

**КОНЪЮНКЦИЯ И ДИЗЪЮНКЦИЯ  
ВЫСКАЗЫВАНИЙ.  
КОНЪЮНКЦИЯ И ДИЗЪЮНКЦИЯ  
ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫХ ФОРМ.**

Работу выполнила:  
Студентка 1 курса группы 1НИЯ  
Филиппова Наталья

# Конъюнкция высказываний

Выясним смысл, который имеет в математике союз «и». Пусть  $A$  и  $B$  – произвольные высказывания. Образует из них с помощью союза «и» составное высказывание. Полученное высказывание называют *конъюнкцией* и обозначают  $A \wedge B$  (читают: « $A$  и  $B$ »).

**Определение.** *Конъюнкцией высказываний  $A$  и  $B$  называется высказывание  $A \wedge B$ , которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из этих высказываний ложно.*

Определение конъюнкции можно записать с помощью таблицы, называемой *таблицей истинности*.

$A$	$B$	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

**Пример:** найти значение истинности высказывания «число 28 делится на 7 и на 9»,

**Решение:** данное высказывание состоит из двух элементарных высказываний, соединенных союзом «и», т.е. является конъюнкцией. Так как первое высказывание истинно, а второе ложно, то, согласно конъюнкции, высказывание «число 28 делится на 7 и на 9» будет ложным.

Данное определение конъюнкции не расходится с общепринятым пониманием союза «и».

В обыденной речи конъюнкция также может выражаться, но не только с помощью союза «и», но и другими, например, «а», «но», «однако», «не только..., но и ...».

**Пример:** «Число 15 делится не только на 3, но и на 5».

# ДИЗЬЮНКЦИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ.

Выясним теперь, какой смысл имеет в математике союз «или».

Пусть  $A$  и  $B$  – произвольные высказывания. образуем из них с помощью союза «или» составное высказывание. Полученное высказывание называют *дизъюнкцией* и обозначают  $A \vee B$  (читают: « $A$  или  $B$ »).

**Определение.** *Дизъюнкцией высказываний  $A$  и  $B$  называется высказывание  $A \vee B$ , которое истинно, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.*

Таблица истинности дизъюнкции имеет вид:

$A$	$B$	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Пример: найти значение истинности высказывания «число 28 делится на 7 или на 9».

Решение: Так как это предложение является дизъюнкцией двух высказываний, одно из которых истинно, то, согласно определению, оно истинно.

Из определения дизъюнкции следует, что в математике союз «или» используется как неразделительный, т.е. допускается возможность одновременного выполнения обоих условий. Так, высказывание «15 кратно 3 или 5», согласно определению, считается истинным, поскольку оба высказывания «15 кратно 3» и «15 кратно 5» истинны.

Образование составного высказывания с помощью логической связки называется *логической операцией*.

Операция, соответствующая союзу «и», называется *конъюнкцией*; операция, соответствующая союзу «или», - *дизъюнкцией*. Заметим, что названия логической операции и их результаты (составные предложения) называются одинаково.

Определения конъюнкции и дизъюнкции можно обобщить на  $t$  составляющих их высказываний.

**Конъюнкцией  $t$  высказываний** называется предложение вида  $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_t$  которое истинно тогда и только тогда, когда истинны все составляющие его высказывания.

**Дизъюнкцией  $t$  высказываний** называется предложение вида  $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_t$ , которое ложно тогда и только тогда, когда ложны все составляющие его высказывания.

# Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм

В математике рассматривают не только конъюнкцию и дизъюнкцию высказываний, но и выполняют соответствующие операции над высказывательными формами.

*Конъюнкцию* одноместных высказывательных форм  $A(x)$  и  $B(x)$ , заданных на множестве  $X$ , обозначают  $A(x) \wedge B(x)$ . С появлением этого предложения возникает вопрос, как найти его множество истинности, зная множества истинности высказывательных форм  $A(x)$  и  $B(x)$ . Другими словами, при каких значениях  $x$  из области определения  $X$  высказывательная форма  $A(x) \wedge B(x)$  обращается в истинное высказывание? Очевидно, что это возможно при тех и только тех значениях  $x$ , при которых обращаются в истинное высказывание обе высказывательные формы  $A(x)$  и  $B(x)$ . Если обозначить  $T_A$  – множество истинности предложения  $A(x)$ ,  $T_B$  – множество истинности предложения  $B(x)$ , а множество истинности их конъюнкции  $T_{A \wedge B}$ , то, по всей видимости,  $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$ .

Докажем это равенство.

1. Пусть  $a$  – произвольный элемент множества  $X$  и известно, что  $a \in T_{A \wedge B}$ . По определению множества истинности это означает, что высказывательная форма  $A(x) \wedge B(x)$  обращается в истинное высказывание при  $x = a$ , т. е. высказывание  $A(a) \wedge B(a)$  также истинно. Это означает, что  $a \in T_A$  и  $a \in T_B$ . Следовательно, по определению пересечения множеств,  $a \in T_A \cap T_B$ . Таким образом, мы показали, что  $T_{A \wedge B} \subset T_A \cap T_B$ .

2. Докажем обратное утверждение. Пусть  $a$  – произвольный элемент множества  $X$  и известно, что  $a \in T_A \cap T_B$ . По определению пересечения множеств это означает, что  $a \in T_A$  и  $a \in T_B$ , откуда получаем, что  $A(a)$  и  $B(a)$  – истинные высказывания, поэтому конъюнкция высказываний  $A(a) \wedge B(a)$  также будет истинна. А это означает, что элемент  $a$  принадлежит множеству истинности высказывательной формы  $A(x) \wedge B(x)$ , т. е.  $a \in T_{A \wedge B}$ . Таким образом, мы доказали, что  $T_A \cap T_B \subset T_{A \wedge B}$ .

Из 1 и 2 в силу определения равных множеств вытекает справедливость равенства  $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$ , что и требовалось доказать.

Заметим, что полученное правило справедливо и для высказывательных форм, содержащих более одной переменной.



Приведем пример использования этого правила. Найдем множество истинности конъюнкции двух неравенств  $2x > 10$  и  $4 + x < 12$ , т.е. множество истинности предложения  $2x > 10 \wedge 4 + x < 12$ . Пусть  $T_1$  – множество решений неравенства  $2x > 10$ ,  $T_2$  – множество решений неравенства  $4 + x < 12$ . Тогда  $T_1 = (5, +\infty)$ ,

$T_2 = (-\infty, 8)$ . Чтобы найти те значения  $x$ , при которых истинны оба неравенства, надо найти пересечение их множеств решений:  $T_1 \cap T_2 = (5, 8)$ .

Видим, что выполнение этого задания свелось к решению системы неравенств. Вообще с точки зрения логики любая система неравенств есть конъюнкция неравенств, так же как и система уравнений есть конъюнкция уравнений.

*Дизъюнкцию* одноместных высказывательных форм  $A(x)$  и  $B(x)$ , заданных на множестве  $X$ , обозначают  $A(x) \vee B(x)$ . Это предложение будет обращаться в истинное высказывание при тех и только тех значениях  $x$  из области определения  $X$ , при которых обращается в истинное высказывание хотя бы одна из высказывательных форм, т.е.  $T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$ .

Доказательство этого равенства проводится аналогично рассмотренному выше.

Приведем пример использования этого правила. Решим, например, уравнение  $(x - 2) \cdot (x + 5) = 0$ . Известно, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Это означает, что данное уравнение равносильно дизъюнкции:  $x - 2 = 0 \vee x + 5 = 0$  и поэтому множество его решений может быть найдено как объединение множеств решений первого и второго уравнений, т.е.  $\{2\} \cup \{-5\} = \{-5, 2\}$ .

Заметим, что дизъюнкцию уравнение (неравенств) называют также *совокупностью*. Решить совокупность уравнений (неравенств) – это значит найти те значения переменных, при которых истинно хотя бы одно из уравнений (неравенств), входящих в нее.



Характеристические свойства элементов пересечения и объединения множеств  $A$  и  $B$  представляют собой соответственно конъюнкцию и дизъюнкцию характеристических свойств данных множеств:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}, A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

причем каждое свойство представляет собой высказывательную форму.