

# Комбинаторика

# Что это?

- Комбинаторика – раздел науки, в котором изучаются комбинаторные задачи.
- Комбинаторика имеет дело с перебором вариантов и подсчетом их числа.

*«Забавные и приятные задачи,  
которые решаются в числах» 1612г.*



*Баше де Меризиак –  
французский  
математик, философ  
и поэт.*

# Перестановки

Перестановка – конечное множество, в котором установлен порядок его элементов.

Например: ПУХ, УПХ, ХУП, ПХУ, УХП,  
ХПУ

Получили 6 различных перестановок из 3 букв.

Возьмем слово из  $n$  различных букв и составим все его анаграммы:

- На 1 место ставим любую из  $n$  букв
- На 2 место – любую из  $n-1$  оставшихся
- На 3 место – любую из  $n-2$  оставшихся ит.д.

Кол-во перестановок  $P_n = n(n-1)(n-2) \dots * 2 * 1$

$$P_n = 1 * 2 * \dots * (n-2)(n-1)n = n! \text{ (факториал)}$$

$$P_n = n!$$

# Пример задач на перестановки

1. Сколько различных трехцветных флагов с тремя горизонтальными полосами можно получить, используя зеленый, пурпурный и желтый цвета?
2. Имеется 10 различных книг, среди которых есть трехтомник. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке, так что книги трехтомника стоят вместе, но в любом порядке?

# Решите сами:

- 1) Сколько анаграмм можно получить из слова «бремя»?  $5! = 120$
- 2) Сколькими способами можно сесть на рельсы 7 людям?  $7! = 5040$
- 3) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?  $8! = 40320$
- 4) Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу?

$$20!/20 = 19!$$

# Размещения



## Без повторений:

Сколько  $k$ -буквенных слов с разными буквами можно составить из алфавита, содержащего  $n$  букв?

## С повторениями:

Сколько  $k$ -буквенных слов можно составить из алфавита, содержащего  $n$  букв?

# Размещения с повторениями

- 1) На 1 место ставим любую из  $n$  букв
- 2) На 2 место ставим любую из  $n$  букв (и так  $k$  раз).

Получим:  $n * n * n * \dots * n = n^k$



$k$  раз

$$B_n^k = n^k$$

# Размещения с повторениями

- 1) Сколько существует различных автобусных билетиков из 6 цифр?
- 2) Сколько существует различных автобусных билетиков из 6 цифр, так чтобы на 4 месте стояло нечетное число, а на 2 месте либо 3, либо 5, либо 7?

Размещения с повторениями проще рассматривать как произведение количества вариантов на каждом месте.



# Размещения без повторений

Снова представим, что выписываем слова с разными буквами.

- 1) На первое место ставим любую из  $n$  букв.
- 2) На 2 место – любую из  $n-1$  оставшихся ит.д.
- К) На  $k$  место ставим одну из  $n-(k-1)$  оставшихся.

Получим:  $A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$

Умножим на  $(n-k)!/(n-k)!$

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) \cdot (n-k)! / (n-k)! = n! / (n-k)!$$

$$A_n^k = n! / (n-k)!$$

# Задачи:

- 1) В вагоне есть 10 свободных мест. В вагон вошли 6 пассажиров. Сколькими способами они смогут разместиться в этом вагоне на свободных местах?
- 2) Сколькими способами могут быть присуждены первая вторая и третья премии трем лицам из 10 соревнующихся?
- 3) Номер машины состоит из 3-х букв 26-буквенного алфавита и четырех цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?(возможен номер ааа0000)

# Сочетания

Определение: Подмножества, составленные из  $n$  элементов данного множества и содержащие  $k$  элементов в каждом подмножестве, называют сочетанием из  $n$  элементов по  $k$ .

По сути - число способов выбрать некоторое количество элементов из данного множества.

Пишется  $C_n^k$

Читается – «С из  $n$  по  $k$ »

*Перестановки*

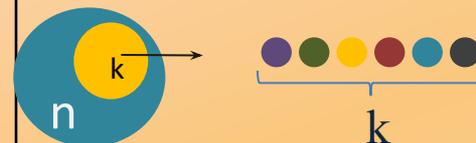
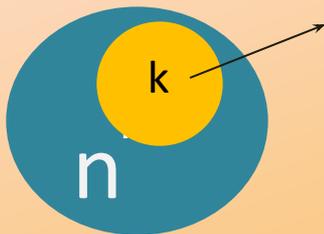
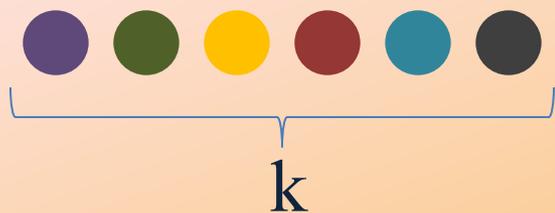
*Сочетания*

*Размещения*

Переставить k элементов

Выбрать k элементов из n  
(порядок не важен)

Выбрать k элементов из n  
и переставить



$$P_n = k!$$

$$C_n^k = A_n^k / P_n$$

$$C_n^k = n! / ((n-k)!k!)$$

$$A_n^k = n! / (n-k)!$$

# Примеры решения задач

- 1) Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из нашего класса (32 человека)?
- 2) В вазе стоят 10 красных и 5 белых роз. Выбирают две красные и одну белую розу. Сколько различных букетов можно составить?

# Задачи:

1. Сколько попыток было бы достаточно, чтобы взломать кодовый замок от входной двери (раньше везде такие стояли, пароль состоит из 3 цифр, которые нужно нажать одновременно)?  $C_{10}^3 = 210$
2. Каким числом способов можно выбрать из 30 человек команду из 6 человек и среди них одного капитана?  $C_{30}^6 * 6$
3. Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если известно, что каждый участник сыграл с каждым из остальных по одной партии и всего было сыграно 136 партий? 17
4. Замок в автоматической камере хранения открывается лишь после того, как набирается определенный набор из четырех цифр. Пассажир забыл набранный номер, но помнил, что в нем все цифры были разные и шли они в порядке возрастания. Какое наибольшее количество комбинаций цифр ему придется перебрать, чтобы открыть замок?  $C_{10}^4$

# Биномиальные коэффициенты

**ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ**

|     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |   |           |    |    |   |   |
|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---|---|-----------|----|----|---|---|
| n=0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 |   | $(a+b)^n$ |    |    |   |   |
| n=1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 1 |           |    |    |   |   |
| n=2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 2 | 1         |    |    |   |   |
| n=3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 3 | 3         | 1  |    |   |   |
| n=4 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 4 | 6         | 4  | 1  |   |   |
| n=5 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 5 | 10        | 10 | 5  | 1 |   |
| n=6 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 6 | 15        | 20 | 15 | 6 | 1 |
|     |  |  |  |  |  |  |  |  |  | · | · | ·         | ·  | ·  | · | · |

Бином  
Ньютона

$(a+b)^n$  – Бином Ньютона

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)$$

n  
раз

# Другие комбинаторные конструкции

В прямоугольном городе 4 улицы, идущие в одном направлении, и 5 улиц, им перпендикулярные, разбили город на квадратные блоки (заметим, что число блоков в каждом направлении на единицу меньше числа улиц). Каким числом способов можно пройти из одного угла города в противоположный кратчайшим путем?

