

**Компьютерное
моделирование
артикуляторных и
акустических процессов в
естественных языках**

Занятие 5

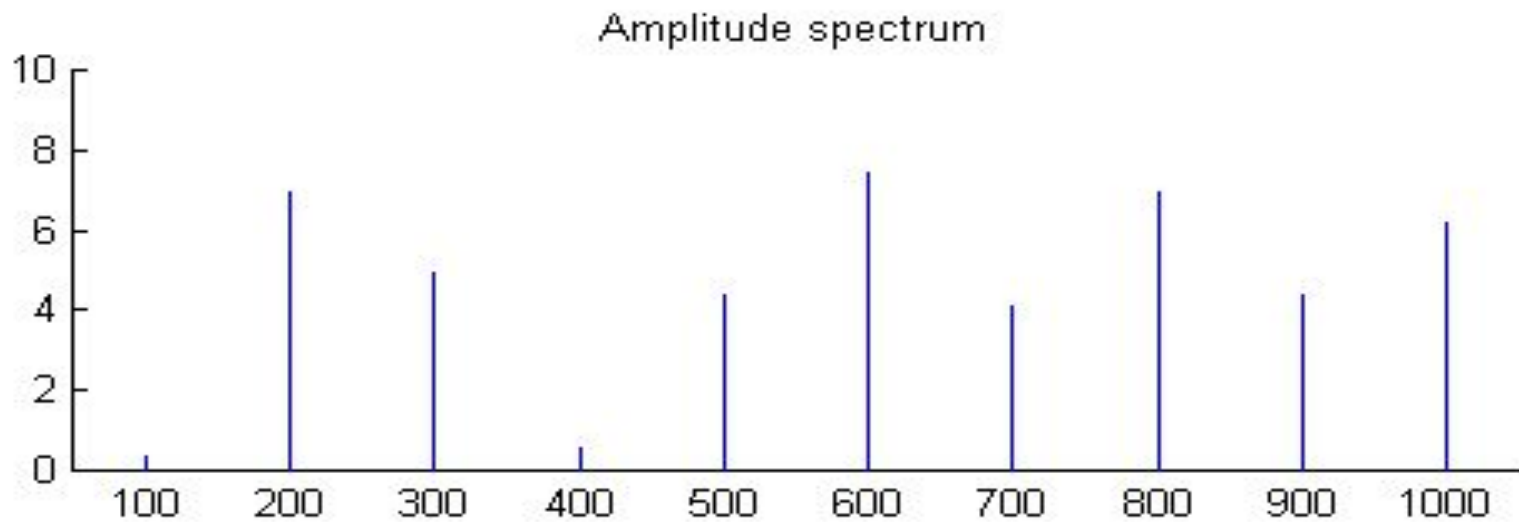
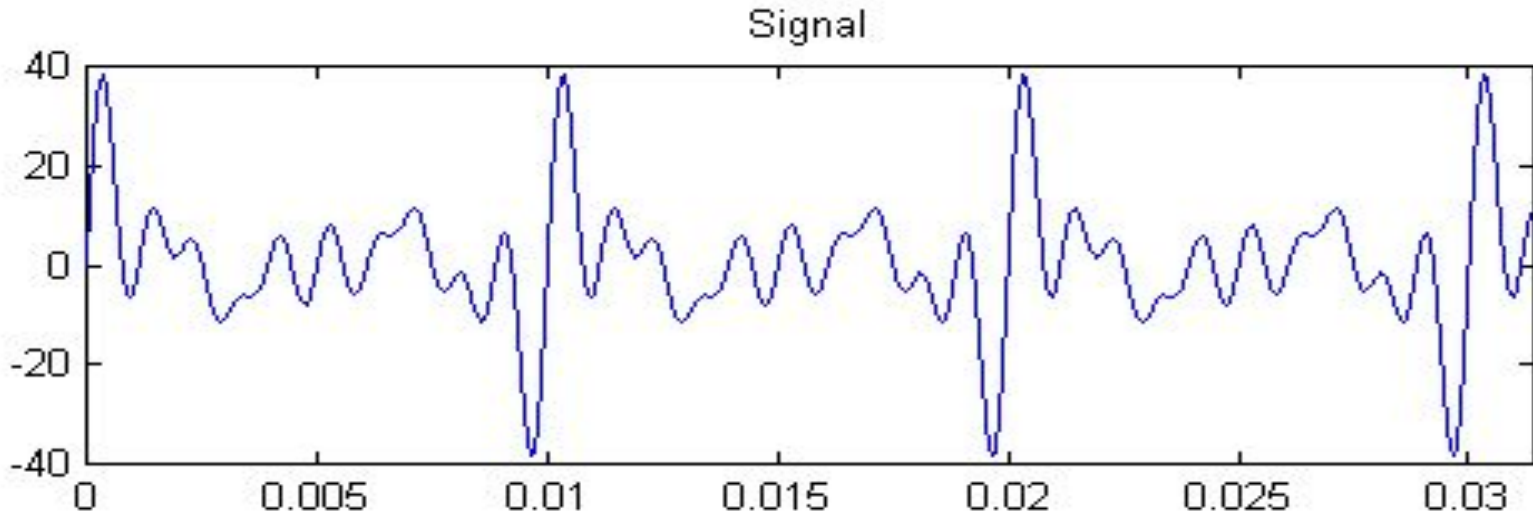
Теорема Фурье

Всякое периодическое колебание частоты F можно получить в результате суммирования бесконечного числа гармоник с частотами $F, 2F, 3F, 4F, \dots$, и **специально подобранными** амплитудами и фазами

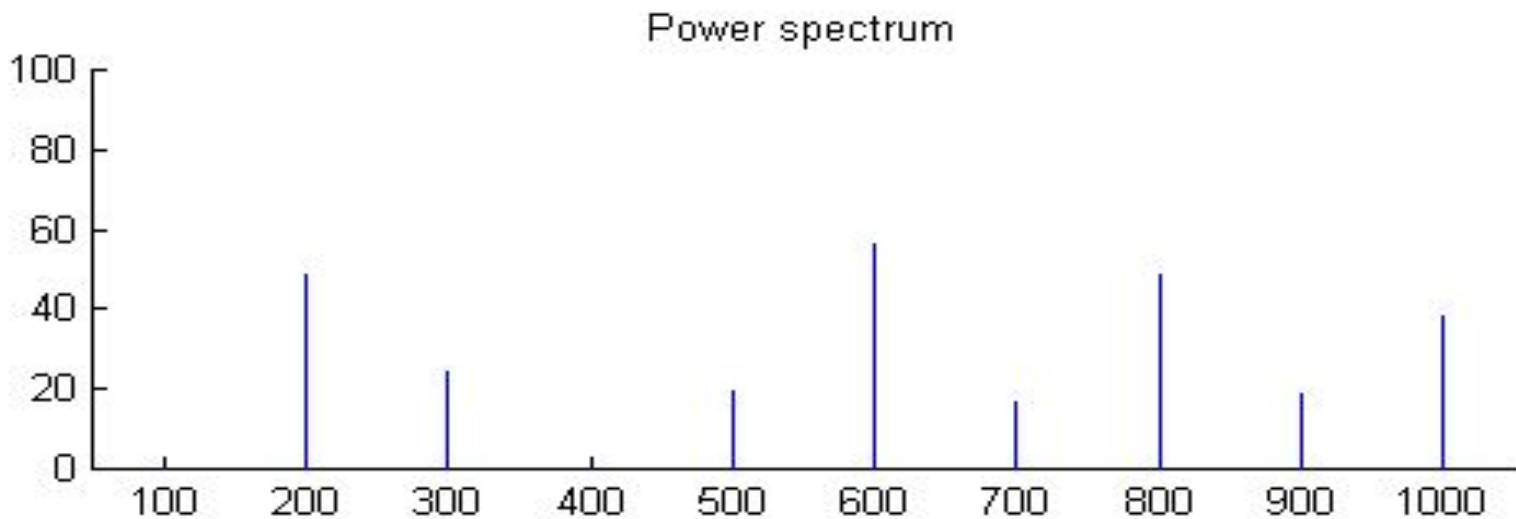
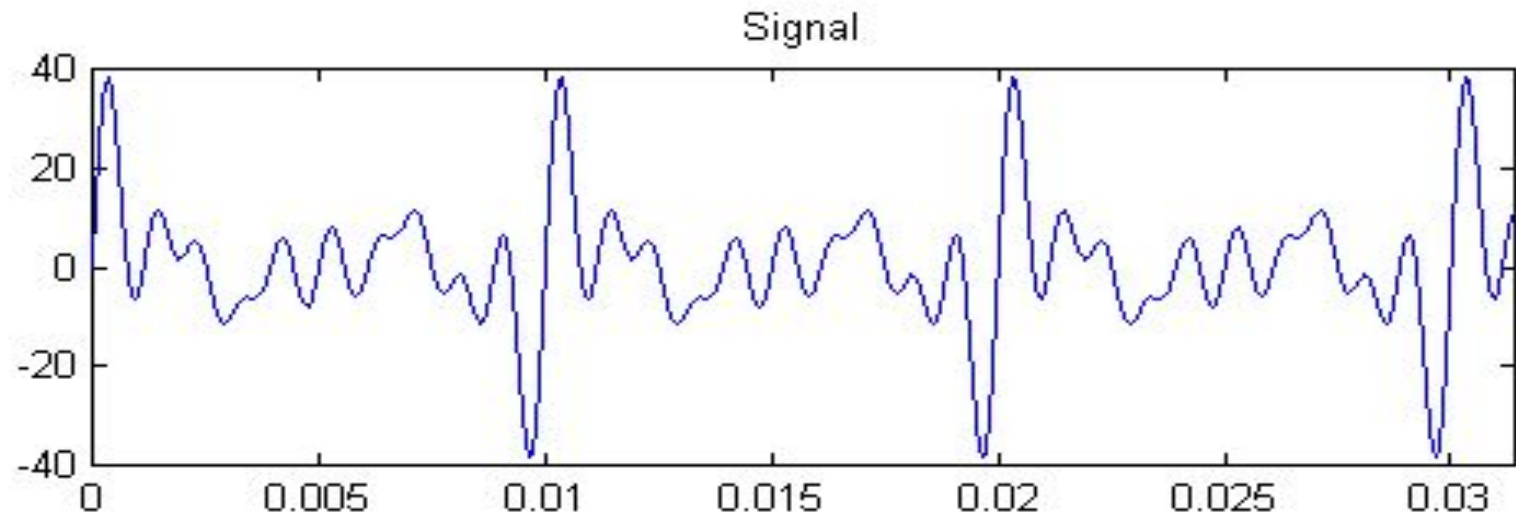
$$x(t) = A_0 + A_1 \sin(2\pi Ft + \phi_1) + A_2 \sin(2\pi 2Ft + \phi_2) + A_3 \sin(2\pi 3Ft + \phi_3) + \dots \text{ (и т.д.) ИЛИ}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi kFt + \varphi_k)$$

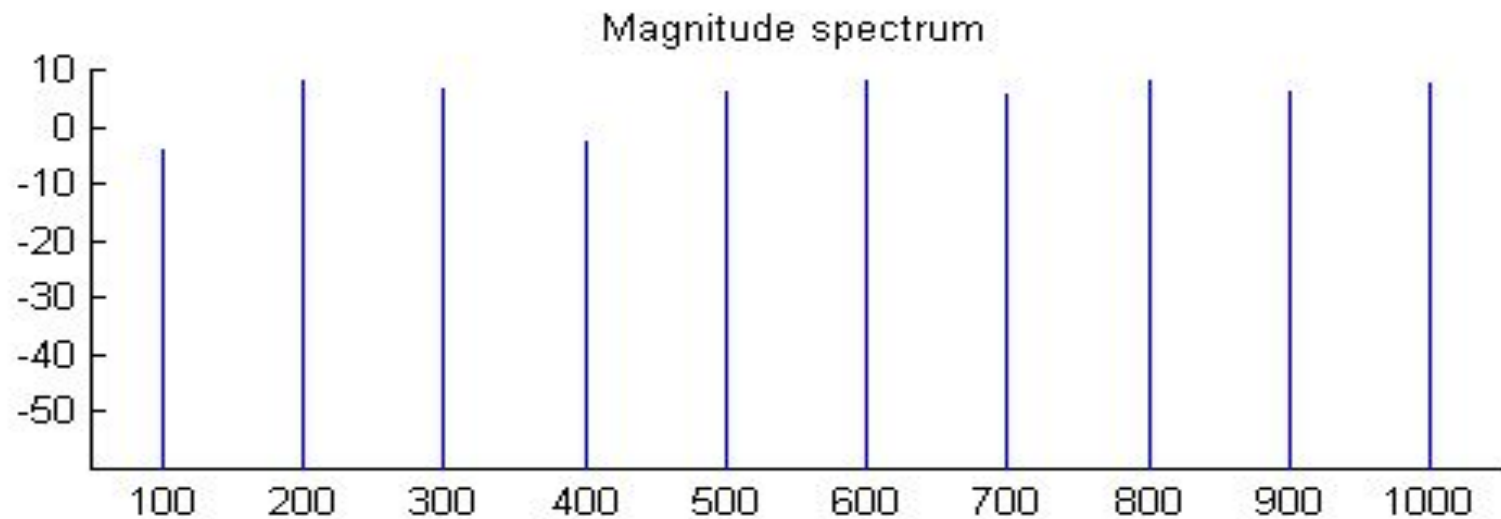
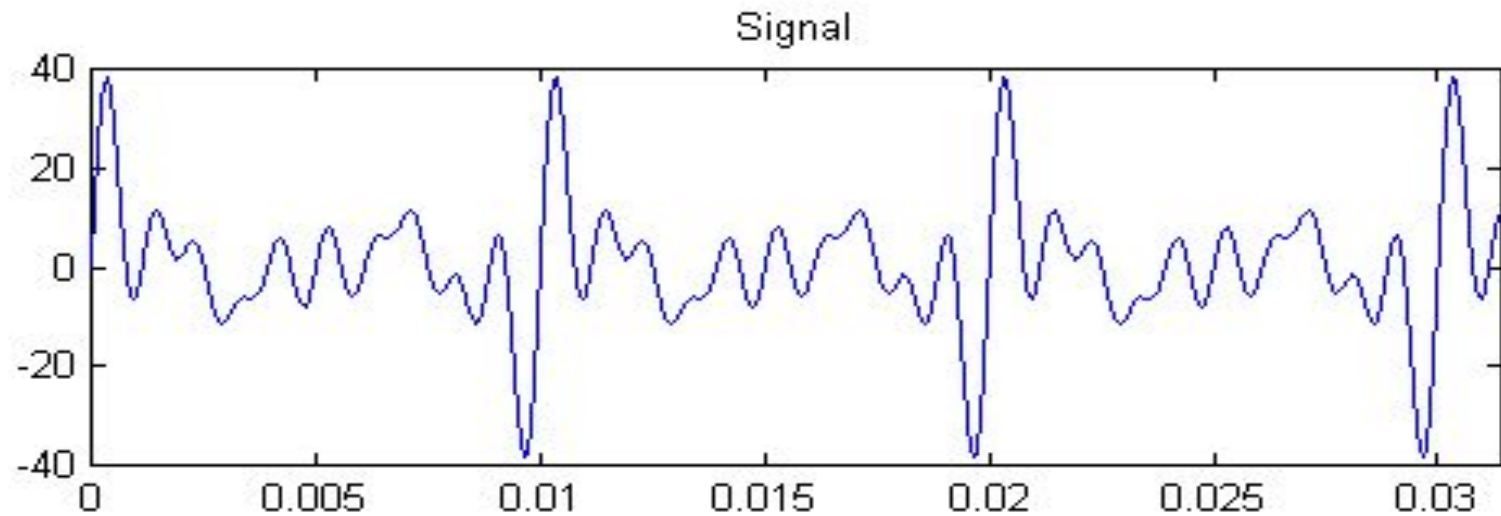
Амплитудно-частотный спектр



Спектр мощности



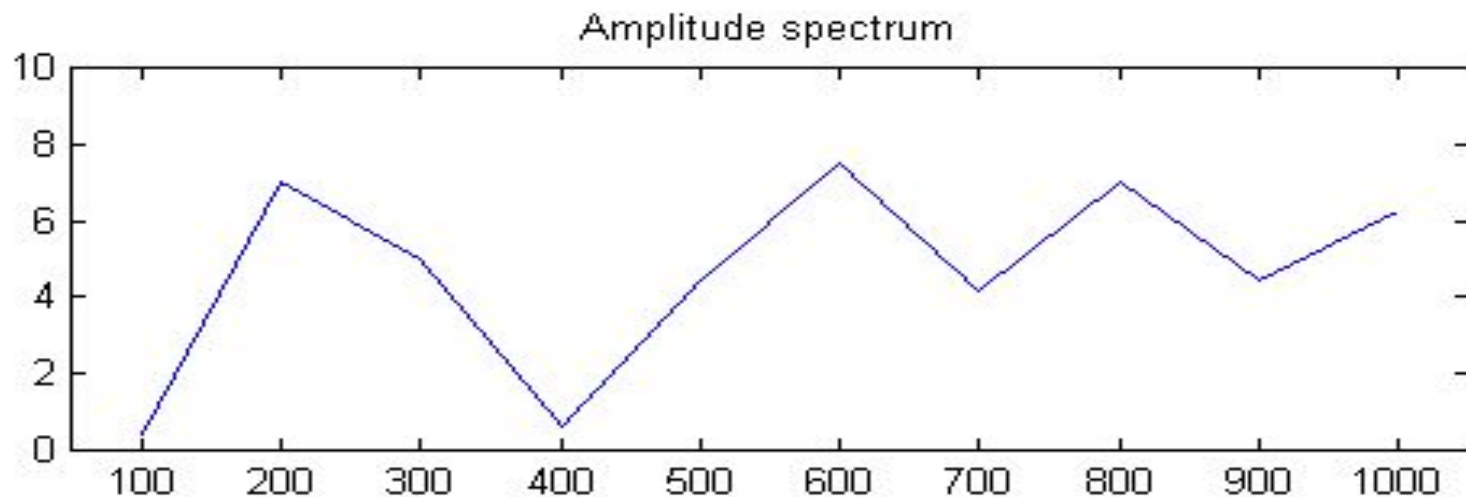
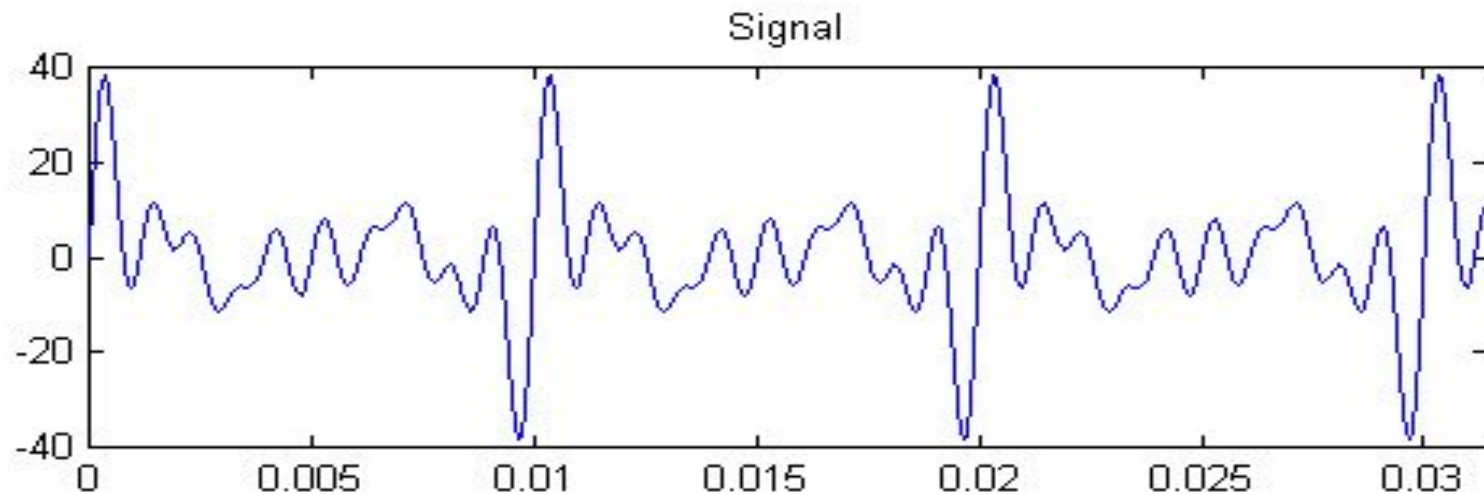
Логарифмический спектр



Перевод в децибеллы

- Имеем дискретный набор гармоник
- Для каждой гармоники считаем десятичный логарифм от амплитуды данной гармоники
- Умножаем результат на 10
- Получаем логарифмический спектр в децибеллах (дБ)

Огибающая спектра (spectral envelope)

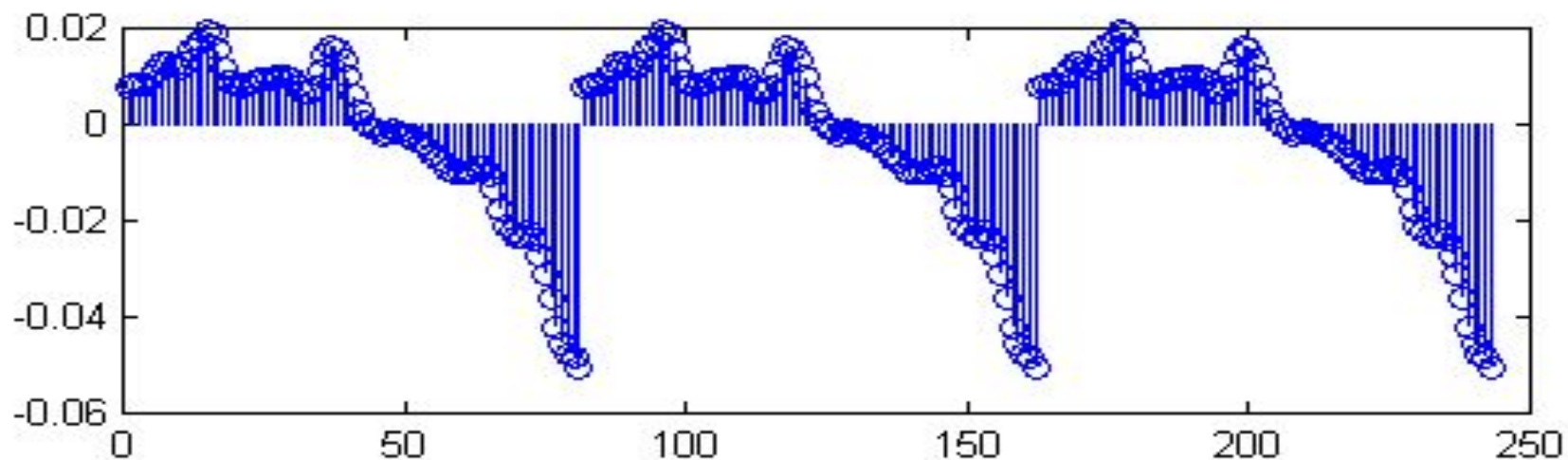
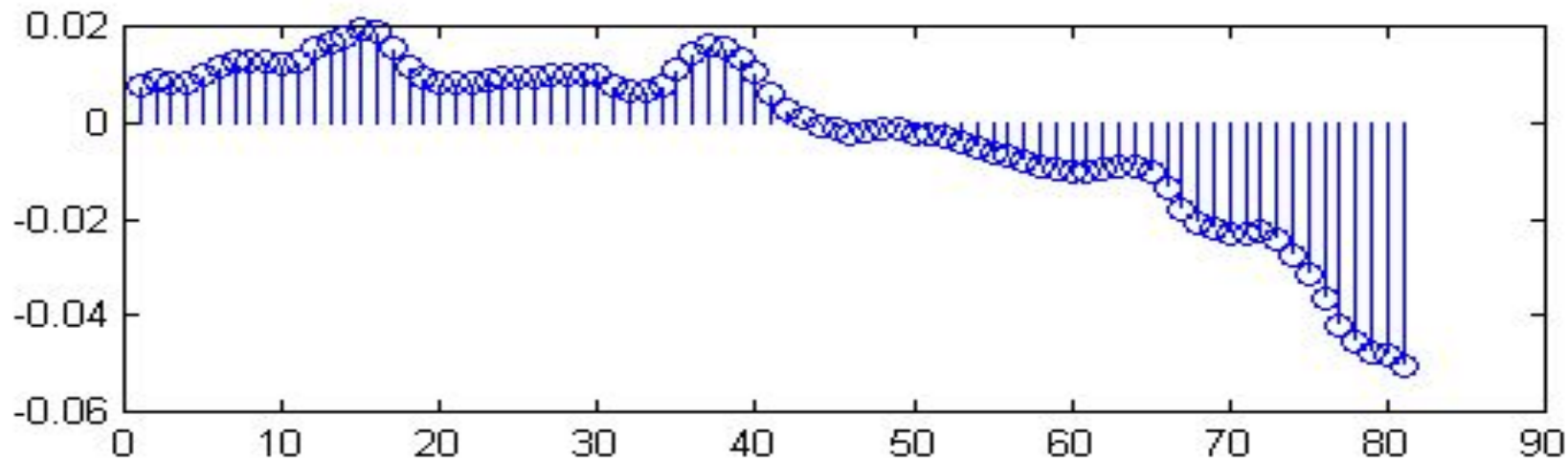


Как быть с фазой?

Периодическое продолжение

С точки зрения спектрального анализа дискретных сигналов, **ЛЮБОЙ** дискретный сигнал считается **периодически продолженным**

Пример – исходный и периодически продолженный сигналы



Периодическое продолжение

- Любой сигнал (вне зависимости от того, является ли он физически периодическим или нет) рассматривается как **периодически продолженный (= периодический)**
- Для БПФ и участок гласного, и участок фрикативного будут равно периодическими

Теорема Фурье

- Раз любой дискретный сигнал рассматривается как периодический (с периодом T , равным длительности сигнала), то к нему можно применить теорему Фурье
- Следовательно, любой дискретный сигнал может быть представлен как сумма гармоник с частотами $(1/T)$, $(2/T)$, $(3/T)$, $(4/T)$ и т.д.

Пример

- Пусть длительность T анализируемого сигнала = 20 миллисекунд (0.02 секунд). Тогда сигнал может быть представлен в виде суммы гармоник с частотами 50 Гц ($1 / 0.02$), 100 Гц ($2 / 0.02$), и т.д.
- Для данного сигнала частота 50 Гц **никакого отношения** не имеет к частоте колебаний голосовых складок.

Дискретное преобразование Фурье

- **Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) (Discrete Fourier Transform, DFT)** – результат применения теоремы Фурье к дискретному сигналу
- ДПФ позволяет вычислить спектр сигнала по самому сигналу
- **Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) (Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT)** позволяет вычислить сигнал по его спектру

Свойства ДПФ

Свойство 1

- Если длина сигнала в отсчетах = N , то количество гармоник в Фурье-разложении также будет N (а не бесконечное число, как для непрерывных сигналов)
- Соответствующий спектр Фурье также будет иметь N спектральных линий

Пример

- Пусть частота дискретизации сигнала 16 кГц, длительность сигнала в отсчетах = 160 отсчетов (10 миллисекунд). Тогда общее количество гармоник ДПФ-разложения = 160
- Частота самой нижней гармоники будет равна $1 / 0.01 = 100$ Гц
- Частота самой высокой гармоники будет равна $160 / 0.01 = 16$ кГц
- Разрешение между соседними гармониками по частоте = разности между частотами соседних гармоник = 100 Гц

СВОЙСТВО 2

- Если частота дискретизации сигнала = F_s , то частота самой высокой гармоники в ДПФ-разложении равна частоте дискретизации F_s
- Если длительность сигнала (в секундах) = T , то разрешение по частоте равно $1/T$

Скорость вычисления спектра

- Если длина сигнала в отсчетах = N , то общее количество операций, необходимых для вычисления спектра, примерно равно N^2
- Например, если длина сигнала = 256 отсчетов, для вычисления спектра необходимо совершить 65536 операций
- Нельзя ли сократить число операций?

Быстрое преобразование Фурье

- **Быстрое преобразование Фурье (БПФ) (Fast Fourier Transform, FFT)** – способ «быстрого» вычисления ДПФ за счет одного математического трюка
- **Обратное быстрое преобразование Фурье (ОБПФ) (Inverse Fast Fourier Transform, IFFT)** - способ «быстрого» вычисления ОДПФ за счет одного математического трюка
- Общее количество операций в БПФ – примерно $N \log_2 N$
- Например, для 256 отсчетов имеем количество операций 2048 операций (вместо 65536 для ДПФ)

В чем трюк?

Если длина сигнала в отсчетах есть степень двойки (например, 256 отсчетов = 2^8 , 512 отсчетов = 2^9), то количество операций можно существенно сократить

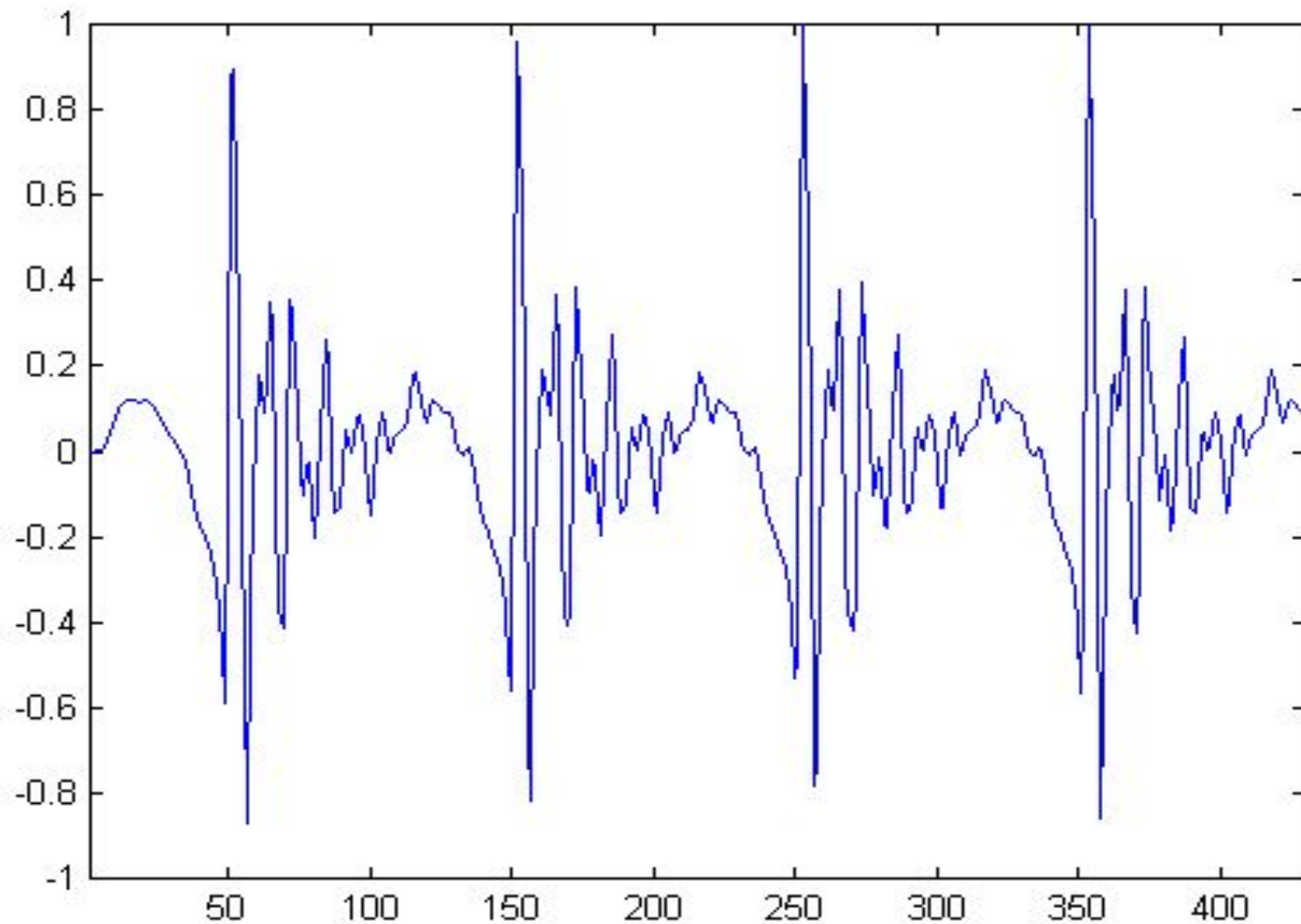
БПФ

- Таким образом, для эффективного использования БПФ длина сигнала в отсчетах должна быть **64** или **128** или **256** или **512** или **1024** или **2048** и т.д.
- Как этого добиться в действительности?

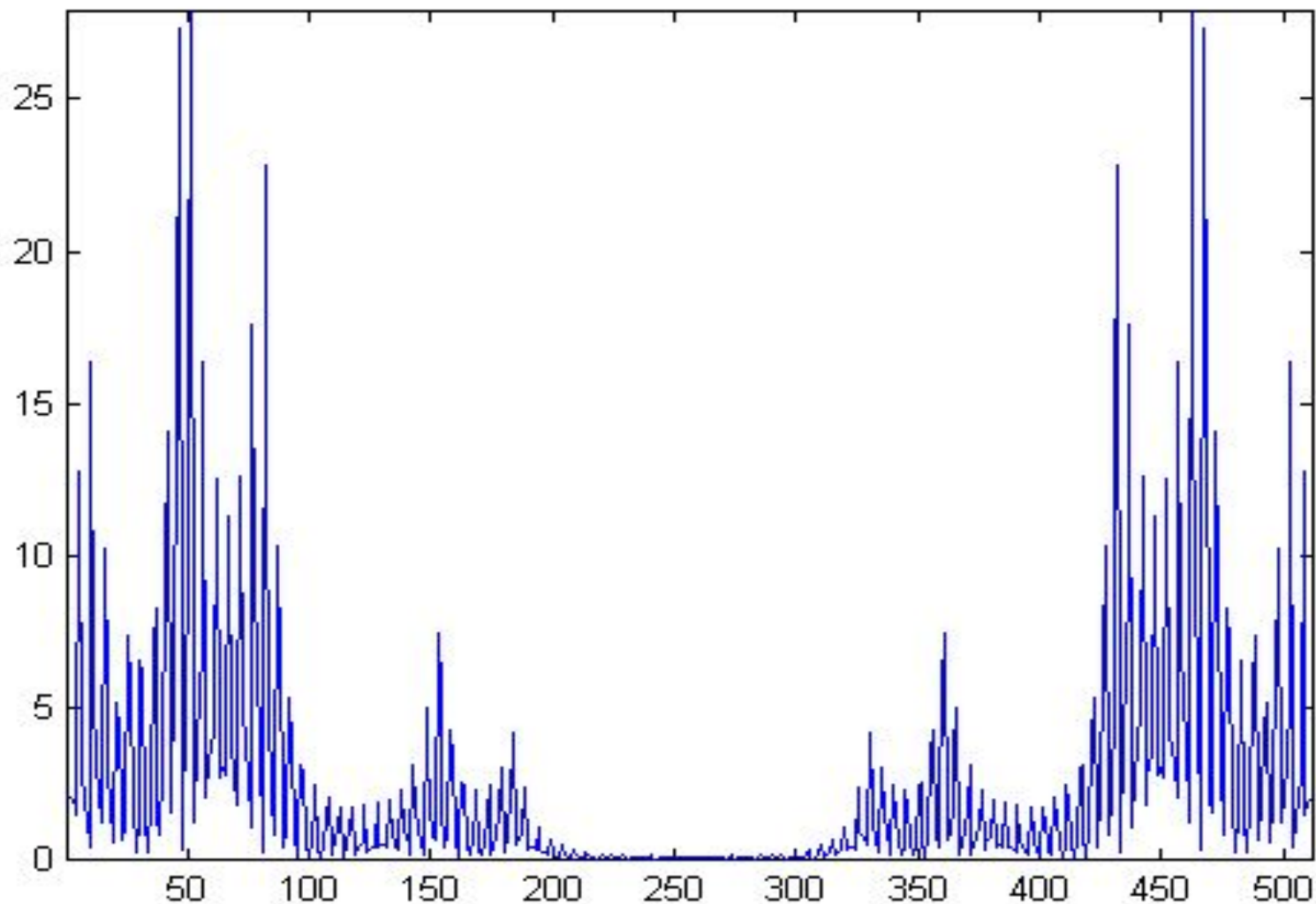
MATLAB

- $Y = \text{fft}(x)$ - без дополнения нулями
(может вычислять ОЧЕНЬ медленно,
если длина сигнала x в отсчетах не равна
степени двойки)
- $Y = \text{fft}(x, N)$ – с дополнением нулями до
 N (где N – число, равное степени двойки,
и большее, чем исходная длина сигнала x
в отсчетах)
- $X = \text{ifft}(Y)$ – ОБПФ

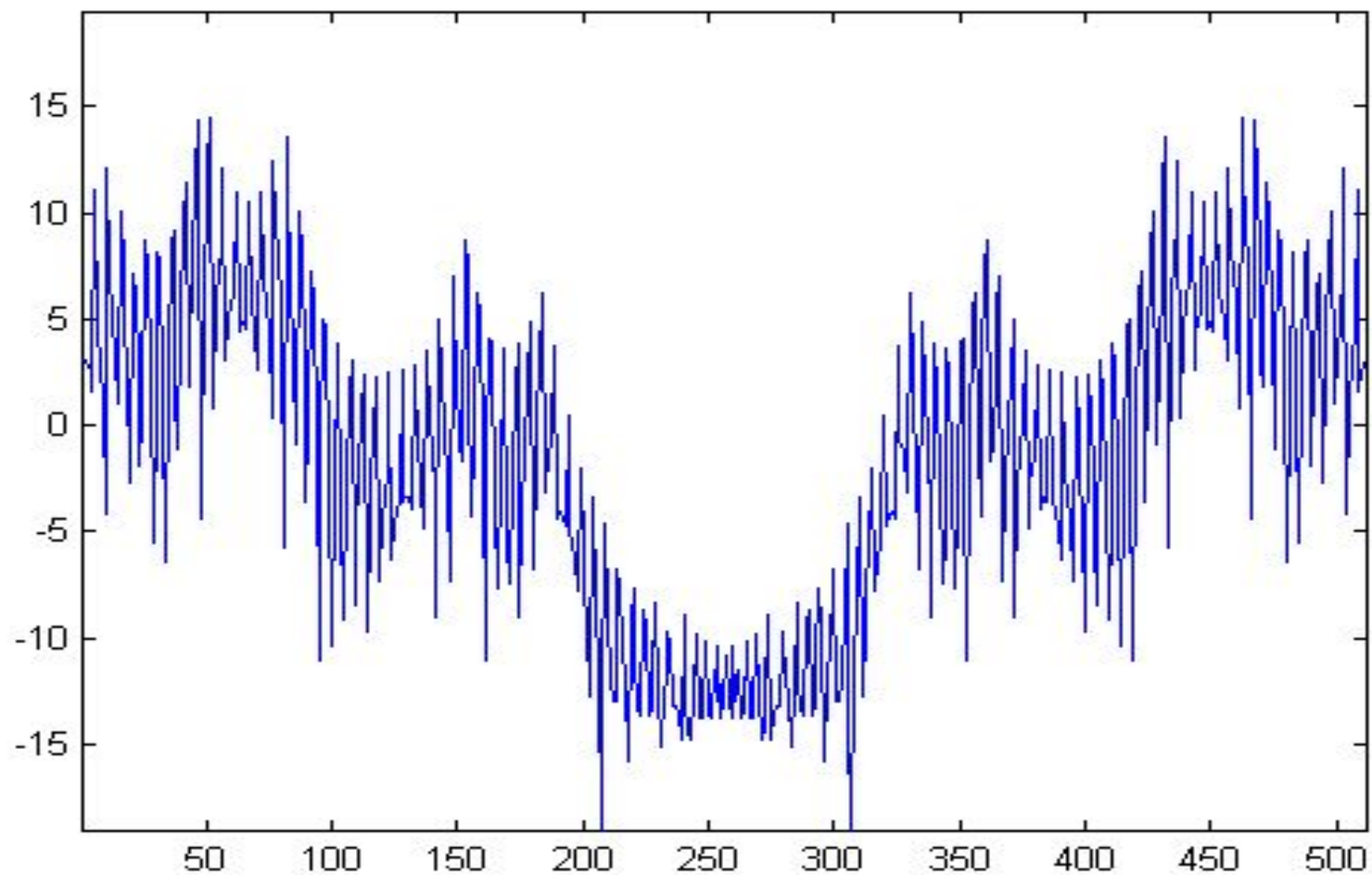
Пример



512-БПФ (амплитудный спектр)



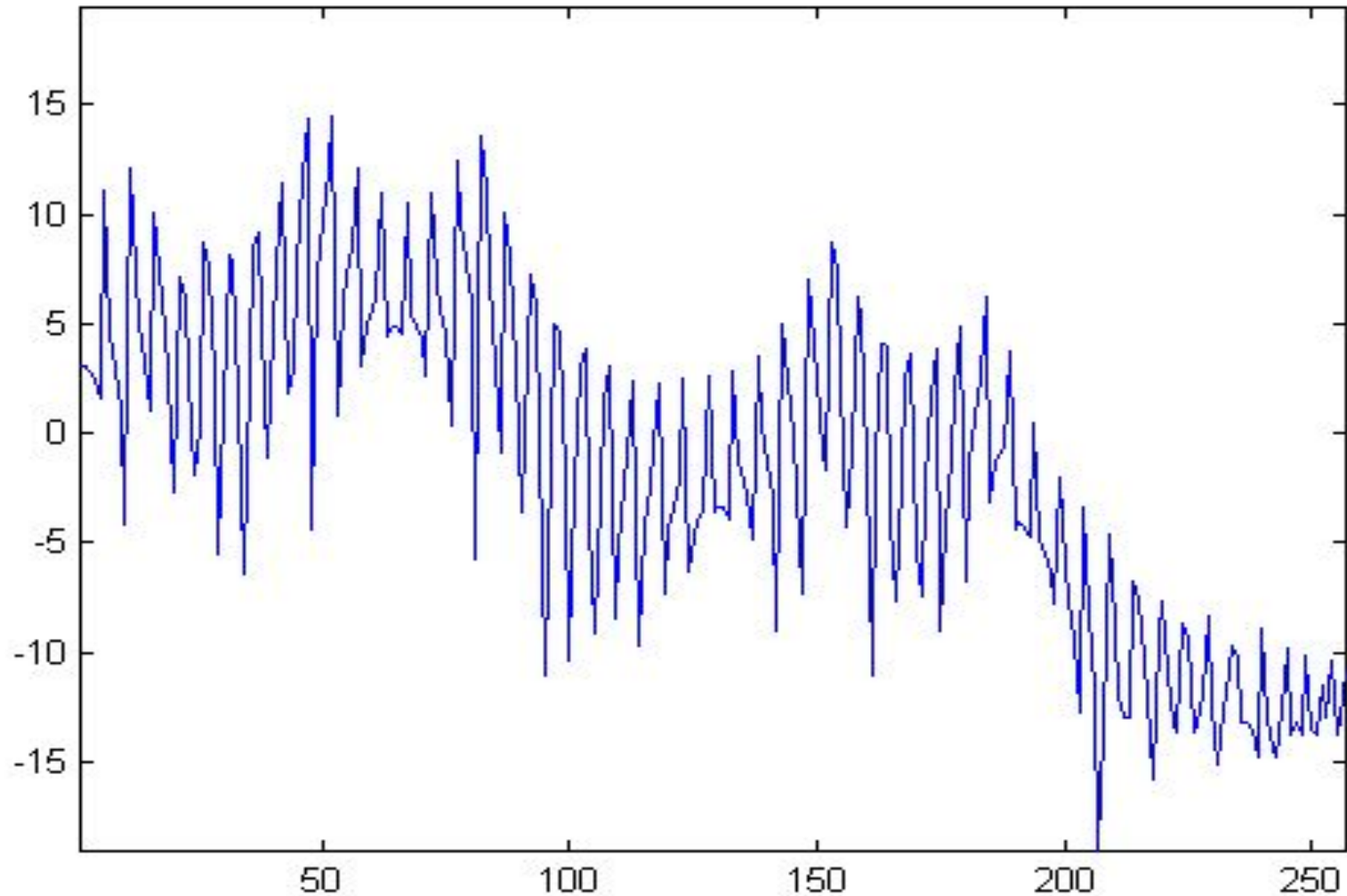
512-БПФ (логарифмический спектр)



Свойство 3

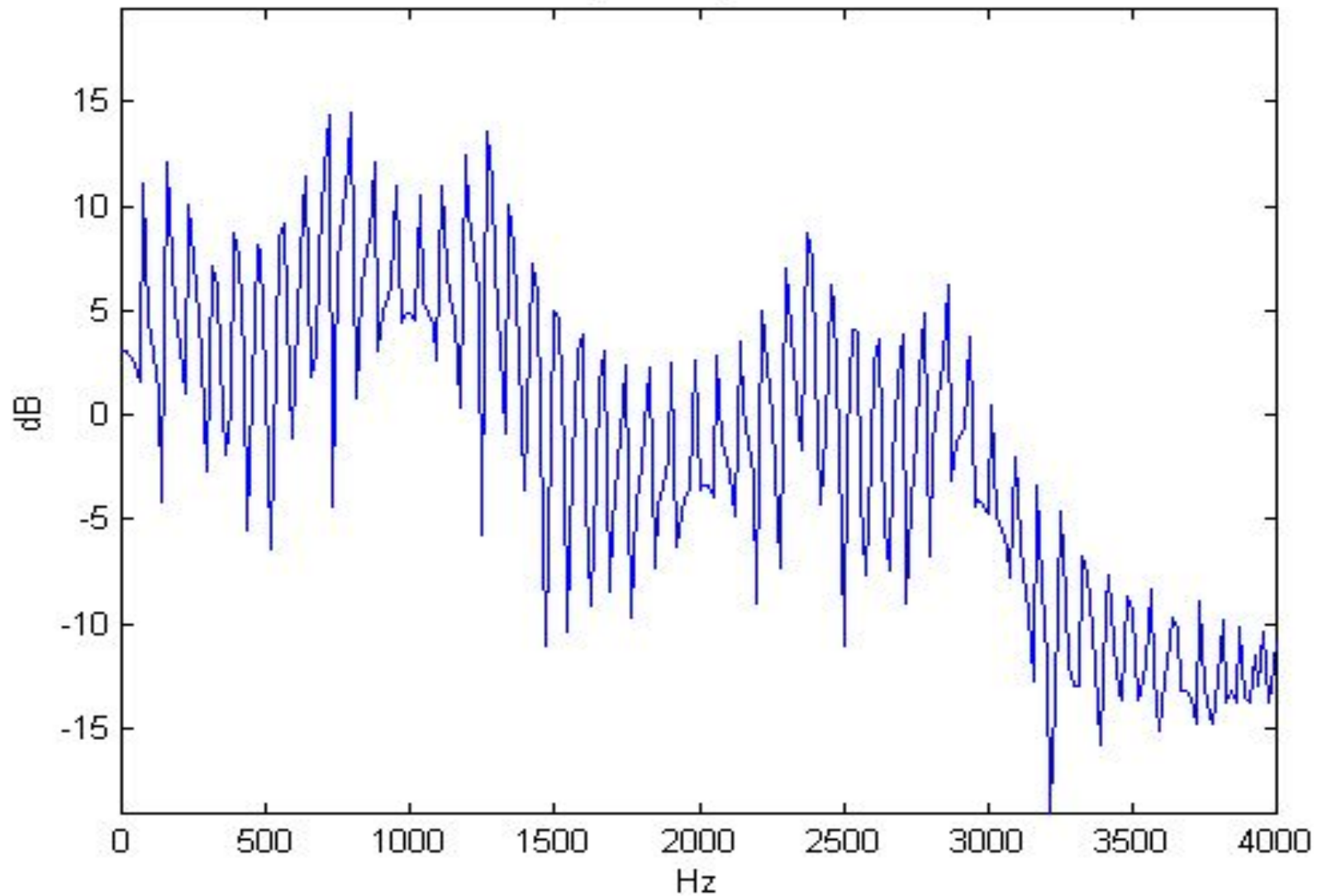
- БПФ-спектр симметричен относительно срединной гармоники (например, 256-й гармоники для 512-точечного БПФ)
- Соответствующая частота = половине частоты дискретизации
- Например, для частоты дискретизации 16 кГц БПФ-спектр симметричен относительно частоты 8 кГц
- Необходимо вычислять спектр только до половины частоты дискретизации

512-БПФ, физический спектр

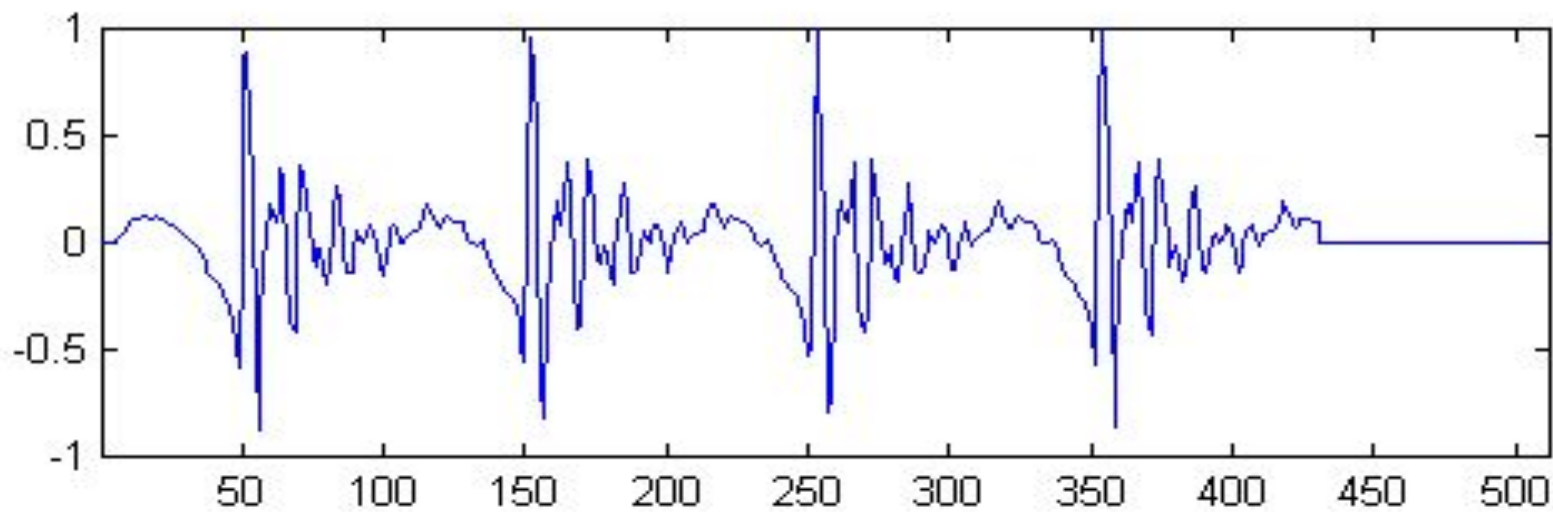
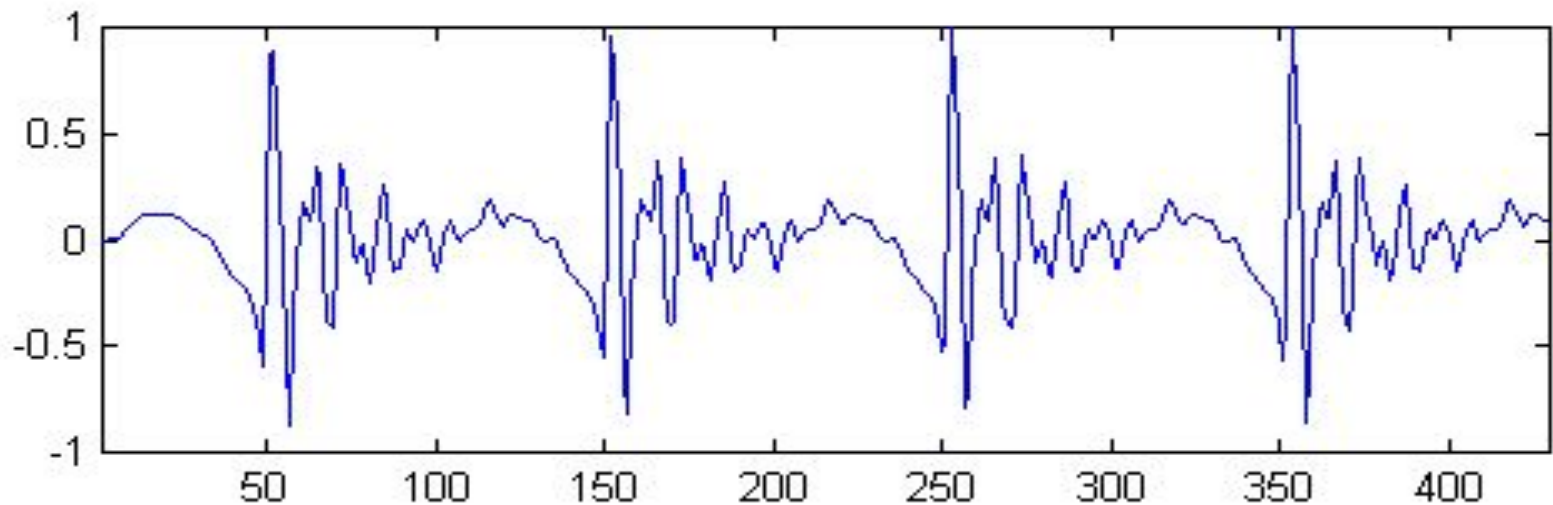


512-БПФ

Magnitude Spectrum



ОБПФ



Что нужно помнить

- Если длина сигнала в отсчетах = N , в секундах = T , то сигнал можно представить суммой из N гармоник с частотами $1/T, 2/T, 3/T, \dots, N/T$
- БПФ-спектр нужно вычислять до гармоники с частотой $N/(2T)$
- Если частота дискретизации сигнала = F_s , то БПФ-спектр вычисляется до частоты $F_s/2$
- Если N – не степень двойки, то необходимо дополнить нулями сигнал до ближайшего числа, являющегося степенью двойки (в **MATLAB** это делается автоматически)