Коммутативность операторов Дункла

Сибряева Екатерина
МИнф 51

Докажем, что семейство $\{T_\xi\}_{\xi\in V}$ операторов Дункла является коммутативным относительно композиции.

Теорема 4. Для произвольных ненулевых векторов $\xi, \eta \in V$ соответствующие операторы Дункла коммутируют:

$$T_\xi T_\eta = T_\eta T_\xi.$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$T_\xi T_\eta - T_\eta T_\xi =$$

$$= \left(\partial_\xi + \sum_{\alpha\in R_+} k_\alpha(\alpha \mid \xi)\frac{1-s_\alpha}{(x\mid\alpha)}\right)\left(\partial_\eta + \sum_{\beta\in R_+} k_\beta(\beta \mid \eta)\frac{1-s_\beta}{(x\mid\beta)}\right) -$$

$$- \left(\partial_\eta + \sum_{\beta\in R_+} k_\beta(\beta \mid \eta)\frac{1-s_\beta}{(x\mid\beta)}\right)\left(\partial_\xi + \sum_{\alpha\in R_+} k_\alpha(\alpha \mid \xi)\frac{1-s_\alpha}{(x\mid\alpha)}\right),$$

которую перепишем в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
T_\xi T_\eta - T_\eta T_\xi &= (\partial_\xi \partial_\eta - \partial_\eta \partial_\xi) + \\
&+ \partial_\xi \left(\sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x \mid \beta)} \right) - \left(\sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x \mid \beta)} \right) \partial_\xi - \\
&- \partial_\eta \left(\sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha (\alpha \mid \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x \mid \alpha)} \right) + \left(\sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha (\alpha \mid \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x \mid \alpha)} \right) \partial_\eta + \\
&+ \left(\sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha (\alpha \mid \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x \mid \alpha)} \right) \left(\sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x \mid \beta)} \right) - \\
&- \left(\sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x \mid \beta)} \right) \left(\sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha (\alpha \mid \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x \mid \alpha)} \right).
\end{aligned}
$$

Очевидно $\partial_\xi \partial_\eta - \partial_\eta \partial_\xi = 0$. Далее, преобразуем выражение

$$\partial_\xi \left(\sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x \mid \beta)} \right) - \left(\sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x \mid \beta)} \right) \partial_\xi =$$

$$= \sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \partial_\xi \left(\frac{1 - s_\beta}{(x \mid \beta)} \right) - \sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x \mid \beta)} \partial_\xi =$$

$$= \sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \left(\partial_\xi \left(\frac{1 - s_\beta}{(x \mid \beta)} \right) - \frac{1 - s_\beta}{(x \mid \beta)} \partial_\xi \right) =$$

$$= \sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \left(- \frac{(\xi \mid \beta)}{(x \mid \beta)^2} (1 - s_\beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(x \mid \beta)} (\partial_\xi (1 - s_\beta) - (1 - s_\beta) \partial_\xi) \right) =$$

$$= \sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \left(- \frac{(\xi \mid \beta)}{(x \mid \beta)^2} (1 - s_\beta) - \frac{1}{(x \mid \beta)} (\partial_\xi s_\beta - s_\beta \partial_\xi) \right).$$

Из эквивариантности оператора ∇ вытекает, что

$$\partial_\xi s_\beta - s_\beta \partial_\xi = -\frac{2 s_\beta \partial_\beta}{(\beta \mid \beta)}(\beta \mid \xi).$$

Поэтому рассматриваемая разность может быть преобразована к выражению

$$\sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \left(-\frac{(\xi \mid \beta)}{(x \mid \beta)^2}(1 - s_\beta) + \frac{1}{(x \mid \beta)} \frac{2\partial_\beta}{(\beta \mid \beta)}(\beta \mid \xi) \right) =$$

$$= -\sum_{\beta \in R_+} k_\beta \frac{(\beta \mid \eta)(\beta \mid \xi)}{(x \mid \beta)^2}(1 - s_\beta) + \sum_{\beta \in R_+} k_\beta \frac{(\beta \mid \eta)(\beta \mid \xi)}{(x \mid \beta)(\beta \mid \beta)} 2\partial_\beta,$$

которое симметрично относительно векторов ξ и η. Но это означает, что к такому же выражению может быть приведена и разность

$$\partial_\eta \left(\sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha (\alpha \mid \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x \mid \alpha)} \right) - \left(\sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha (\alpha \mid \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x \mid \alpha)} \right) \partial_\eta .$$

Таким образом, получаем следующее соотношение:

$$T_\xi T_\eta - T_\eta T_\xi = \left(\sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha (\alpha \mid \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x \mid \alpha)} \right) \left(\sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x \mid \beta)} \right) -$$

$$- \left(\sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta \mid \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x \mid \beta)} \right) \left(\sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha (\alpha \mid \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x \mid \alpha)} \right) .$$

Преобразуем правую часть последнего равенства:

$$\sum_{\alpha,\beta\in R_+} k_\alpha k_\beta(\alpha\mid\xi)(\beta\mid\eta)\frac{1-s_\alpha}{(x\mid\alpha)}\cdot\frac{1-s_\beta}{(x\mid\beta)}-$$

$$-\sum_{\beta,\alpha\in R_+} k_\beta k_\alpha(\beta\mid\eta)(\alpha\mid\xi)\frac{1-s_\beta}{(x\mid\beta)}\cdot\frac{1-s_\alpha}{(x\mid\alpha)}=$$

$$=\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta(\alpha\mid\xi)(\beta\mid\eta)\frac{1-s_\alpha}{(x\mid\alpha)}\cdot\frac{1-s_\beta}{(x\mid\beta)}-$$

$$-\sum_{\substack{\beta,\alpha\in R_+\\ \beta\neq\alpha}} k_\beta k_\alpha(\beta\mid\eta)(\alpha\mid\xi)\frac{1-s_\beta}{(x\mid\beta)}\cdot\frac{1-s_\alpha}{(x\mid\alpha)}=$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha\mid\xi)(\beta\mid\eta)\left(\frac{1-s_\beta}{(x\mid\alpha)(x\mid\beta)} - \frac{s_\alpha - s_\alpha s_\beta}{(x\mid\alpha)(s_\alpha x\mid\beta)}\right) -$$

$$- \sum_{\substack{\beta,\alpha\in R_+\\ \beta\neq\alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta\mid\eta)(\alpha\mid\xi)\left(\frac{1-s_\alpha}{(x\mid\beta)(x\mid\alpha)} - \frac{s_\beta - s_\beta s_\alpha}{(x\mid\beta)(s_\beta x\mid\alpha)}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha\mid\xi)(\beta\mid\eta)\left(\frac{-s_\beta}{(x\mid\alpha)(x\mid\beta)} - \frac{s_\alpha - s_\alpha s_\beta}{(x\mid\alpha)(s_\alpha x\mid\beta)}\right) -$$

$$- \sum_{\substack{\beta,\alpha\in R_+\\ \beta\neq\alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta\mid\eta)(\alpha\mid\xi)\left(\frac{-s_\alpha}{(x\mid\beta)(x\mid\alpha)} - \frac{s_\beta - s_\beta s_\alpha}{(x\mid\beta)(s_\beta x\mid\alpha)}\right) =$$

$$= \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3\,,$$

где

$$\Omega_1 = -\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha \mid \xi)(\beta \mid \eta)\frac{s_\beta}{(x \mid \alpha)(x \mid \beta)} +$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\alpha\in R_+\\ \beta\neq\alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta \mid \eta)(\alpha \mid \xi)\frac{s_\beta}{(x \mid \beta)(s_\beta x \mid \alpha)},$$

$$\Omega_2 = -\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha \mid \xi)(\beta \mid \eta)\frac{s_\alpha}{(x \mid \alpha)(x \mid \beta)} +$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\alpha\in R_+\\ \beta\neq\alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta \mid \eta)(\alpha \mid \xi)\frac{s_\alpha}{(x \mid \alpha)(s_\alpha x \mid \beta)},$$

$$\Omega_3 = \sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha \mid \xi)(\beta \mid \eta)\frac{s_\alpha s_\beta}{(x \mid \alpha)(s_\alpha x \mid \beta)} -$$

$$-\sum_{\substack{\beta,\alpha\in R_+\\ \beta\neq\alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta \mid \eta)(\alpha \mid \xi)\frac{s_\beta s_\alpha}{(s_\beta x \mid \alpha)(x \mid \beta)}.$$

Рассмотрим сумму Ω_1, которую преобразуем, пользуясь инвариантностью скалярного произведения относительно действия группы Коксетера.

Получаем

$$\Omega_1 = -\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha \mid \xi)(\beta \mid \eta)\frac{s_\beta}{(x \mid \alpha)(x \mid \beta)} +$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\alpha\in R_+\\ \beta\neq\alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta \mid \eta)(s_\beta\alpha \mid s_\beta\xi)\frac{s_\beta}{(x \mid \beta)(x \mid s_\beta\alpha)}.$$

Ясно, что при фиксированном β найдется единственный положительный корень α ′, такой что $s_\beta\alpha = \pm\alpha'$. Замечая, что во второй сумме корень $s_\beta\alpha$ находится в числителе и знаменателе, имеем

$$\Omega_1 = -\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha \mid \xi)(\beta \mid \eta)\frac{s_\beta}{(x \mid \alpha)(x \mid \beta)} +$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\alpha'\in R_+\\ \beta\neq\alpha'}} k_\beta k_{\alpha'} (\beta \mid \eta)(\alpha' \mid s_\beta\xi)\frac{s_\beta}{(x \mid \beta)(x \mid \alpha')} =$$

$$= -\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha \mid \xi)(\beta \mid \eta)\frac{s_\beta}{(x \mid \alpha)(x \mid \beta)} +$$

$$+\sum_{\substack{\beta,\alpha'\in R_+\\ \beta\neq\alpha'}} k_\beta k_{\alpha'} (\beta \mid \eta)\left(\alpha' \middle| \xi - \frac{2(\xi \mid \beta)}{(\beta \mid \beta)}\beta\right)\frac{s_\beta}{(x \mid \beta)(x \mid \alpha')} =$$

$$= -\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha \mid \xi)(\beta \mid \eta)\frac{s_\beta}{(x \mid \alpha)(x \mid \beta)} +$$

$$+ \sum_{\substack{\beta,\alpha'\in R_+\\ \beta\neq\alpha'}} k_\beta k_{\alpha'} (\beta \mid \eta)(\alpha' \mid \xi)\frac{s_\beta}{(x \mid \beta)(x \mid \alpha')} -$$

$$- \sum_{\substack{\beta,\alpha'\in R_+\\ \beta\neq\alpha'}} k_\beta k_{\alpha'} \frac{2(\beta \mid \eta)(\xi \mid \beta)(\beta \mid \alpha')}{(\beta \mid \beta)} \cdot \frac{s_\beta}{(x \mid \beta)(x \mid \alpha')}.$$

Заменяя α ′ на α, окончательно получаем, что

$$\Omega_1 = -\sum_{\substack{\beta,\alpha\in R_+\\ \beta\neq\alpha}} k_\beta k_\alpha \frac{2(\beta \mid \eta)(\xi \mid \beta)(\beta \mid \alpha)}{(\beta \mid \beta)} \cdot \frac{s_\beta}{(x \mid \beta)(x \mid \alpha)}.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\Omega_2 = -\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta \frac{2(\alpha \mid \eta)(\xi \mid \alpha)(\alpha \mid \beta)}{(\alpha \mid \alpha)} \cdot \frac{s_\alpha}{(x \mid \alpha)(x \mid \beta)}.$$

Меняя в последней сумме α на β и β на α, получаем $\Omega_1 = \Omega_2$.

Покажем, что $\Omega_3 = 0$. В самом деле, меняя во второй сумме α на β и β на α, и пользуясь инвариантностью скалярного произведения, получаем

$$\Omega_3 = \sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha \mid \xi)(\beta \mid \eta)\frac{s_\alpha s_\beta}{(x \mid \alpha)(x \mid s_\alpha\beta)} -$$

$$- \sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta (\beta \mid \xi)(\alpha \mid \eta)\frac{s_\alpha s_\beta}{(x \mid \alpha)(x \mid s_\alpha\beta)} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta \frac{(\alpha \mid \xi)(s_\alpha\beta \mid s_\alpha\eta) - (s_\alpha\beta \mid s_\alpha\xi)(\alpha \mid \eta)}{(x \mid \alpha)(x \mid s_\alpha\beta)} s_\alpha s_\beta \,.$$

По тем же причинам, что и выше вместо $s_\alpha\beta$ можно писать β' и считать, что β' — положительный корень. И тогда, поскольку $s_\alpha s_\beta = s_{s_\alpha\beta} s_\alpha$,

$$\Omega_3 = \sum_{\substack{\alpha,\beta' \in R_+ \\ \alpha \neq \beta'}} k_\alpha k_{\beta'} \frac{(\alpha \mid \xi)(\beta' \mid s_\alpha \eta) - (\beta' \mid s_\alpha \xi)(\alpha \mid \eta)}{(x \mid \alpha)(x \mid \beta')} s_{\beta'} s_\alpha =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta' \in R_+ \\ \alpha \neq \beta'}} k_\alpha k_{\beta'} \frac{(\alpha \mid \xi)(\beta' \mid \eta) - (\beta' \mid \xi)(\alpha \mid \eta)}{(x \mid \alpha)(x \mid \beta')} s_{\beta'} s_\alpha =$$

$$= \sum_{w \in W_R} w \sum_{\substack{\alpha,\beta' \in R_+ \\ \alpha \neq \beta' \\ s_{\beta'} s_\alpha = w}} k_\alpha k_{\beta'} \frac{(\alpha \mid \xi)(\beta' \mid \eta) - (\beta' \mid \xi)(\alpha \mid \eta)}{(x \mid \alpha)(x \mid \beta')}.$$

Но внутренняя сумма в Ω_3 равна нулю в силу леммы 2.1, где форма

$$B(\alpha, \beta) = (\alpha \mid \xi)(\beta \mid \eta) - (\beta \mid \xi)(\alpha \mid \eta).$$

Итак, для произвольных ξ, η

$$T_\xi T_\eta - T_\eta T_\xi = 0.$$

Теорема доказана!

Спасибо за внимани