КОНЪЮНКЦИЯ И ДИЗЪЮНКЦИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. КОНЪЮНКЦИЯ И ДИЗЪЮНКЦИЯ ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫХ ФОРМ.

Работу выполнила:
Студентка 1 курса группы 1НИЯ
Филиппова Наталья

Конъюнкция высказываний

Выясним смысл, который имеет в математике союз «и». Пусть A и B – произвольные высказывания. Образуем из них с помощью союза «и» составное высказывание. Полученное высказывание называют *конъюнкцией* и обозначают $A \wedge B$ (читают: «A и B»).

Определение. ***Конъюнкцией высказываний А и В называется высказывание А ⋀ В, которое истинно, когда оба высказывание истины, и ложно, когда хотя бы одно из этих высказываний ложно***.

Определение конъюнкции можно записать с помощью таблицы, называемой *таблицей истинности.*

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Пример: найти значение истинности высказывания «число 28 делится на 7 и на 9»,

Решение: данное высказывание состоит из двух элементарных высказываний, соединенных союзом «и», т.е. является конъюнкцией. Так как первое высказывание истинно, а второе ложно, то, согласно конъюнкции, высказывание «число 28 делится на 7 и на 9» будет ложным.

Данное определение конъюнкции не расходится с общепринятым пониманием союза «и».

В обыденной речи конъюнкция также может выражаться, но не только с помощью союза «и», но и другими, например, «а», «но», «однако», «не только…, но и …».

Пример: «Число 15 делится не только на 3, но и на 5».

Дизъюнкция высказываний.

Выясним теперь, какой смысл имеет в математике союз «или».

Пусть A и B – произвольные высказывания. Образуем из них с помощью союза «или» составное высказывание. Полученное высказывание называют *дизъюнкцией* и обозначают $A \vee B$ (читают: «A или B»).

Определение. ***Дизъюнкцией высказываний А и В называется высказывание $A \vee B$, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.***

Таблица истинности дизъюнкции имеет вид:

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Пример: найти значение истинности высказывания «число 28 делится на 7 или на 9».

Решение: Так как это предложение является дизъюнкцией двух высказываний, одно из которых истинно, то, согласно определению, оно истинно.

Из определения дизъюнкции следует, что в математике союз «или» используется как неразделительный, т.е. допускается возможность одновременного выполнения обоих условий. Так, высказывание «15 кратно 3 или 5», согласно определению, считается истинным, поскольку оба высказывания «15 кратно 3» и «15 кратно 5» истинны.

Образование составного высказывания с помощью логической связка называется *логической операцией*. Операция, соответствующая союзу «и», называется *конъюнкцией;* операция, соответствующая союзу «или», - *дизъюнкцией.* Заметим, что названия логический операция и их результаты (составные предложения) называются одинаково.

Определения конъюнкции и дизъюнкции можно обобщить на t составляющих их высказываний.

Конъюнкцией t высказываний *называется предложение вида* $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge \wedge A_1$ *которое истинно тогда и только тогда, когда истинны все составляющие его высказывания.*

Дизъюнкцией t высказываний *называется предложение вида* $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee \vee A_1$*, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны все составляющие его высказывания.*

Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм

В математике рассматривают не только конъюнкцию и дизъюнкцию высказываний, но и выполняют соответствующие операции над высказывательными формами.

Конъюнкцию одноместных высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X, обозначают $A(x) \wedge B(x)$. С появлением этого предложения возникает вопрос, как найти его множество истинности, зная множества истинности высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$. Другими словами, при каких значениях x из области определения X высказывательная форма $A(x) \wedge B(x)$ обращается в истинное высказывание? Очевидно, что это возможно при тех и только тех значениях x, при которых обращаются в истинное высказывание обе высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$. Если обозначить T_A – множество истинности предложения $A(x)$, T_B – множество истинности предложения $B(x)$, а множество истинности их конъюнкции $T_{A \wedge B}$, то, по всей видимости, $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$.

Докажем это равенство.

1. Пусть a – произвольный элемент множества X и известно, что $a \in T_{A \wedge B}$. По определнию множества истинности это означает, что высказывательная форма $A(x) \wedge B(x)$ обращается в истинное высказывание при $x = a$, т. е. высказывание $A(a) \wedge B(a)$ также истинно. Это означает, что $a \in T_A$ и $a \in T_в$. Следовательно, по определению пересечения множеств, $a \in T_A \cap T_B$. Таким образом, мы показали, что $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$.

2. Докажем обратное утверждение. Пусть a – произвольный элемент множества X и известно, что $a \in T_A \cap T_B$. По определению пересечения множеств это означает, что $a \in T_A$ и $a \in T_в$, откуда получаем, что $A(a)$ и $B(a)$ – истинные высказывания, поэтому конъюнкция высказываний $A(a) \wedge B(a)$ также будет истинна. А это означает, что элемент a принадлежит множеству истинности высказывательной формы $A(x) \wedge B(x)$, т.е. $a \in T_{A \wedge B}$. Таким образом, мы доказали, что $T_A \cap T_B \subset T_{A \wedge B}$.

Из 1 и 2 в силу определения равных множеств вытекает справедливость равенства $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$, что и требовалось доказать.

Заметим, что полученное правило справедливо и для высказывательных форм, содержащих более одной переменной.

Приведем пример использования этого правила. Найдем множество истинности конъюнкции двух неравенств $2x > 10$ и $4 + x < 12$, т.е. множество истинности предложения $2x > 10 \wedge 4 + x < 12$. Пусть T_1 – множество решений неравенства $2x > 10$, T_2 - множество решений неравенства $4 + x < 12$. Тогда $T_1 = (5, +\infty)$,

$T_2 = (-\infty, 8)$. Чтобы найти те значения x, при которых истинны оба неравенства, надо найти пересечение их множеств решений: $T_1 \cap T_2 = (5, 8)$.

Видим, что выполнение этого задания свелось к решению системы неравенств. Вообще с точки зрения логики любая система неравенств есть конъюнкция неравенств, так же как и система уравнений есть конъюнкция уравнений.

Дизъюнкцию одноместных высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X, обозначают $A(x) \vee B(x)$. Это предложение будет обращаться в истинное высказывание при тех и только тех значениях x из области определения X, при которых обращается в истинное высказывание хотя бы одна из высказывательных форм, т.е. $T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$.

Доказательство этого равенства проводится аналогично рассмотренному выше.

Приведем пример использования этого правила. Решим, например, уравнение $(x - 2)\cdot(x + 5) = 0$. Известно, что произведение равно нулю тогда и только тогда, тогда хотя бы один из множителей равен нулю. Это означает, что данное уравнение равносильно дизъюнкции: $x - 2 = 0 \vee x = 5 = 0$ и поэтому множество его решений может быть найдено как объединение множеств решений первого и второго уравнений, т.е. $\{2\} \cup \{-5\} = \{-5, 2\}$.

Заметим, что дизъюнкцию уравнение (неравенств) называют также *совокупностью*. Решить совокупность уравнений (неравенств) – это значит найти те значения переменных, при которых истинно хотя бы одно из уравнений (неравенств), входящих в нее.

Характеристические свойства элементов пресечения и объединения множеств А и В представляют собой соответственно конъюнкцию и дизъюнкцию характеристических свойств данных множеств:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}, \; A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

причем каждое свойство представляет собой высказывательную форму.