Комбинаторика

Что это?

- Комбинаторика – раздел науки, в котором изучаются комбинаторные задачи.

- Комбинаторика имеет дело с перебором вариантов и подсчетом их числа.

«Забавные и приятные задачи, которые решаются в числах» 1612г.

Баше де Меризиак – французский математик, философ и поэт.

Перестановки

Перестановка – конечное множество, в котором установлен порядок его элементов.

Например: ПУХ, УПХ, ХУП, ПХУ, УХП, ХПУ

Получили 6 различных перестановок из 3 букв.

P_n

Возьмем слово из n различных букв и составим все его анаграммы:

- На 1 место ставим любую из n букв
- На 2 место – любую из n-1 оставшихся
- На 3 место – любую из n-2 оставшихся ит.д.

Кол-во перестановок $P_n = n(n-1)(n-2)*\ldots*2*1$

$P_n = 1*2*\ldots*(n-2)(n-1)n = n!$ (факториал)

$$\boxed{P_n = n!}$$

Пример задач на перестановки

1. Сколько различных трехцветных флагов с тремя горизонтальными полосами можно получить, используя зеленый, пурпурный и желтый цвета?
2. Имеется 10 различных книг, среди которых есть трехтомник. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке, так что книги трехтомника стоят вместе, но в любом порядке?

Решите сами:

1) Сколько анаграмм можно получить из слова «бремя»?

$5! = 120$

2) Сколькими способами можно сесть на рельсы 7 людям?

$7! = 5040$

3) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

$8! = 40320$

4) Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу?

$20!/20 = 19!$

Размещения

Без повторений:

Сколько *k*-буквенных слов с разными буквами можно составить из алфавита, содержащего *n* букв?

С повторениями:

Сколько *k*-буквенных слов можно составить из алфавита, содержащего *n* букв?

Размещения с повторениями

1) На 1 место ставим любую из n букв
2) На 2 место ставим любую из n букв (и так k раз).

Получим: $\underbrace{n*n*n*\ldots*n}_{k\ раз} = n^k$

$$\boxed{B_n^k = n^k}$$

Размещения с повторениями

1) Сколько существует различных автобусных билетиков из 6 цифр?
2) Сколько существует различных автобусных билетиков из 6 цифр, так чтобы на 4 месте стояло нечетное число, а на 2 месте либо 3, либо 5, либо 7?

Размещения с повторениями проще рассматривать как произведение количества вариантов на каждом месте.

Размещения без повторений

Снова представим, что выписываем слова с разными буквами.

1) На первое место ставим любую из n букв.
2) На 2 место – любую из n-1 оставшихся и т.д.

К) На k место ставим одну из n-(k-1) оставшихся.

Получим: A_n^k = n(n-1)(n-2)*…* (n-k+1)

Умножим на (n-k)!/(n-k)!

n(n-1)(n-2)*…* (n-k+1)*(n-k)!/(n-k)! = n!/(n-k)!

A_n^k = n!/(n-k)!

Задачи:

1) В вагоне есть 10 свободных мест. В вагон вошли 6 пассажиров. Сколькими способами они смогут разместиться в этом вагоне на свободных местах?
2) Сколькими способами могут быть присуждены первая вторая и третья премии трем лицам из 10 соревнующихся?
3) Номер машины состоит из 3-х букв 26-буквенного алфавита и четырех цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?(возможен номер ааа0000)

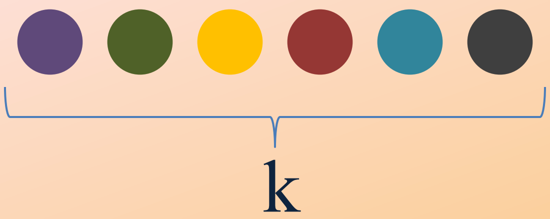
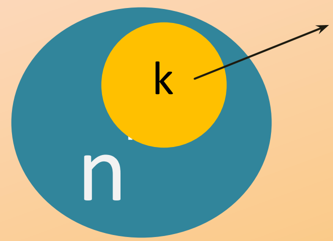
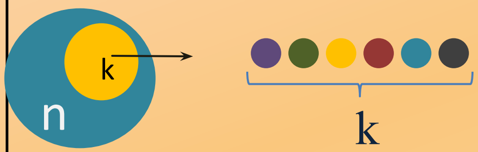
Сочетания

Определение: Подмножества, составленные из n элементов данного множества и содержащие k элементов в каждом подмножестве, называют сочетанием из n элементов по k.

По сути - число способов выбрать некоторое количество элементов из данного множества.

Пишется – C_n^k

Читается – «С из n по k»

Перестановки	*Сочетания*	*Размещения*
Переставить k элементов	Выбрать k элементов из n (порядок не важен)	Выбрать k элементов из n и переставить
		
$P_n = k!$	$C_n^k = A_n^k / P_n$ $\boxed{C_n^k = n!/((n-k)!k!)}$	$A_n^k = n!/(n-k)!$

Примеры решения задач

1) Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из нашего класса (32 человека)?
2) В вазе стоят 10 красных и 5 белых роз. Выбирают две красные и одну белую розу. Сколько различных букетов можно составить?

Задачи:

1. Сколько попыток было бы достаточно, чтобы взломать кодовый замок от входной двери (раньше везде такие стояли, пароль состоит из 3 цифр, которые нужно нажать одновременно)? $C_{10}^{3} = 210$
2. Каким числом способов можно выбрать из 30 человек команду из 6 человек и среди них одного капитана? $C_{30}^{6} * 6$
3. Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если известно, что каждый участник сыграл с каждым из остальных по одной партии и всего было сыграно 136 партий? 17
4. Замок в автоматической камере хранения открывается лишь после того, как набирается определенный набор из четырех цифр. Пассажир забыл набранный номер, но помнил, что в нем все цифры были разные и шли они в порядке возрастания. Какое наибольшее количество комбинаций цифр ему придется перебрать, чтобы открыть замок? C_{10}^{4}

Биномиальные коэффициенты

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

n=0	1	$(a+b)^n$
n=1	1 1	
n=2	1 2 1	
n=3	1 3 3 1	
n=4	1 4 6 4 1	
n=5	1 5 10 10 5 1	
n=6	1 6 15 20 15 6 1	
	. . . .	

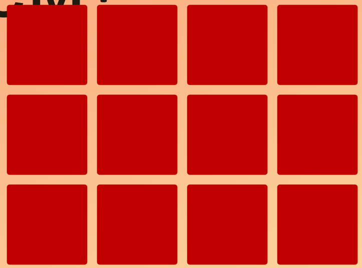
Бином Ньютона

(a+b)^n – Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)*\ldots*(a+b)}_{n\ раз}$$

Другие комбинаторные конструкции

В прямоугольном городе 4 улицы, идущие в одном направлении, и 5 улиц, им перпендикулярные, разбили город на квадратные блоки (заметим, что число блоков в каждом направлении на единицу меньше числа улиц). Каким числом способов можно пройти из одного угла города в противоположный кратчайшим путем?



3x4
блока
4x5 улиц