

**Компьютерное  
моделирование  
артикуляторных и  
акустических процессов в  
естественных языках**

Занятие 5

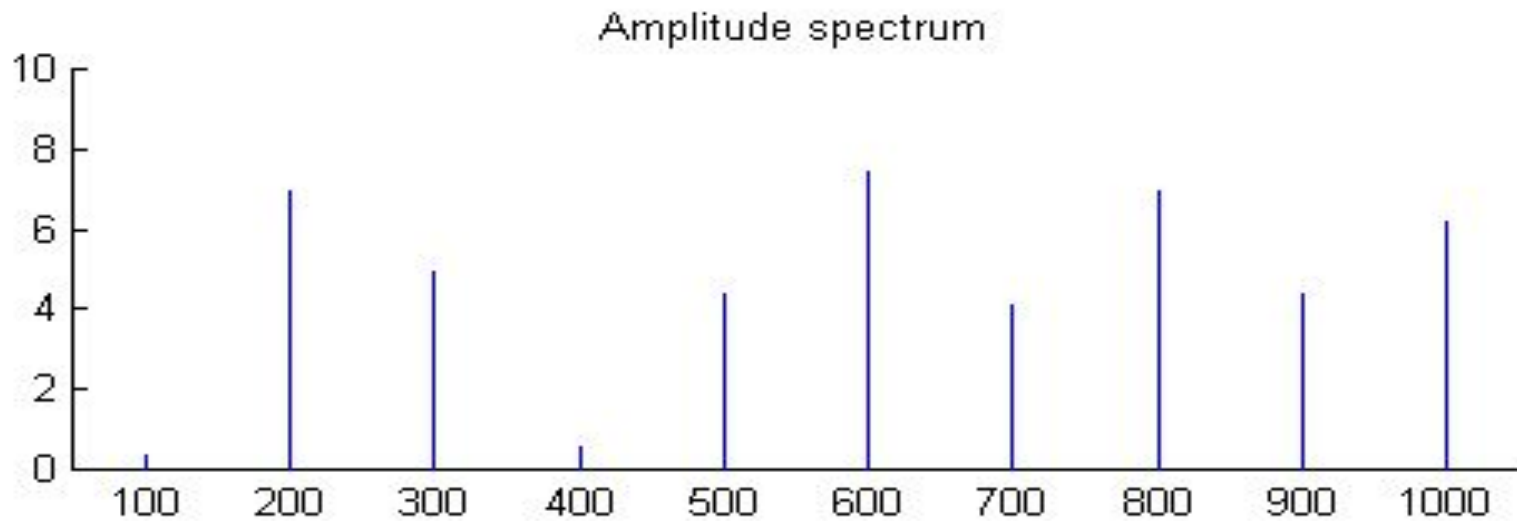
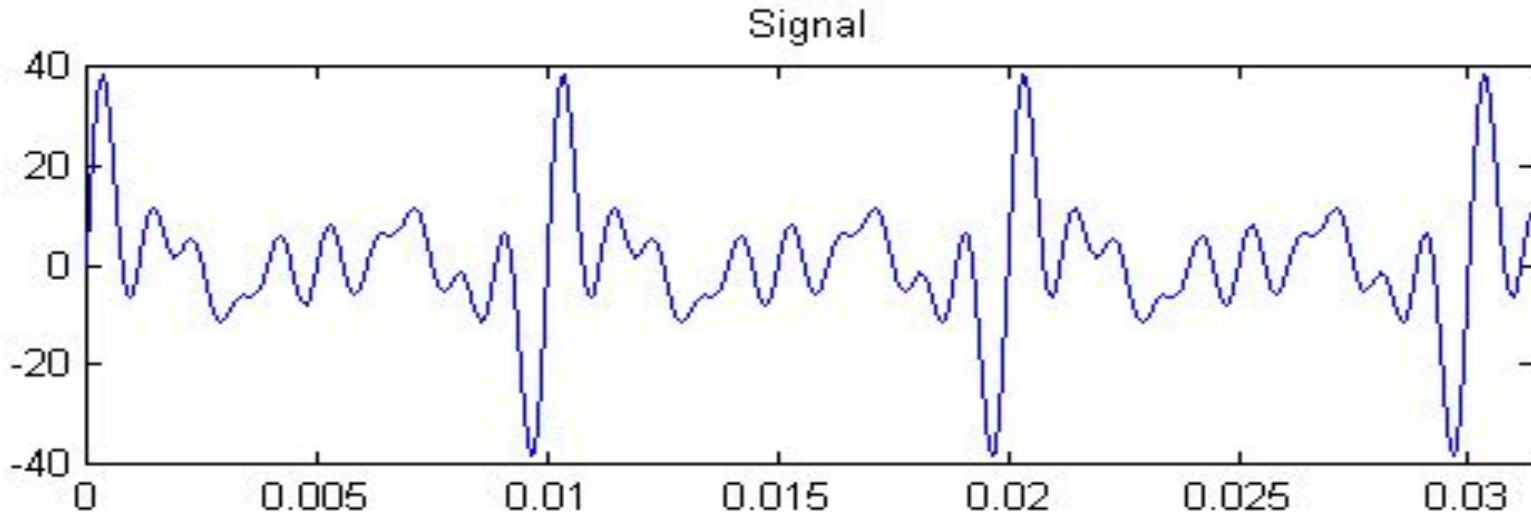
# Теорема Фурье

Всякое периодическое колебание частоты  $F$  можно получить в результате суммирования бесконечного числа гармоник с частотами  $F, 2F, 3F, 4F, \dots$ , и **специально подобранными** амплитудами и фазами

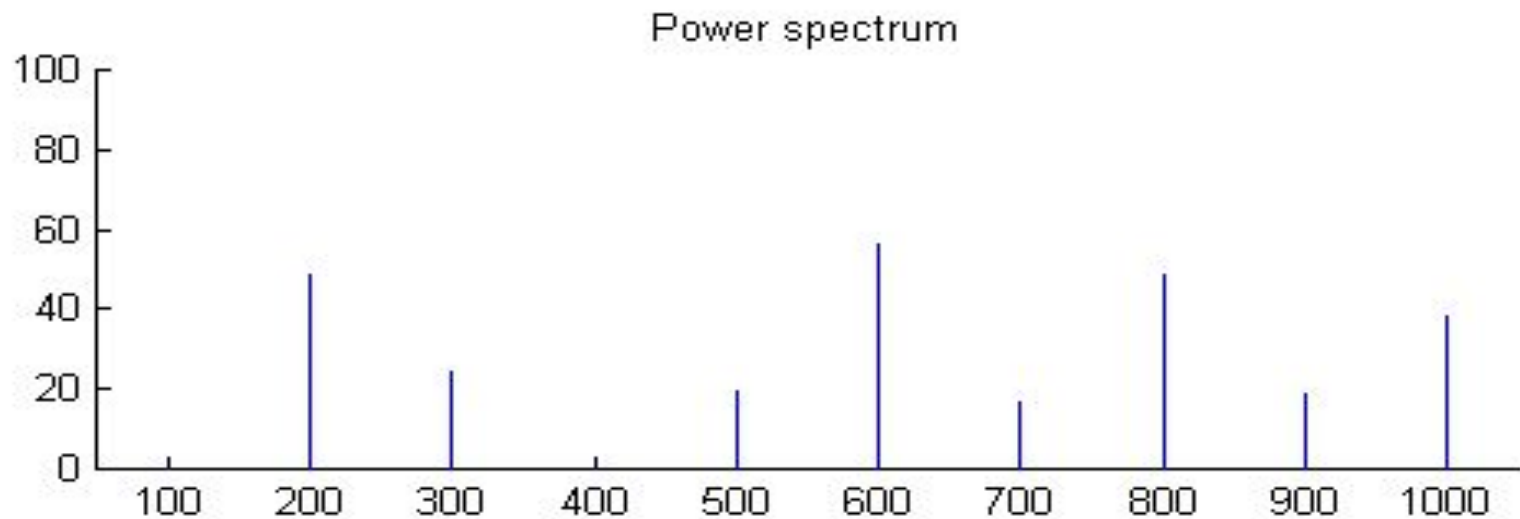
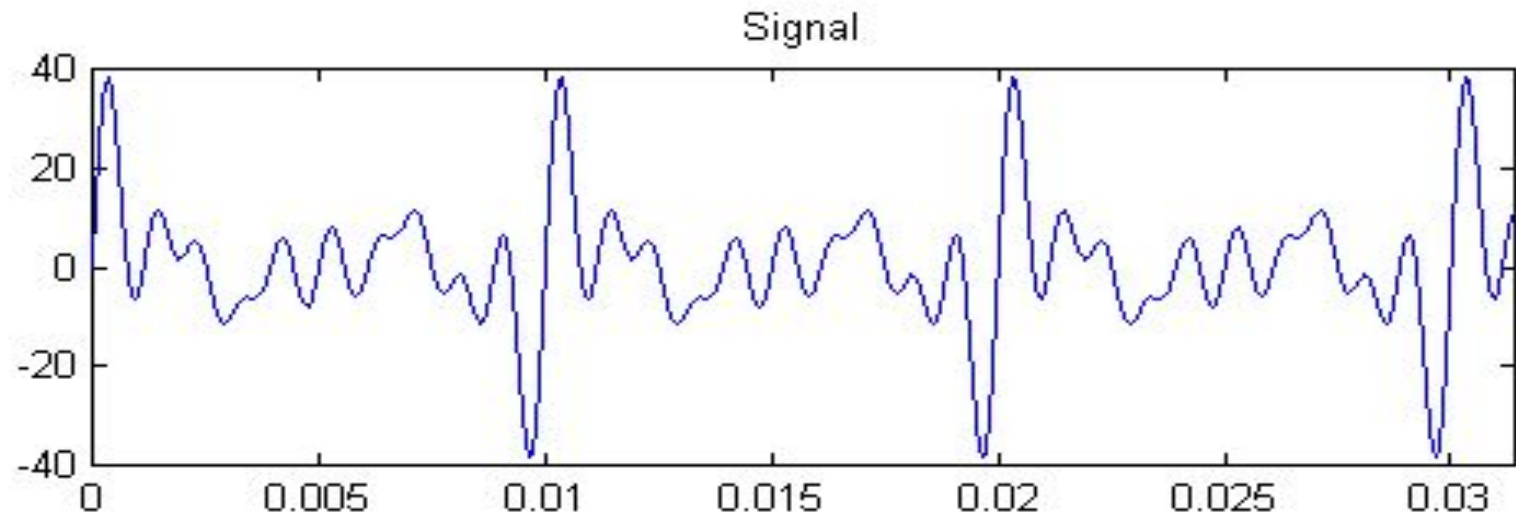
$$x(t) = A_0 + A_1 \sin(2\pi Ft + \phi_1) + A_2 \sin(2\pi 2Ft + \phi_2) + A_3 \sin(2\pi 3Ft + \phi_3) + \dots \text{ (и т.д.) ИЛИ}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi kFt + \varphi_k)$$

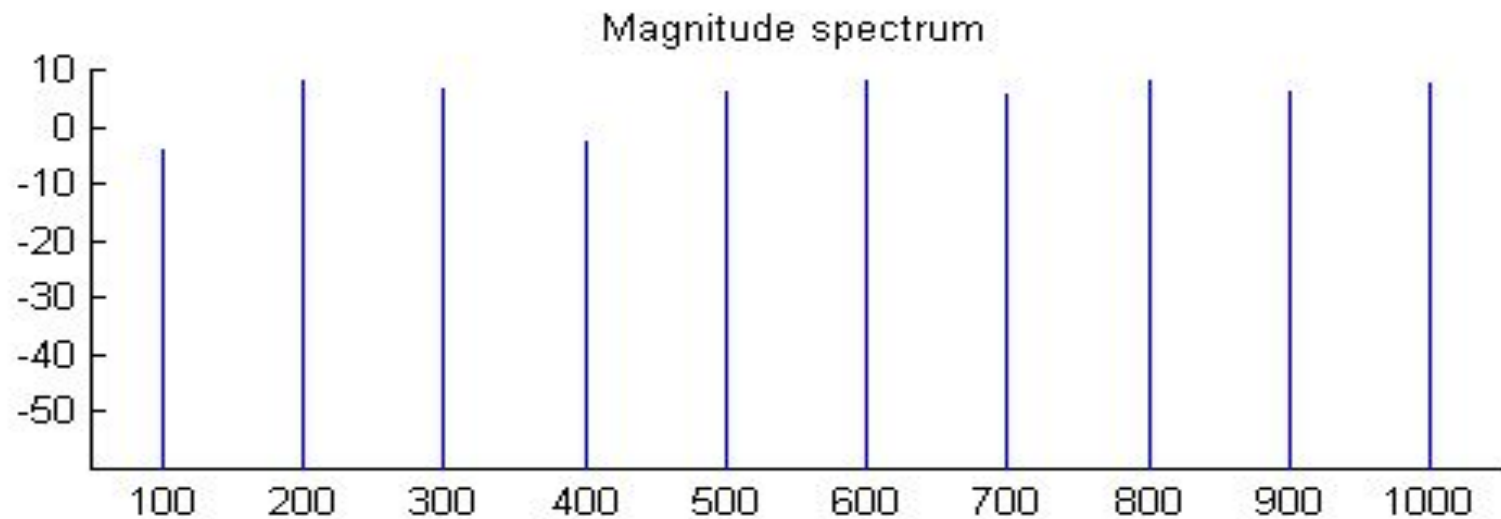
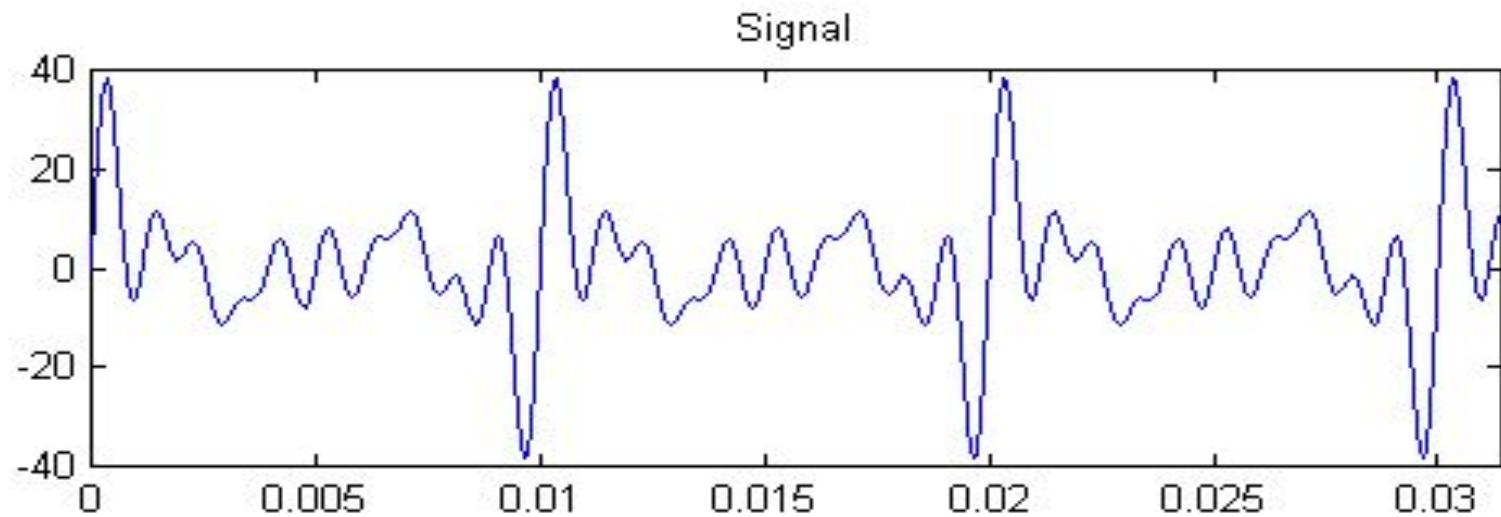
# Амплитудно-частотный спектр



# Спектр мощности



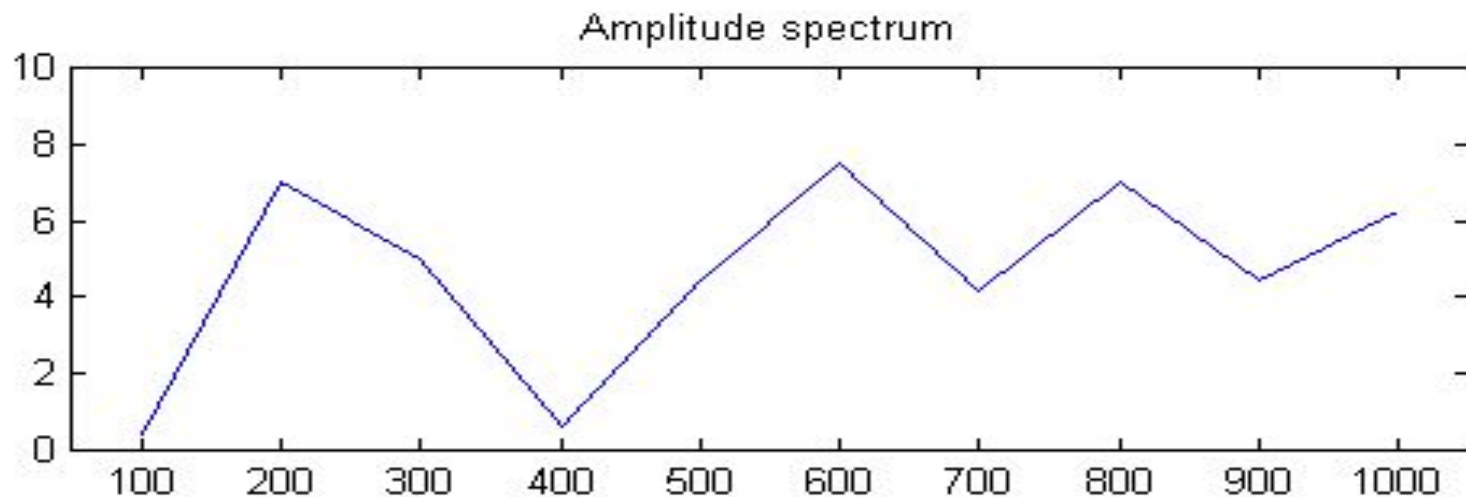
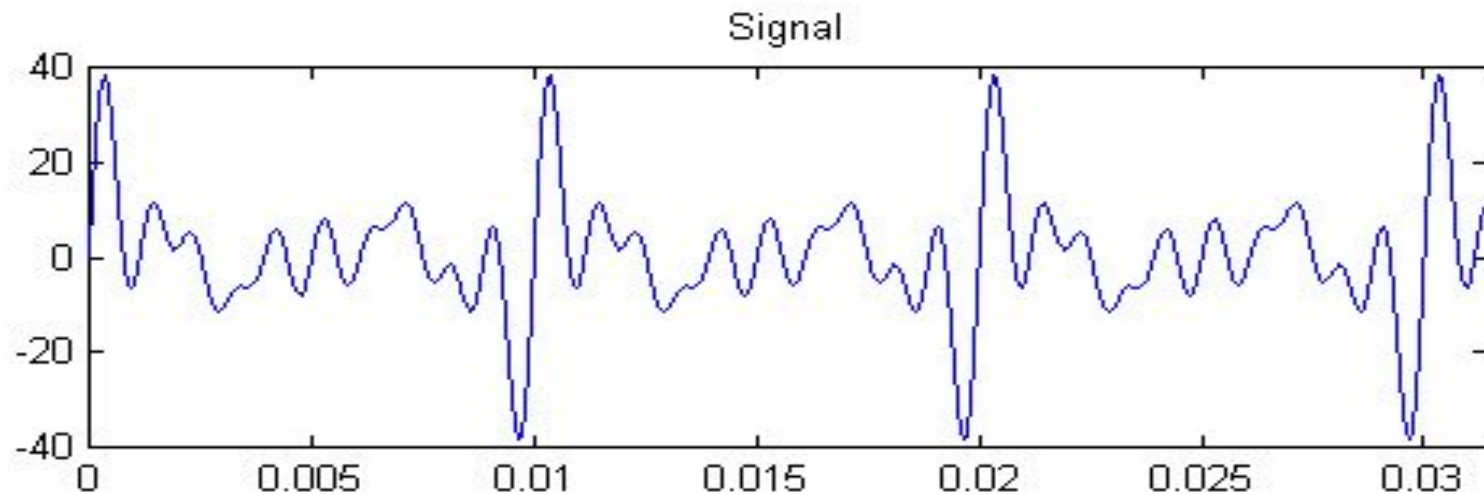
# Логарифмический спектр



# Перевод в децибеллы

- Имеем дискретный набор гармоник
- Для каждой гармоники считаем десятичный логарифм от амплитуды данной гармоники
- Умножаем результат на 10
- Получаем логарифмический спектр в децибеллах (дБ)

# Огибающая спектра (spectral envelope)



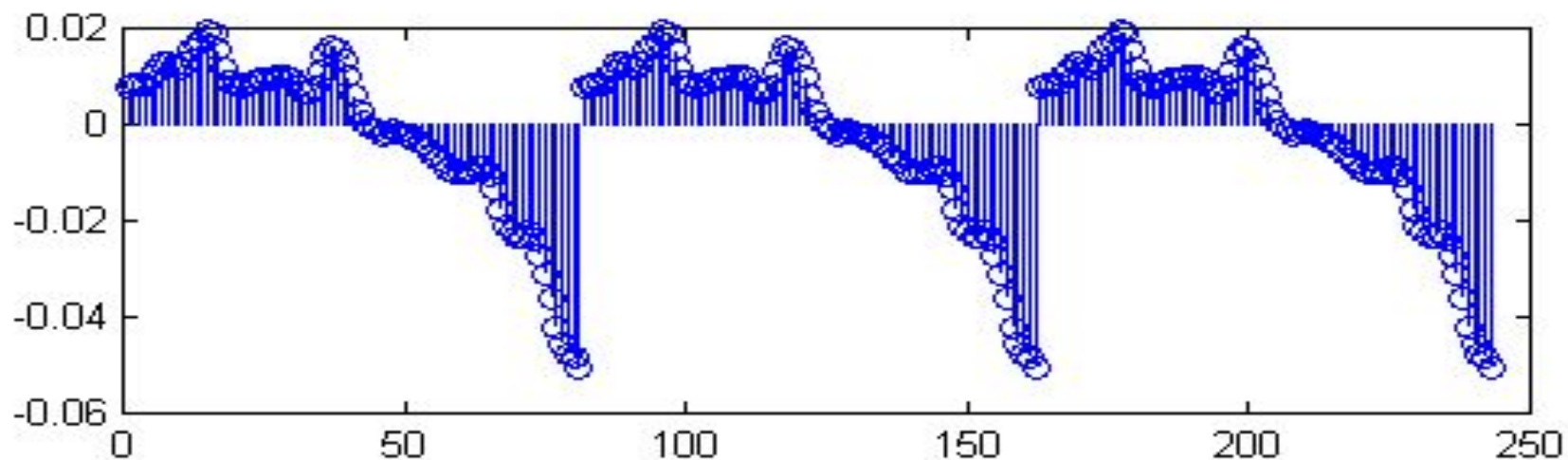
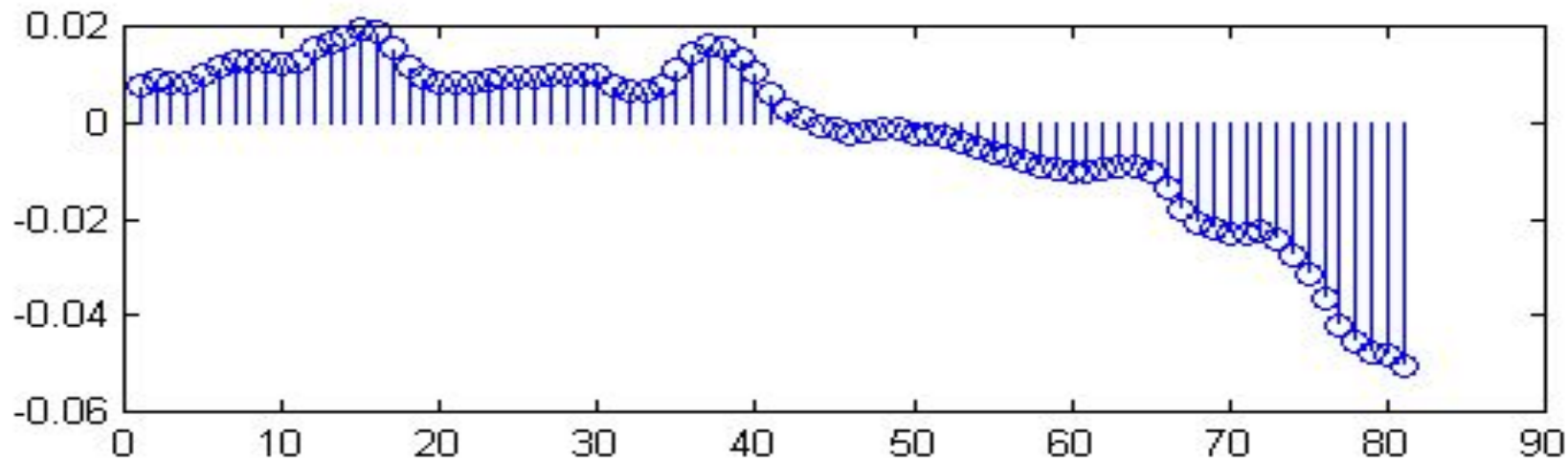
**Как быть с фазой?**



# Периодическое продолжение

С точки зрения спектрального анализа дискретных сигналов, **ЛЮБОЙ** дискретный сигнал считается **периодически продолженным**

# Пример – исходный и периодически продолженный сигналы



# Периодическое продолжение

- Любой сигнал (вне зависимости от того, является ли он физически периодическим или нет) рассматривается как **периодически продолженный (= периодический)**
- Для БПФ и участок гласного, и участок фрикативного будут равно периодическими

# Теорема Фурье

- Раз любой дискретный сигнал рассматривается как периодический (с периодом  $T$ , равным длительности сигнала), то к нему можно применить теорему Фурье
- Следовательно, любой дискретный сигнал может быть представлен как сумма гармоник с частотами  $(1/T)$ ,  $(2/T)$ ,  $(3/T)$ ,  $(4/T)$  и т.д.

# Пример

- Пусть длительность  $T$  анализируемого сигнала = 20 миллисекунд (0.02 секунд). Тогда сигнал может быть представлен в виде суммы гармоник с частотами 50 Гц ( $1 / 0.02$ ), 100 Гц ( $2 / 0.02$ ), и т.д.
- Для данного сигнала частота 50 Гц **никакого отношения** не имеет к частоте колебаний голосовых складок.

# Дискретное преобразование Фурье

- **Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) (Discrete Fourier Transform, DFT)** – результат применения теоремы Фурье к дискретному сигналу
- ДПФ позволяет вычислить спектр сигнала по самому сигналу
- **Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) (Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT)** позволяет вычислить сигнал по его спектру

# Свойства ДПФ

# Свойство 1

- Если длина сигнала в отсчетах =  $N$ , то количество гармоник в Фурье-разложении также будет  $N$  (а не бесконечное число, как для непрерывных сигналов)
- Соответствующий спектр Фурье также будет иметь  $N$  спектральных линий



# Пример

- Пусть частота дискретизации сигнала 16 кГц, длительность сигнала в отсчетах = 160 отсчетов (10 миллисекунд). Тогда общее количество гармоник ДПФ-разложения = 160
- Частота самой нижней гармоники будет равна  $1 / 0.01 = 100$  Гц
- Частота самой высокой гармоники будет равна  $160 / 0.01 = 16$  кГц
- Разрешение между соседними гармониками по частоте = разности между частотами соседних гармоник = 100 Гц

# СВОЙСТВО 2

- Если частота дискретизации сигнала =  $F_s$ , то частота самой высокой гармоники в ДПФ-разложении равна частоте дискретизации  $F_s$
- Если длительность сигнала (в секундах) =  $T$ , то разрешение по частоте равно  $1/T$

# Скорость вычисления спектра

- Если длина сигнала в отсчетах =  $N$ , то общее количество операций, необходимых для вычисления спектра, примерно равно  $N^2$
- Например, если длина сигнала = 256 отсчетов, для вычисления спектра необходимо совершить 65536 операций
- Нельзя ли сократить число операций?

# Быстрое преобразование Фурье

- **Быстрое преобразование Фурье (БПФ) (Fast Fourier Transform, FFT)** – способ «быстрого» вычисления ДПФ за счет одного математического трюка
- **Обратное быстрое преобразование Фурье (ОБПФ) (Inverse Fast Fourier Transform, IFFT)** - способ «быстрого» вычисления ОДПФ за счет одного математического трюка
- Общее количество операций в БПФ – примерно  $N \log_2 N$
- Например, для 256 отсчетов имеем количество операций 2048 операций (вместо 65536 для ДПФ)

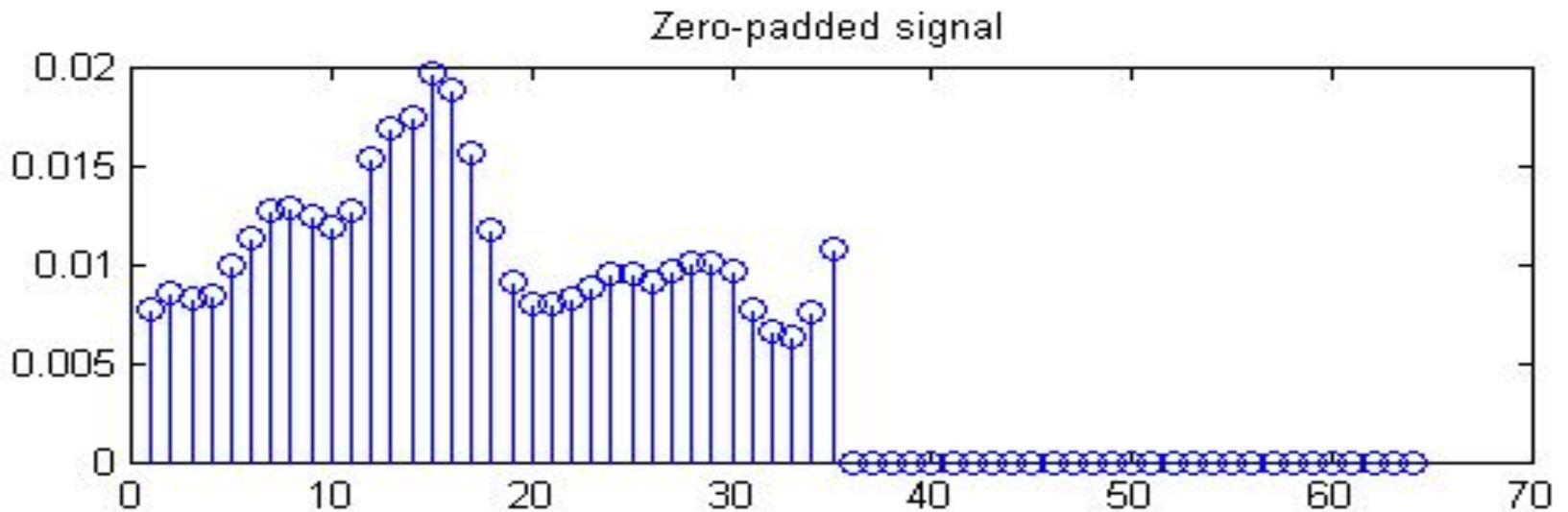
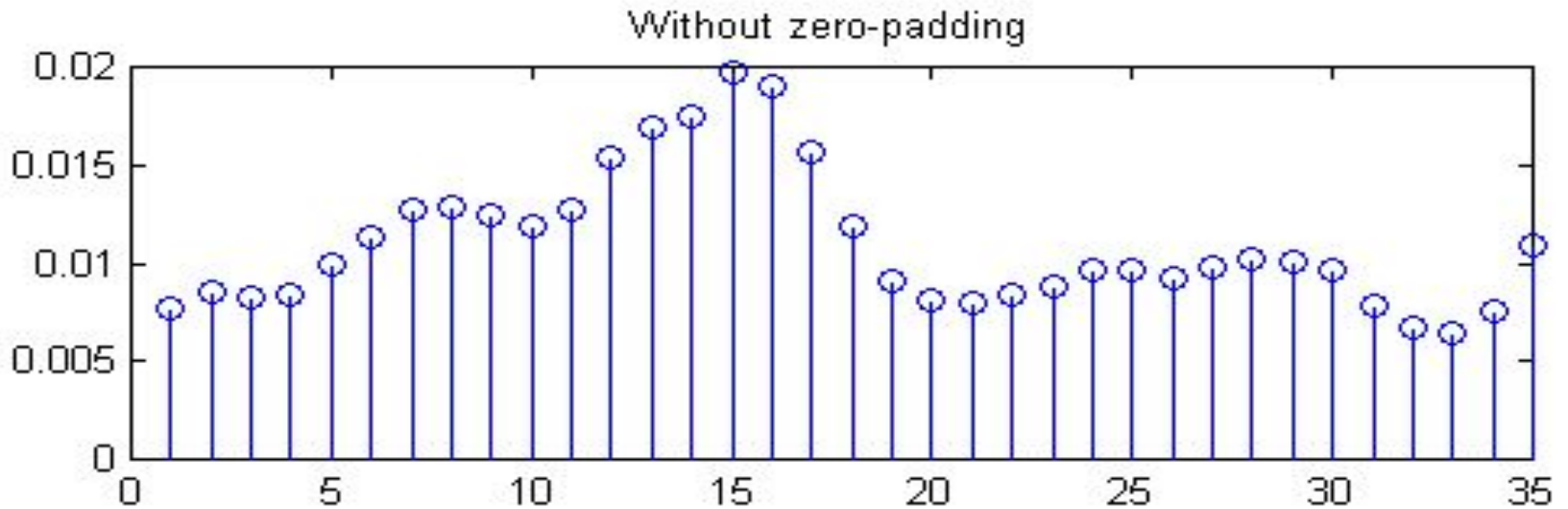
# В чем трюк?

Если длина сигнала в отсчетах есть степень двойки (например, 256 отсчетов =  $2^8$ , 512 отсчетов =  $2^9$ ), то количество операций можно существенно сократить

# БПФ

- Таким образом, для эффективного использования БПФ длина сигнала в отсчетах должна быть **64** или **128** или **256** или **512** или **1024** или **2048** и т.д.
- Как этого добиться в действительности?

# Дополнение нулями (zero-padding)

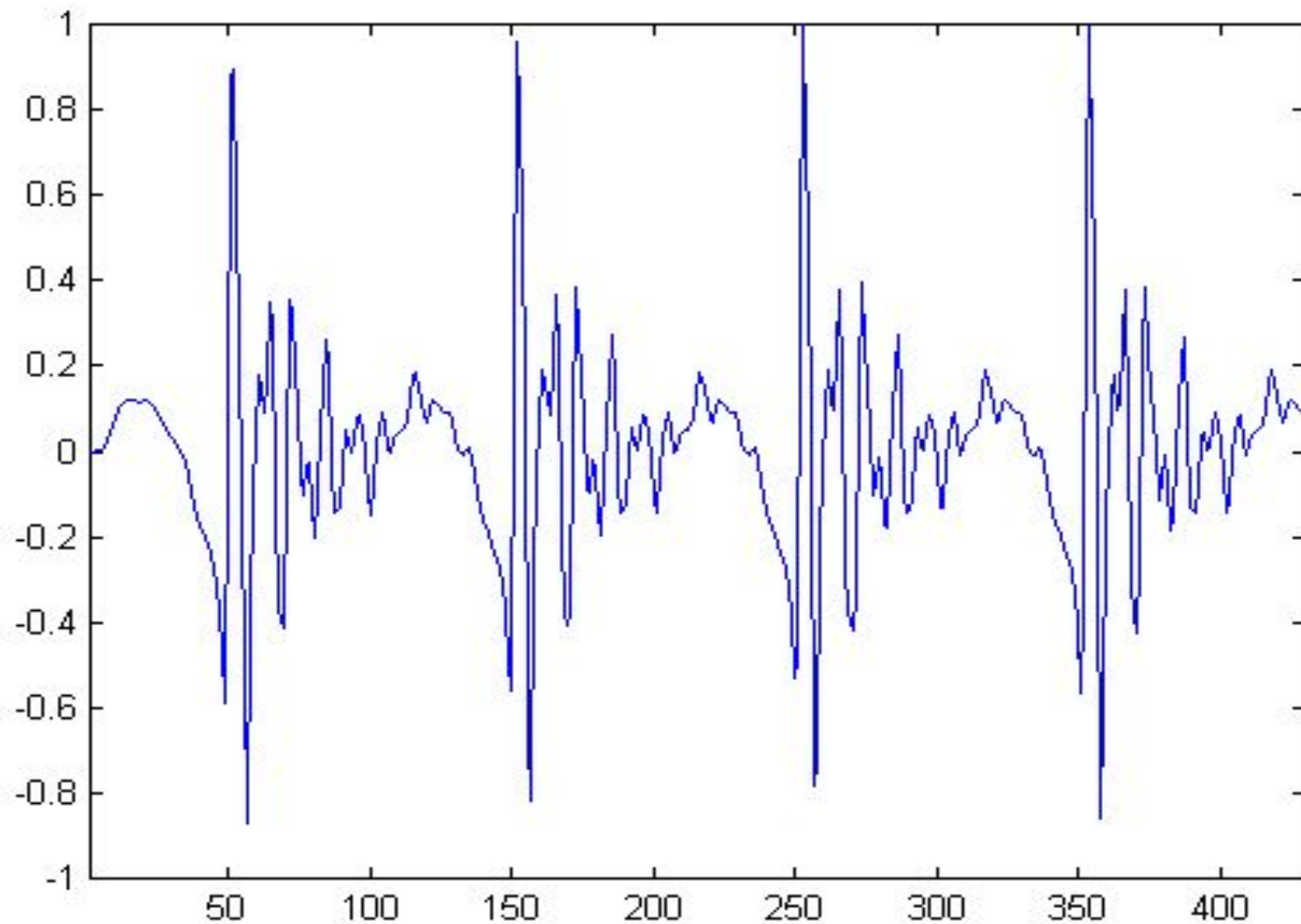


# MATLAB

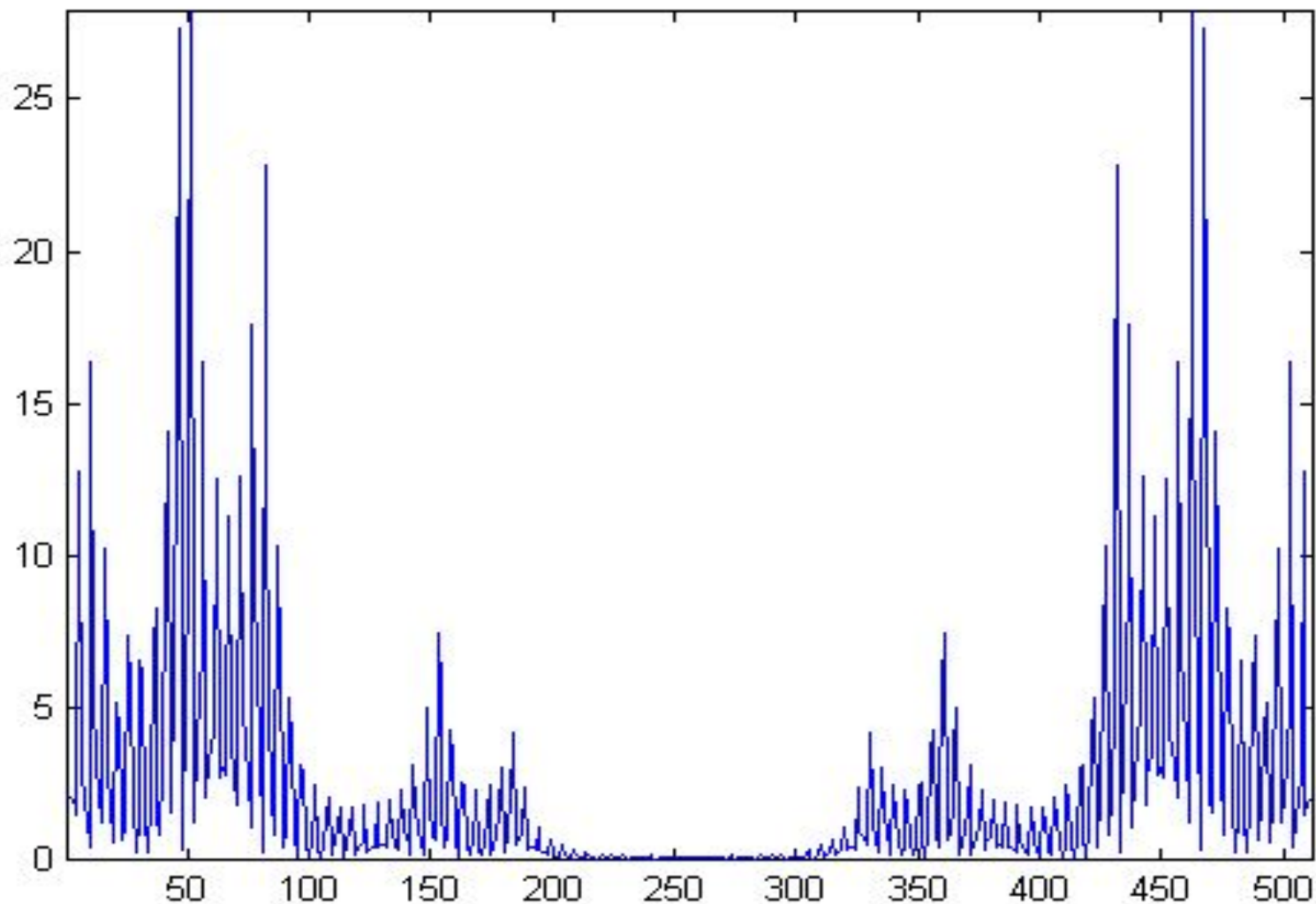
- $Y = \text{fft}(x)$  - без дополнения нулями  
(может вычислять ОЧЕНЬ медленно,  
если длина сигнала  $x$  в отсчетах не равна  
степени двойки)
- $Y = \text{fft}(x, N)$  – с дополнением нулями до  
 $N$  (где  $N$  – число, равное степени двойки,  
и большее, чем исходная длина сигнала  $x$   
в отсчетах)
- $X = \text{ifft}(Y)$  – ОБПФ



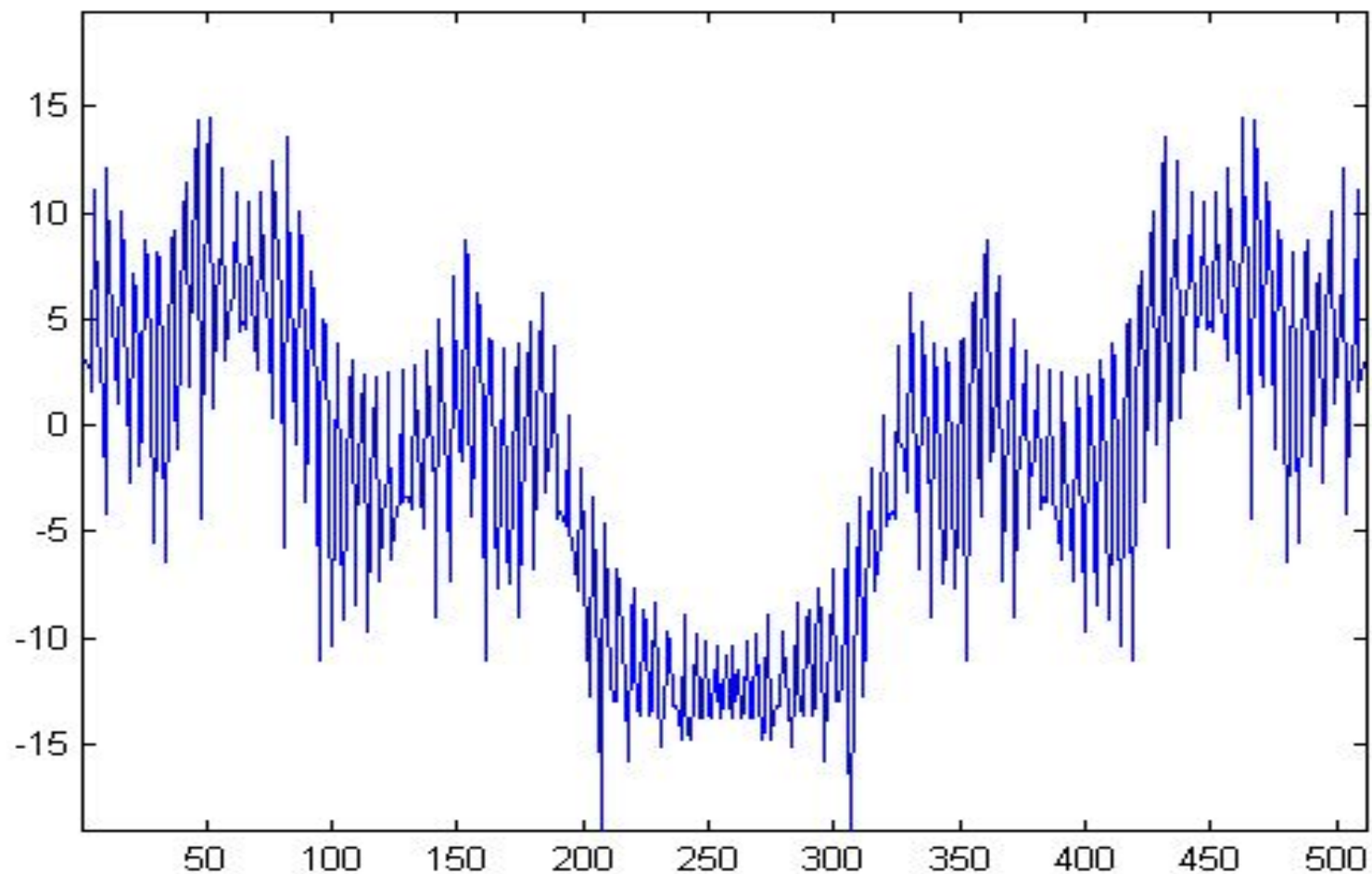
# Пример



# 512-БПФ (амплитудный спектр)



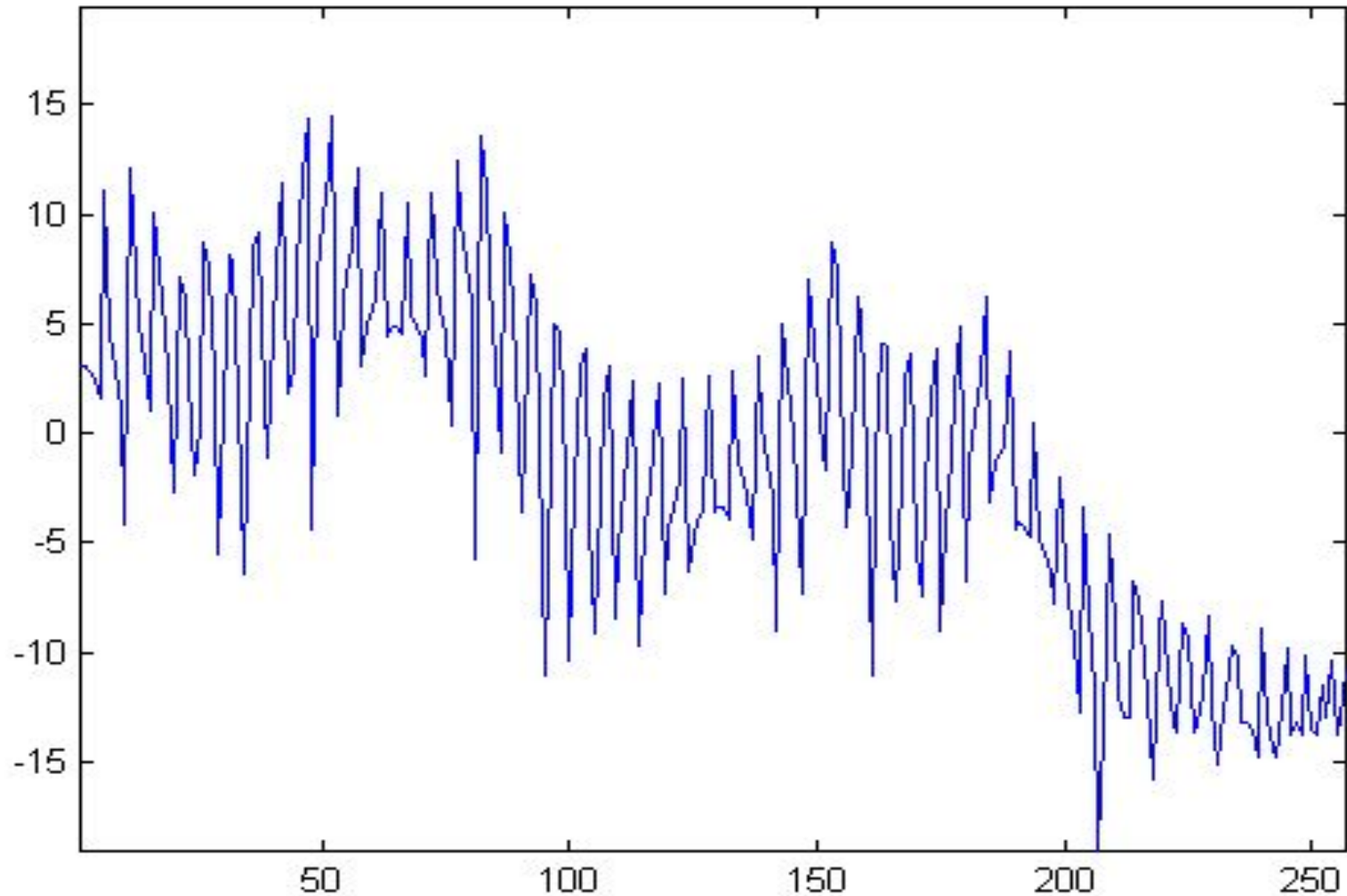
# 512-БПФ (логарифмический спектр)



# Свойство 3

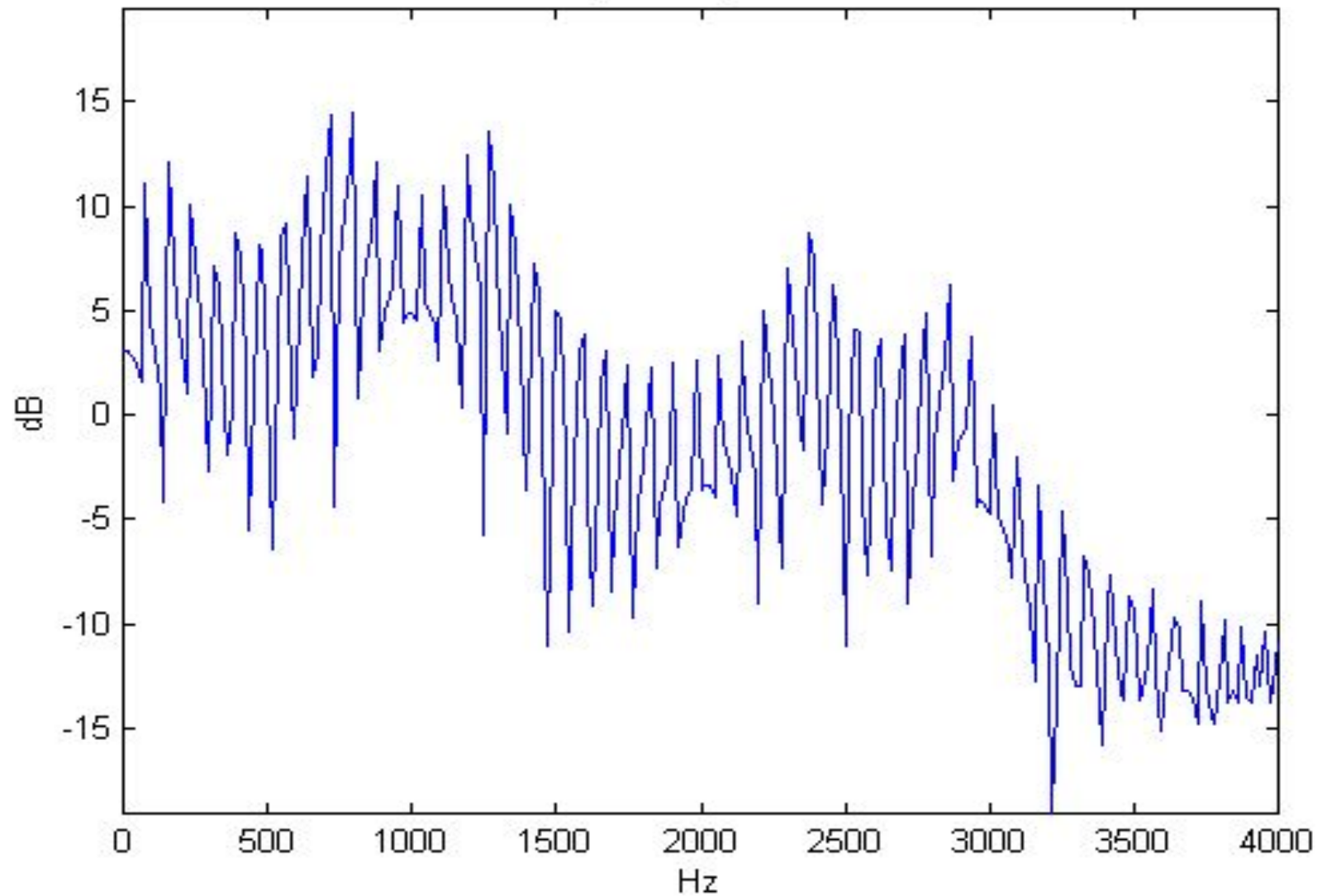
- БПФ-спектр симметричен относительно срединной гармоники (например, 256-й гармоники для 512-точечного БПФ)
- Соответствующая частота = половине частоты дискретизации
- Например, для частоты дискретизации 16 кГц БПФ-спектр симметричен относительно частоты 8 кГц
- Необходимо вычислять спектр только до половины частоты дискретизации

# 512-БПФ, физический спектр

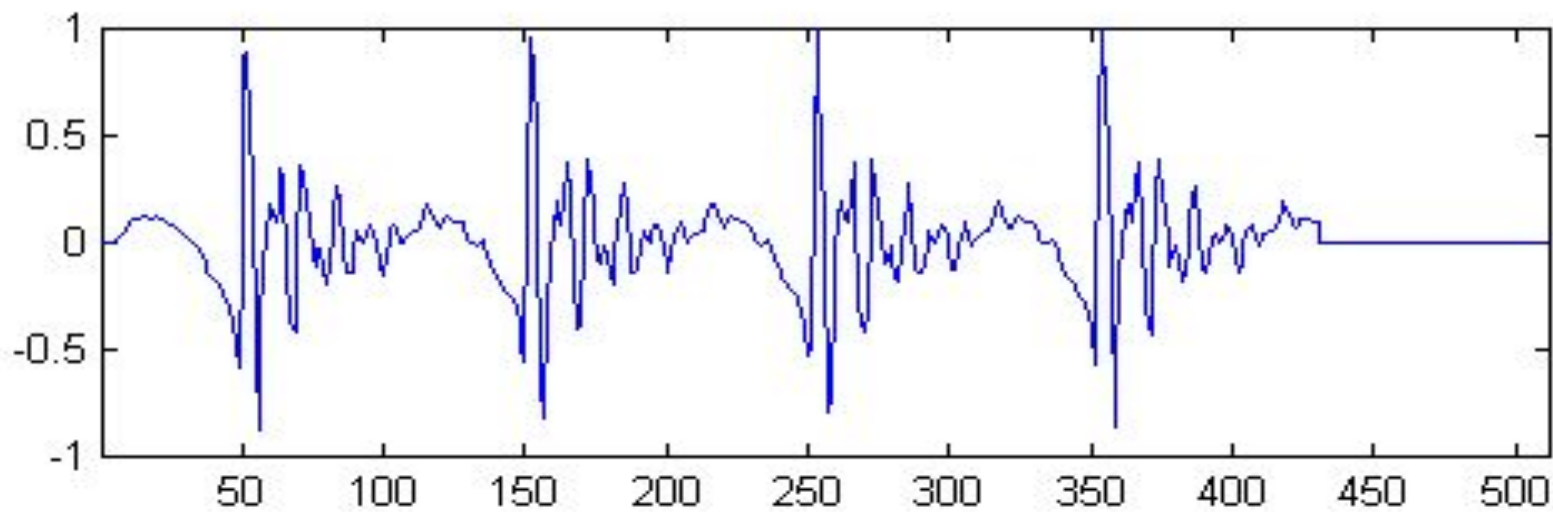
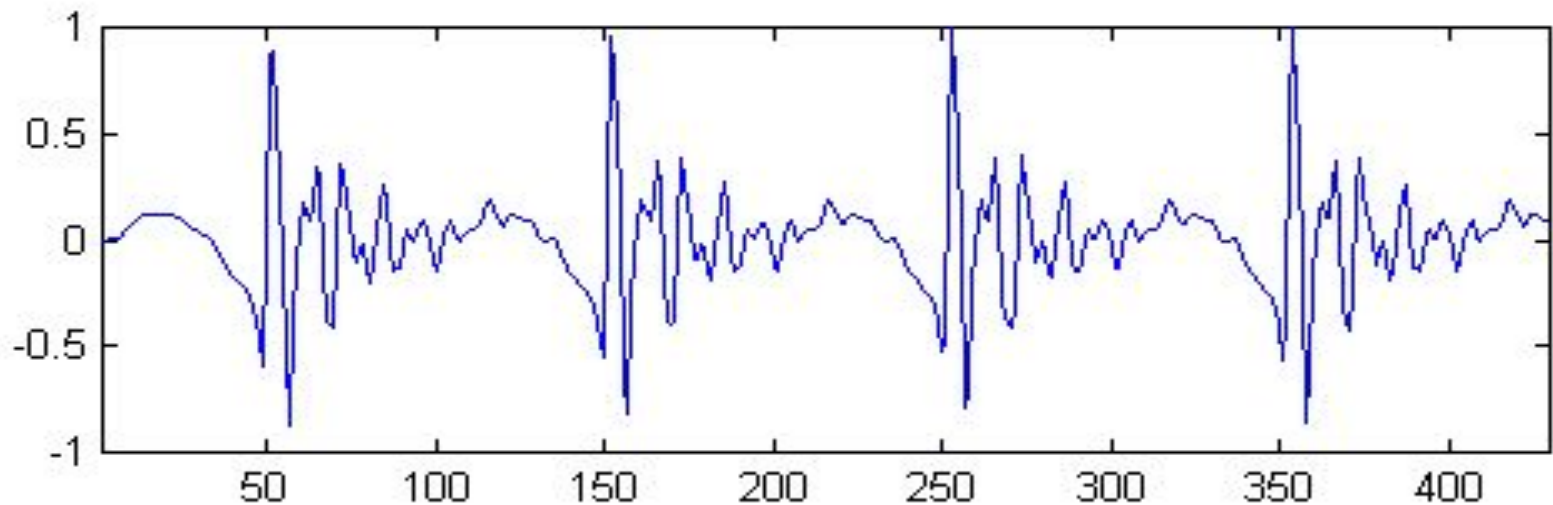


# 512-БПФ

Magnitude Spectrum



# ОБПФ



# Что нужно помнить

- Если длина сигнала в отсчетах =  $N$ , в секундах =  $T$ , то сигнал можно представить суммой из  $N$  гармоник с частотами  $1/T, 2/T, 3/T, \dots, N/T$
- БПФ-спектр нужно вычислять до гармоники с частотой  $N/(2T)$
- Если частота дискретизации сигнала =  $F_s$ , то БПФ-спектр вычисляется до частоты  $F_s/2$
- Если  $N$  – не степень двойки, то необходимо дополнить нулями сигнал до ближайшего числа, являющегося степенью двойки (в **MATLAB** это делается автоматически)