

# Курсовая работа по математическим методам

Тема: Решение Задачи коммивояжера  
методом ветвей и границ

---

# Вступление

- В 1859 г. Сэр Вильям Гамильтон, знаменитый математик, давший миру теорию комплексного числа, предложил детскую головоломку, в которой предлагалось совершить «круговое путешествие» по 20 городам, расположенных в различных частях земного шара. Каждый город соединялся дорогами с тремя соседними так, что дорожная сеть образовывала 30 ребер додекаэдра, в вершинах которого находились города  $a, b, \dots, t$ . Обязательным условием являлось требование: каждый город за исключением первого можно посетить один раз.

# Пример решения

Пусть имеется граф, заданный матрицей смежности:

—	6	4	8	7	14
6	—	7	11	7	10
4	7	—	4	3	10
8	11	4	—	5	11
7	7	3	5	—	7
14	10	10	11	7	—

- Элемент матрицы  $c_{ij}$  будем считать стоимостью перелета из города  $i$  в город  $j$ .
- Справедливо следующее: вычитая любую константу из всех элементов любой строки или столбца матрицы  $C$ , оставляем минимальный тур минимальным. В связи с этим, процесс вычитания из каждой строки ее минимального элемента (приведение по строкам) не влияет на минимальный тур. Аналогично вводится понятие приведения по столбцам, обладающее тем же свойством.

Приведем исходную матрицу по строкам

Исходная:

—	<b>6</b>	4	8	7	14
6	—	7	11	7	<b>10</b>
4	7	—	4	3	10
8	11	4	—	5	11
7	7	3	<b>5</b>	—	7
14	10	10	11	7	—

Выделенные жирным шрифтом числа в исходной матрице — это идеальный тур

Приведенная по строкам:

—	2	0	4	3	10	4
6	—	7	11	7	10	6
4	7	—	4	3	10	3
8	11	4	—	5	11	4
7	7	3	5	—	7	3
14	10	10	11	7	—	7

сумма констант приведения есть  $4 + 6 + 3 + 4 + 3 + 7 = 27$

Приведенная по столбцам:

—	0	0	3	3	6
0	—	1	4	1	0
1	2	—	0	0	3
4	5	0	—	1	3
4	2	0	1	—	0
7	1	3	3	0	—
<b>0</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>4</b>

сумма констант приведения здесь есть  $0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 4 = 7$ ,  
а всех констант:  $27 + 7 = 34$

- Теперь, тур, проходящий только через ребра нулевой стоимости, будет, очевидно, минимальным. Для того, чтобы определить его стоимость, прибавим к нулю только что вычисленную константу 34:  $0 + 34 = 34$
- Таким образом, мы получили нижнюю оценку стоимости класса всех возможных туров. Т. е. минимальный тур в данной задаче не может стоить меньше, чем 34.



Назовем *оценкой* нуля в позиции  $(i, j)$  в матрице сумму минимальных элементов в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце (не считая сам этот ноль). Оценим теперь каждый ноль в приведенной матрице:

—	$0^1$	0	3	3	6
$0^1$	—	1	4	1	0
1	2	—	$0^1$	0	3
4	5	$0^1$	—	1	3
4	2	0	1	—	0
7	1	3	3	$0^1$	—

Оценка  $k$  нуля, в позиции  $(i, j)$  означает буквально следующее: если в тур не будет включен путь из  $i$  в  $j$  (стоимостью  $0$ ), то придется доплатить как минимум  $k$ . Поэтому, можно разделить класс всех возможных туров на два: туры, содержащие ребро  $(i, j)$  и туры, не содержащие его. Для последних минимальная оценка увеличится на  $k$ .

—	$0^1$	0	3	3	6
$0^1$	—	1	4	1	0
1	2	—	$0^1$	0	3
4	5	$0^1$	—	1	3
4	2	0	1	—	0
7	1	3	3	$0^1$	—

Рассмотрим ребро, соответствующее нулю с максимальной оценкой. В данном случае это ребро (1, 2). Таким образом, как только что было замечено, класс всех туров разбивается на два: содержащих ребро (1, 2) и не содержащих его. Нижняя оценка стоимости второго класса туров увеличивается до 35. Чтобы определить оценку для первого класса туров удалим из матрицы строку 1 и столбец 2

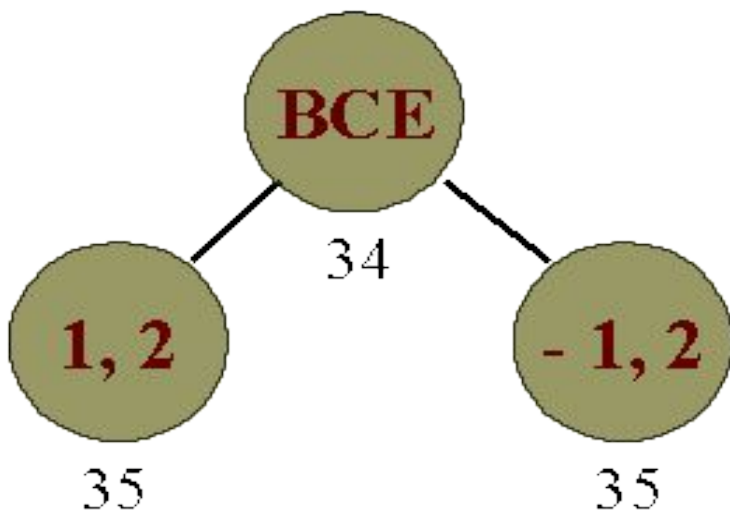
	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	—	1	4	1	0
<b>3</b>	1	—	0 <sup>1</sup>	0	3
<b>4</b>	4	0 <sup>1</sup>	—	1	3
<b>5</b>	4	0	1	—	0
<b>6</b>	7	3	3	0 <sup>1</sup>	—

приведем ее и заново оценить нули:

	1	3	4	5	6
2	—	1	4	1	$0^1$
3	$0^3$	—	$0^1$	0	3
4	3	$0^1$	—	1	3
5	3	0	1	—	0
6	6	3	3	$0^3$	—

Т. к. матрицу удалось привести на 1 (по 1-му столбцу), то оценка класса туров с ребром (1, 2) увеличивается на 1 и становится равной 35.

- Разбиение на классы и сами оценки можно представить в виде дерева:



Таким образом, класс (ВСЕ) был разбит на два и были вычислены соответствующие оценки. Выберем теперь класс с наименьшей оценкой и повторим этот процесс для него. Затем из двух полученных классов выберем тот, у которого оценка минимальна и разобьем его. Так будем повторять до тех пор, пока не достигнем листа дерева. Т. е. пока не получим матрицу ох