Л.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

- **Задача геометрических исследований графических моделей конструкций, технологических процессов и систем управления состоит из установления связи между различными геометрическими фигурами, например, выяснение вопроса, каким образом одна фигура может быть получена из другой, то есть какие преобразования нужно произвести с данной фигурой, чтобы получить некоторую другую фигуру.**

- Если производится, какое либо преобразование некоторой фигуры, то интересно исследовать, какие из свойств фигуры при этом изменяются, а какие остаются прежними. Всеми этими вопросами занимается ***теория геометрических преобразований*** или как говорят математики – ***теория трансформаций***.

- **О преобразовании мы говорим, когда каждой точке некоторого множества (фигуры) ставится в соответствие некоторая (другая) точка. Точки, которые ставятся в соответствие точкам исходного множества, называются *образами* точек исходного множества при**

- **Назовем преобразование обыкновенным, если различным точкам соответствуют разные образы. Преобразование, не являющееся обыкновенным, называется *вырожденным*. Преобразования называют также *отображениями*.**

- **Обыкновенным преобразова нием некоторой фигуры является, например, параллельный перенос. Здесь устанавливается соответствие между исходными и смещенными положениями точек. Другой пример: каждой точек кинопленки соответствует**

- **Можно установить соответствие между правым и левым ботинками одной пары обуви, каждой точке одного ботинка можно сопоставить соответствующую точку другого.**

- **А солнечные лучи, например, осуществляют вырожденное отображение цветка на его тень. В действительности, тень от многих точек цветка падает в одну точку, поэтому соответствие уже не является взаимно**

- **В алгебре теория преобразований тесно связана с теорией групп. Классификация преобразований осуществляется согласно тому, какие из свойств фигур они оставляют неизменными, то есть какие группы свойств являются *инвариантными*.**

- **Вследствие этого различают, например, преобразования, сохраняющие расстояния, углы, переводящие окружность в окружность, прямую — в прямую; или преобразования, сохраняющие свойство непрерывности и другие.**

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОВМЕЩЕНИЯ (СОХРАНЯЮЩИЕ РАССТОЯНИЕ)

- **Преобразование сохраняет расстояние, если всякому отрезку прямой оно ставит в соответствие равный ему отрезок. Мы назовем такие преобразования совмещениями (преобразованиями совмещения).**

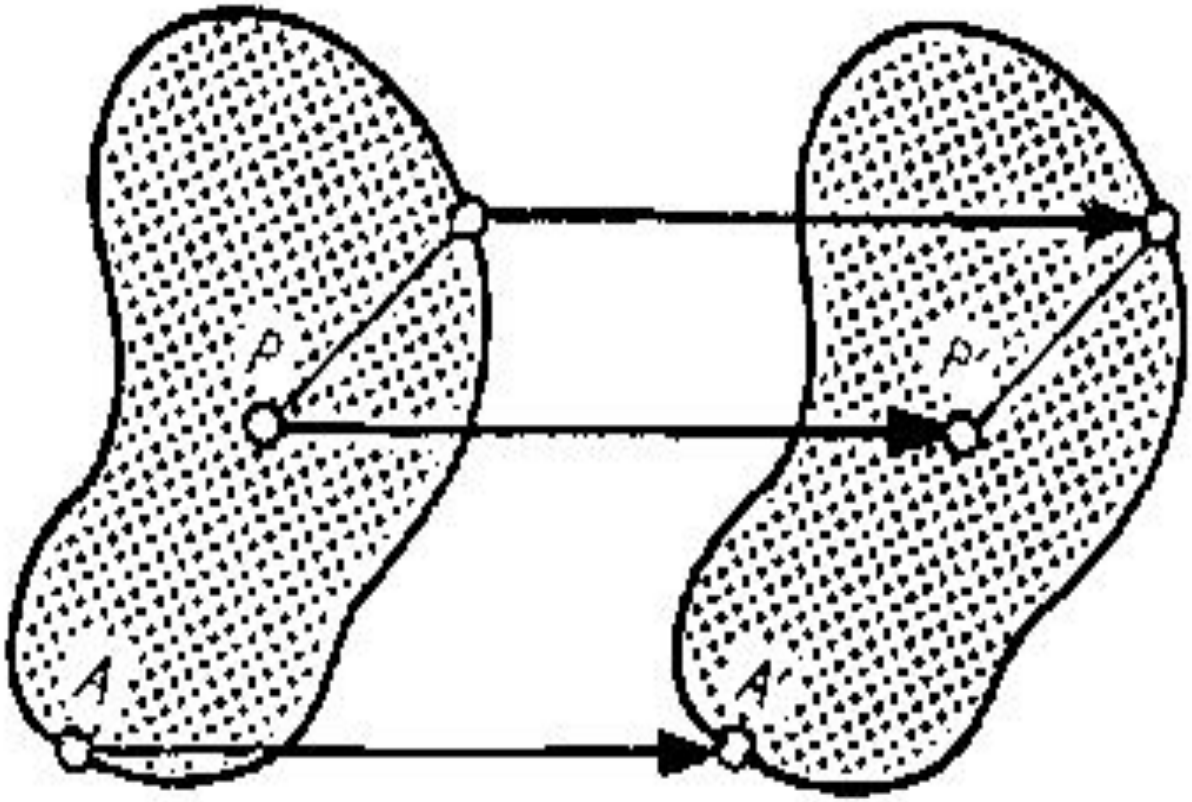
- **Две фигуры могут быть совмещены друг с другом, если существует такое преобразование совмещения, которое переводит одну из них в другую.**
- **Совместимые фигуры на плоскости всегда могут быть совмещены друг с другом в результате некоторого движения (для этого, может быть, нужно выйти за пределы чертежа).**

- **Совместимые же тела — уже не всегда (например, правый и левый ботинки). Совместимость обозначается знаком =. Ниже будут рассмотрены некоторые специальные преобразования совмещения на плоскости.**

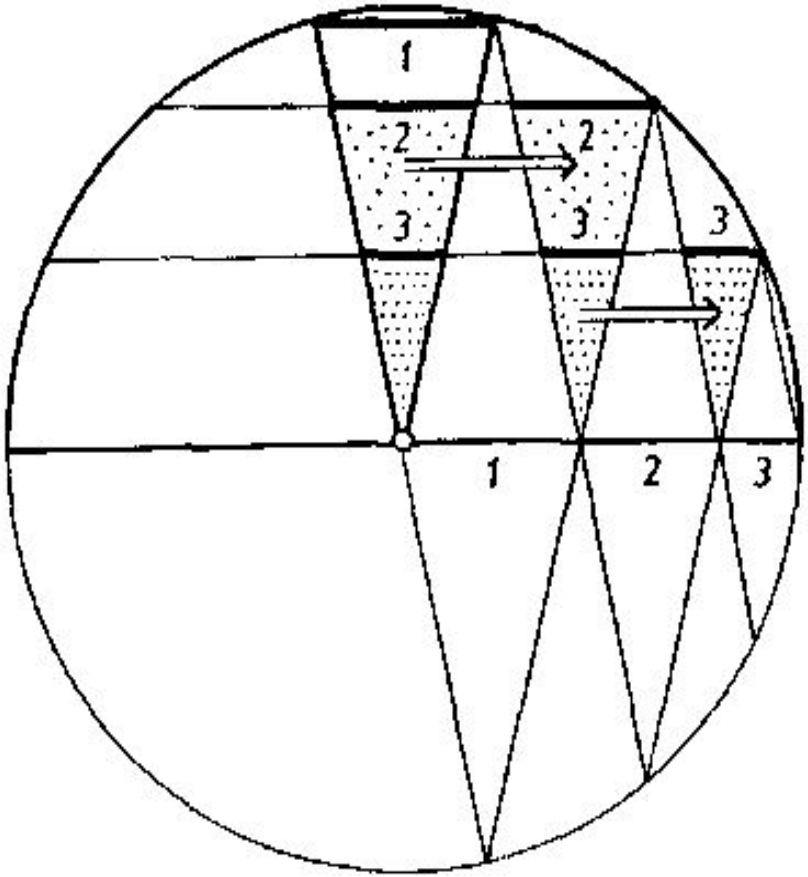
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

- **При параллельном переносе прямые, соединяющие исходные точки с их образами, параллельны между собой (они задают направление переноса);**
- **расстояния от исходных точек до их образов равны (длина переноса). Два последовательно выполняемые переноса могут быть заменены одним, который называется их суммой (или произведением).**

Перенос



Разделим окружность на нечетное количе ство равных частей (на рисунке их семь).

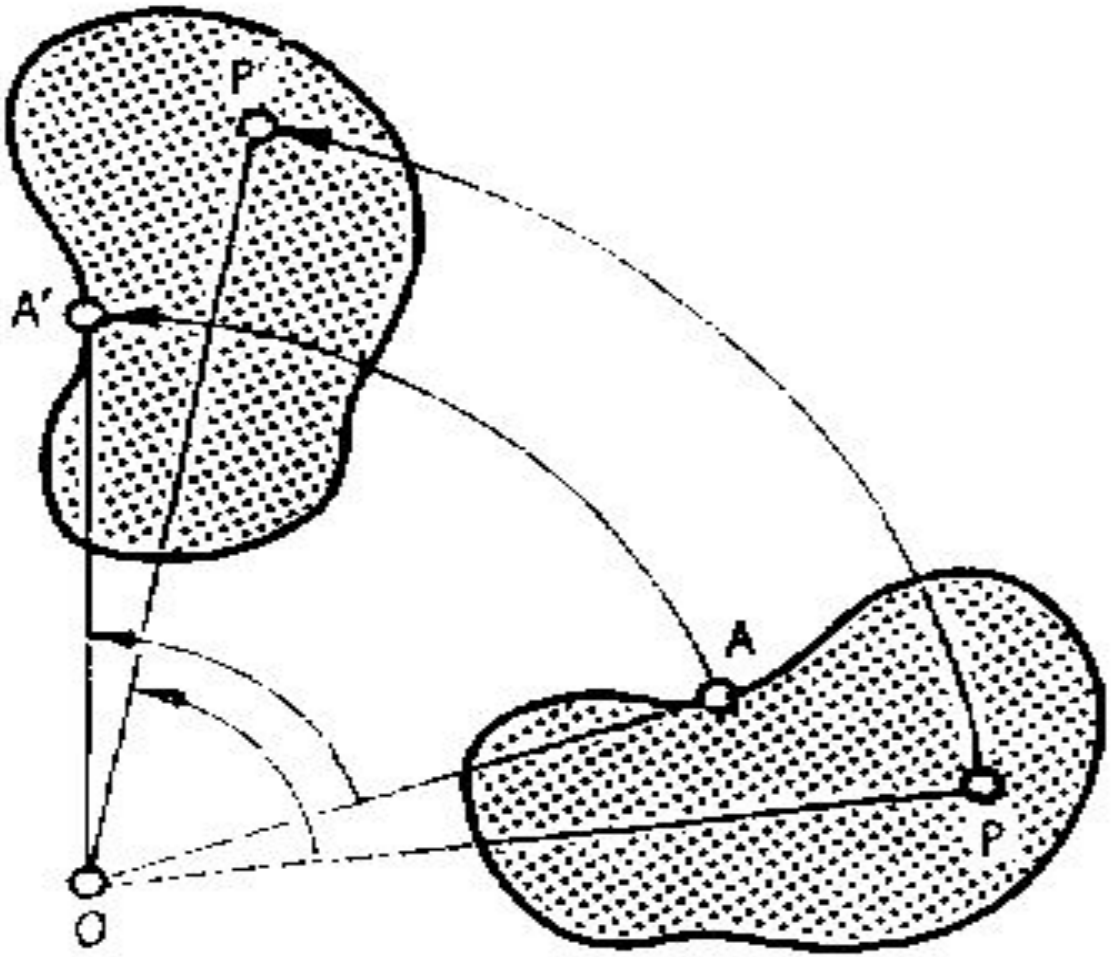


- **Из рисунка видно, что сумма отрезков хорд, расположенных между двумя радиусами равна радиусу окружности.**
- **Точки деления, расположенные на одинаковом расстоянии от диаметра, соединим хордами и проведем радиусы, соответствующие двум средним точкам деления.**

- **При помощи переноса нетрудно убедиться, что отрезки хорд, расположенные между этими радиусами, в сумме дают радиус окружности (из рисунка видно, что каждый из этих отрезков можно с помощью максимум двух переносов (вместе с соответствующим треугольником) наложить на радиус).**

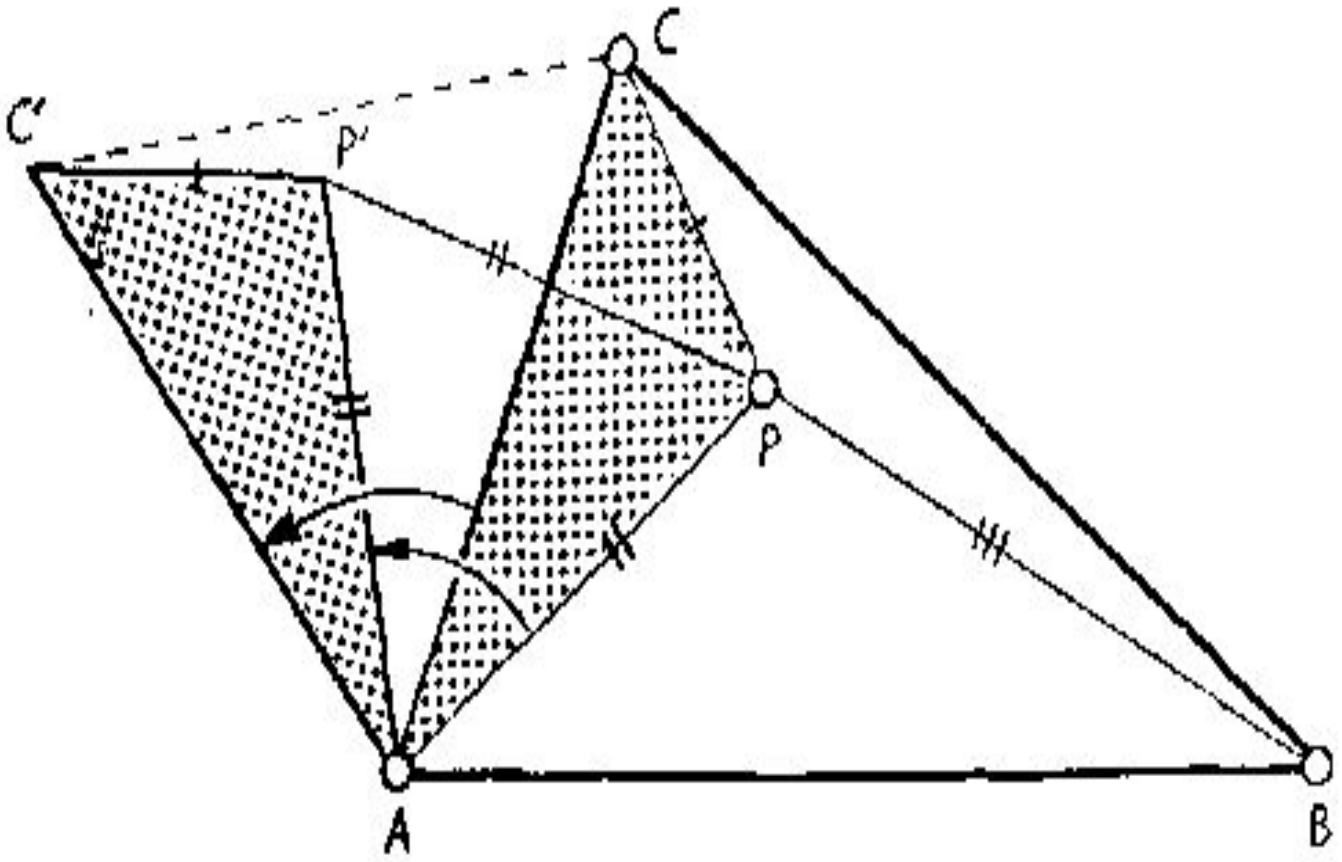
ПОВОРОТ

- **Поворот (вокруг точки) — это такое преобразование совмещения, при котором неподвижной остается только одна точка — центр вращения.**
- **Поворот однозначно определяется заданием центра вращения, направления и угла, на который совершается поворот.**


P'
A'
A
P
O

- **С помощью поворота можно решить, например, следующую задачу: на плоскости требуется найти точку P, сумма расстояний от которой до трех данных точек *A,B* и C той же плоскости была бы наименьшей. Выберем сначала точку P произвольным образом. Величину суммы PA + PB ++ PC можно представить наглядно, если отложить эти отрезки последовательно — один от конца другого.**

Определение точки P, которой соответствует наименьшая сумма расстояний до трех данных точек

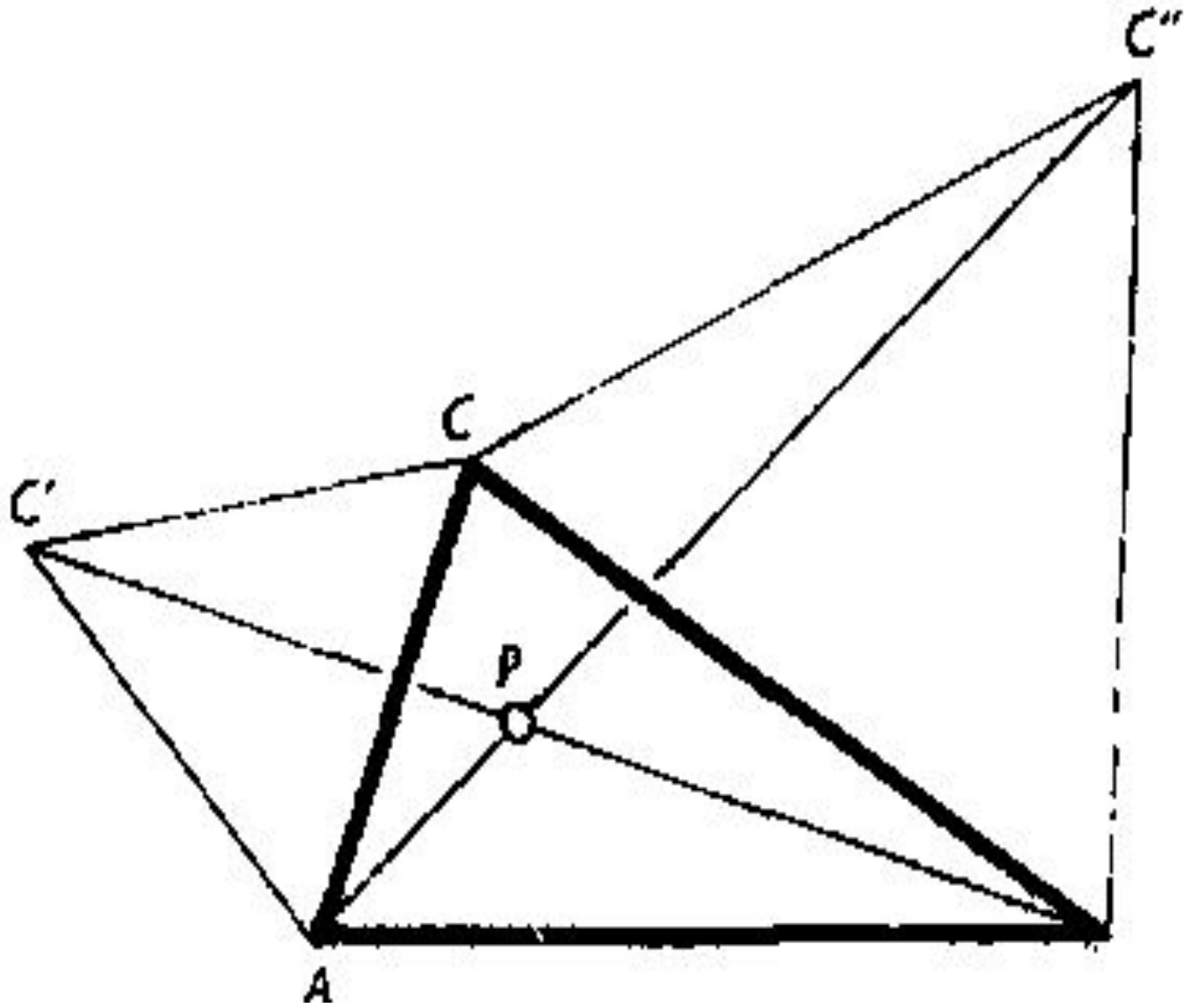


- **Этого можно добиться, если, например, повернуть треугольник ABC вокруг точки A «во внешнюю сторону» на 60° (см. рисунок). При этом получатся равносторонние треугольники *ACC′*, и *APP′*, (оба треугольника равнобедренные с углом при вершине, равным 60°).**

- **Сумма отрезков *C',P', + P',P + PB* равна сумме*PA + PB + PC,* причем она достигает максимума, когда все три отрезка лежат на одной прямой. Отсюда следует, что искомая точка P должна лежать на прямой, соединяющей точку B с точкой C', которая является вершиной равностороннего треугольника, построенного на отрезке A**C

Построение *изогональной* точки

- Аналогичные соображения позволяют заключить, что точка; P должна лежать на прямой, соединяющей точку A с точкой C", которая является вершиной равностороннего треугольника, построенного на отрезке BC.


C''
C
C'
P
A

- **Следовательно, искомая точка P является точкой пересечения прямых *AC''* и *BC'*. (Предполагается, что ни один из углов треугольника ABC не превышает 120°). Точка*P* называется *изогональной* точкой треугольника, так как из нее все стороны треугольника видны под одним и тем же углом.**