

Комбинаторика

Что это?

- Комбинаторика – раздел науки, в котором изучаются комбинаторные задачи.
- Комбинаторика имеет дело с перебором вариантов и подсчетом их числа.

*«Забавные и приятные задачи,
которые решаются в числах» 1612г.*



*Баше де Меризиак –
французский
математик, философ
и поэт.*

Перестановки

Перестановка – конечное множество, в котором установлен порядок его элементов.

Например: ПУХ, УПХ, ХУП, ПХУ, УХП,
ХПУ

Получили 6 различных перестановок из 3 букв.

Возьмем слово из n различных букв и составим все его анаграммы:

- На 1 место ставим любую из n букв
- На 2 место – любую из $n-1$ оставшихся
- На 3 место – любую из $n-2$ оставшихся ит.д.

Кол-во перестановок $P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n = n! \text{ (факториал)}$$

$$P_n = n!$$

Пример задач на перестановки

1. Сколько различных трехцветных флагов с тремя горизонтальными полосами можно получить, используя зеленый, пурпурный и желтый цвета?
2. Имеется 10 различных книг, среди которых есть трехтомник. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке, так что книги трехтомника стоят вместе, но в любом порядке?

Решите сами:

- 1) Сколько анаграмм можно получить из слова «бремя»? $5! = 120$
- 2) Сколькими способами можно сесть на рельсы 7 людям? $7! = 5040$
- 3) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга? $8! = 40320$
- 4) Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу?

$$20!/20 = 19!$$

Размещения

```
graph TD; A[Размещения] --> B[Без повторений]; A --> C[С повторениями];
```

Без повторений:

Сколько k -буквенных слов с разными буквами можно составить из алфавита, содержащего n букв?

С повторениями:

Сколько k -буквенных слов можно составить из алфавита, содержащего n букв?

Размещения с повторениями

- 1) На 1 место ставим любую из n букв
- 2) На 2 место ставим любую из n букв (и так k раз).

Получим: $n * n * n * \dots * n = n^k$



k раз

$$B_n^k = n^k$$

Размещения с повторениями

- 1) Сколько существует различных автобусных билетиков из 6 цифр?
- 2) Сколько существует различных автобусных билетиков из 6 цифр, так чтобы на 4 месте стояло нечетное число, а на 2 месте либо 3, либо 5, либо 7?

Размещения с повторениями проще рассматривать как произведение количества вариантов на каждом месте.



Размещения без повторений

Снова представим, что выписываем слова с разными буквами.

- 1) На первое место ставим любую из n букв.
- 2) На 2 место – любую из $n-1$ оставшихся ит.д.
- К) На k место ставим одну из $n-(k-1)$ оставшихся.

Получим: $A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$

Умножим на $(n-k)!/(n-k)!$

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) \cdot (n-k)! / (n-k)! = n! / (n-k)!$$

$$A_n^k = n! / (n-k)!$$

Задачи:

- 1) В вагоне есть 10 свободных мест. В вагон вошли 6 пассажиров. Сколькими способами они смогут разместиться в этом вагоне на свободных местах?
- 2) Сколькими способами могут быть присуждены первая вторая и третья премии трем лицам из 10 соревнующихся?
- 3) Номер машины состоит из 3-х букв 26-буквенного алфавита и четырех цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?(возможен номер ааа0000)

Сочетания

Определение: Подмножества, составленные из n элементов данного множества и содержащие k элементов в каждом подмножестве, называют сочетанием из n элементов по k .

По сути - число способов выбрать некоторое количество элементов из данного множества.

Пишется C_n^k

Читается – «С из n по k »

Перестановки

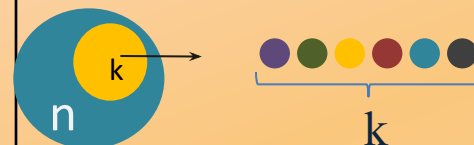
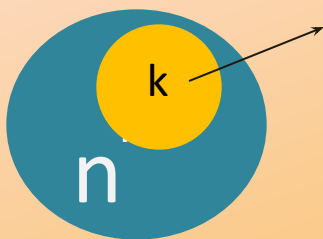
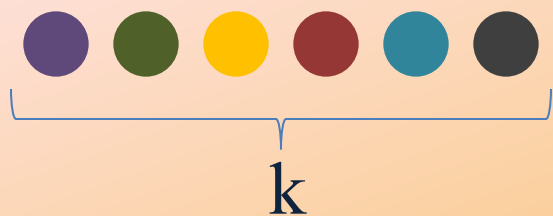
Сочетания

Размещения

Переставить k элементов

Выбрать k элементов из n
(порядок не важен)

Выбрать k элементов из n
и переставить



$$P_n = k!$$

$$C_n^k = A_n^k / P_n$$

$$C_n^k = n! / ((n-k)!k!)$$

$$A_n^k = n! / (n-k)!$$

Примеры решения задач

- 1) Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из нашего класса (32 человека)?
- 2) В вазе стоят 10 красных и 5 белых роз. Выбирают две красные и одну белую розу. Сколько различных букетов можно составить?

Задачи:

1. Сколько попыток было бы достаточно, чтобы взломать кодовый замок от входной двери (раньше везде такие стояли, пароль состоит из 3 цифр, которые нужно нажать одновременно)? $C_{10}^3 = 210$
2. Каким числом способов можно выбрать из 30 человек команду из 6 человек и среди них одного капитана? $C_{30}^6 * 6$
3. Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если известно, что каждый участник сыграл с каждым из остальных по одной партии и всего было сыграно 136 партий? 17
4. Замок в автоматической камере хранения открывается лишь после того, как набирается определенный набор из четырех цифр. Пассажир забыл набранный номер, но помнил, что в нем все цифры были разные и шли они в порядке возрастания. Какое наибольшее количество комбинаций цифр ему придется перебрать, чтобы открыть замок? C_{10}^4

Биномиальные коэффициенты

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

n=0								1	$(a+b)^n$					
n=1								1	1					
n=2								1	2	1				
n=3								1	3	3	1			
n=4								1	4	6	4	1		
n=5								1	5	10	10	5	1	
n=6								1	6	15	20	15	6	1
								·	·	·	·	·	·	·

Бином
Ньютона

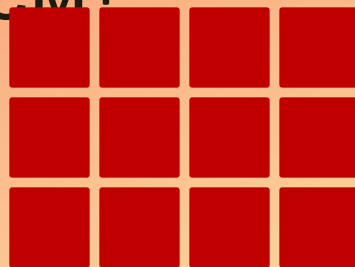
$(a+b)^n$ – Бином Ньютона

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^* \dots^* (a+b)$$

n
раз

Другие комбинаторные конструкции

В прямоугольном городе 4 улицы, идущие в одном направлении, и 5 улиц, им перпендикулярные, разбили город на квадратные блоки (заметим, что число блоков в каждом направлении на единицу меньше числа улиц). Каким числом способов можно пройти из одного угла города в противоположный кратчайшим путем?



3x4

блока

4x5 улиц