 - \phi_1) + \frac{1}{2}\cos(\phi_2 + \phi_1) \right] =$$

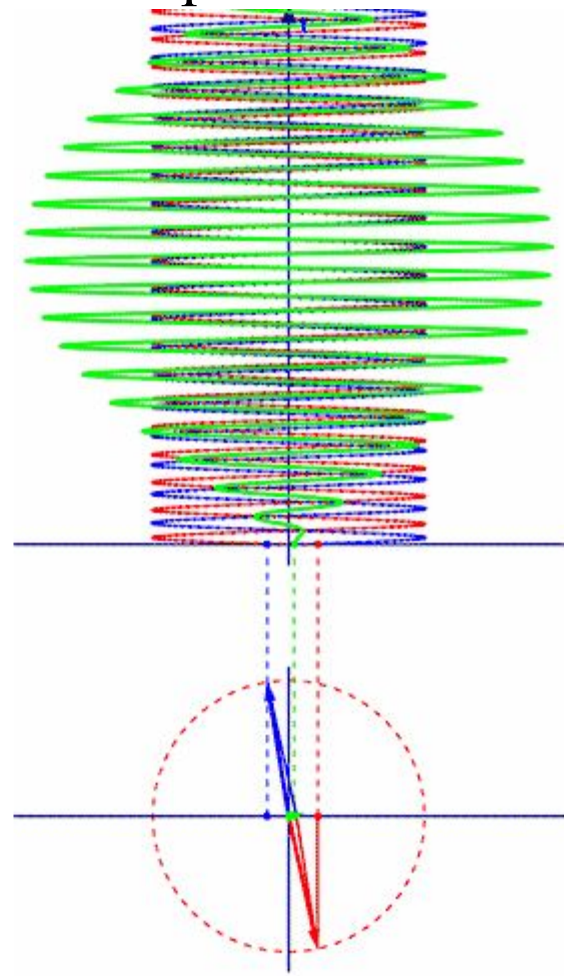
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1).$$

- Результирующая амплитуда: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$
- Начальная фаза: $\operatorname{tg} \phi = \dfrac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$
- Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание <u>в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания</u>.
- <u>Амплитуда *A* результирующего колебания </u>зависит от разности начальных фаз $\phi_2 - \phi_1$.

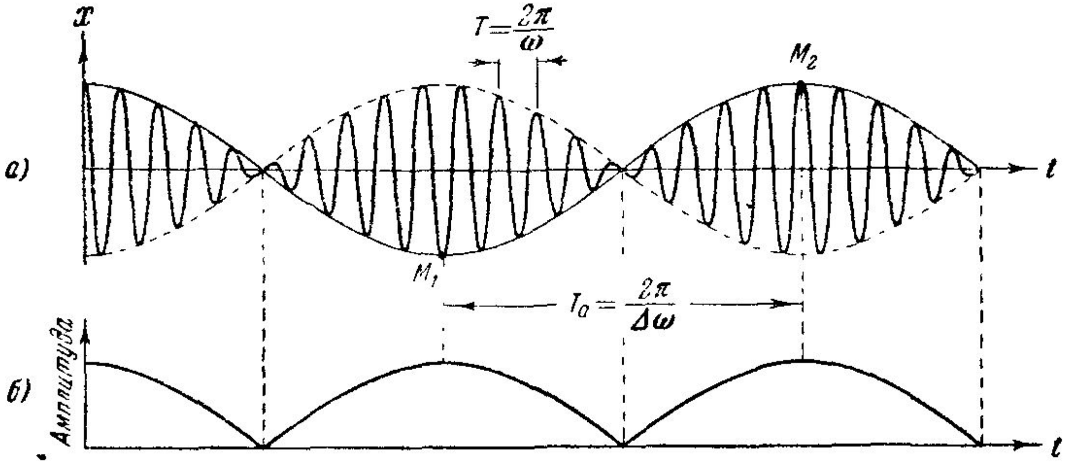
- При сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты результирующее движение можно рассматривать как гармонические колебания с пульсирующей амплитудой- такие колебания - биения
- *w* и *a* – частота и амплитуда 1-ого колебания
- *w*+Δ*w* и *a* - частота и амплитуда 2-ого колебания, Δ*w*<<*w*
- Уравнения:

$$x_1 = a\cos\omega t,$$
$$x_2 = a\cos(\omega + \Delta\omega)\,t$$

$$x = x_1 + x_2 = \left(2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}\,t\right)\cos\omega t$$



$$U(t) = U_0[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)]$$
$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1} \ll 1$$



- Амплитуда положительная величина:

$$\text{амплитуда} = \left|2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|$$

- \- это есть периодическая функция с частотой Δw. Частота пульсаций амплитуды называют <u>частотой биения</u>, равной разности частот складываемых колебаний.

Сложение двух взаимноперпендикулярных колебаний

- Два колебания с частотой *w* совершаются в направлении осей x и y. Начальная фаза первого колебания равна 0.
- Уравнения колебаний:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\omega t, \\ y &= b\cos(\omega t+\alpha), \end{aligned}\right\}$$

- α – разность фаз колебаний
- Преобразуем:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\omega t, \\ y &= b\cos(\omega t+\alpha), \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos\omega t = \frac{x}{a} \Rightarrow \sin\omega t = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha$$

- Получили уравнение эллипса с осями вдоль x и y. Ориентация и величина полуосей эллипсов зависит от амплитуд *a* и *b* и разности фаз *α*

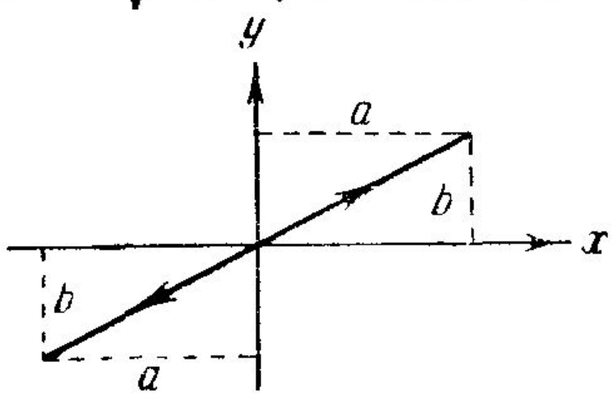
1) $\alpha = 0$

Уравнение:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\omega t$$

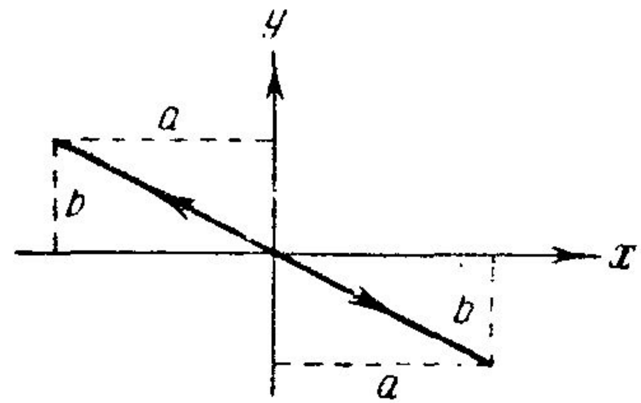


2) $\alpha = \pm\pi$

Уравнение:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$



Результирующее движение – гармонические колебания вдоль прямой с частотой *w* и амплитудой: $\sqrt{a^2 + b^2}$

3) $\alpha = \pm \pi/2$ - Уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\alpha = \pi/2$

Уравнение:

$x = a\cos\omega t,$

$y = -b\sin\omega t.$

Движение по часовой стрелке

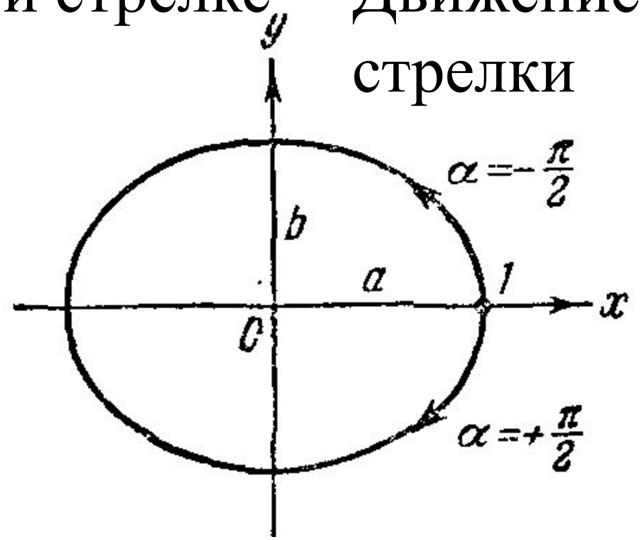
$\alpha = -\pi/2$

Уравнение:

$x = a\cos\omega t,$

$y = b\sin\omega t.$

Движение против часовой стрелки



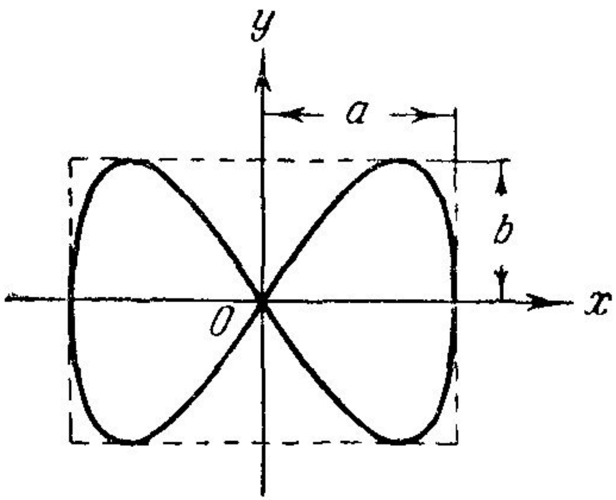
- Равномерное движение по окружности есть сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний:
- «+» - против часовой стрелки,
- «-»-по часовой стрелки.

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\omega t, \\ y &= \pm R\sin\omega t \end{aligned}\right\}$$

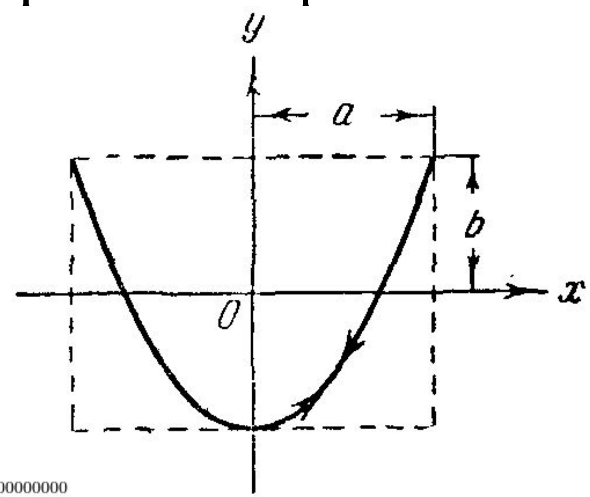
Фигуры Лиссажу:

- - замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях с разыми частотами.

Отношение частот 1:2
и разность фаз π/2



Отношение частот 1:2
и разность фаз 0



a/b – от 0 до 1
разность фаз 0