Л.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

- **Задача геометрических исследований графических моделей конструкций, технологических процессов и систем управления состоит из установления связи между различными геометрическими фигурами, например, выяснение вопроса, каким образом одна фигура может быть получена из другой, то есть какие преобразования нужно произвести с данной фигурой, чтобы получить некоторую другую фигуру.**

- Если производится, какое либо преобразование некоторой фигуры, то интересно исследовать, какие из свойств фигуры при этом изменяются, а какие остаются прежними. Всеми этими вопросами занимается ***теория геометрических преобразований*** или как говорят математики – ***теория трансформаций***.

- **О преобразовании мы говорим, когда каждой точке некоторого множества (фигуры) ставится в соответствие некоторая (другая) точка. Точки, которые ставятся в соответствие точкам исходного множества, называются *образами* точек исходного множества при**

- **Назовем преобразование обыкновенным, если различным точкам соответствуют разные образы. Преобразование, не являющееся обыкновенным, называется *вырожденным*. Преобразования называют также *отображениями*.**

- Обыкновенным преобразованием некоторой фигуры является, например, параллельный перенос. Здесь устанавливается соответствие между исходными и смещенными положениями точек. Другой пример: каждой точек кинопленки соответствует

- **Можно установить соответствие между правым и левым ботинками одной пары обуви, каждой точке одного ботинка можно сопоставить соответствующую точку другого.**

- А солнечные лучи, например, осуществляют вырожденное отображение цветка на его тень. В действительности, тень от многих точек цветка падает в одну точку, поэтому соответствие уже не является взаимно

- **В алгебре теория преобразований тесно связана с теорией групп. Классификация преобразований осуществляется согласно тому, какие из свойств фигур они оставляют неизменными, то есть какие группы свойств являются *инвариантными*.**

- Вследствие этого различают, например, преобразования, сохраняющие расстояния, углы, переводящие окружность в окружность, прямую — в прямую; или преобразования, сохраняющие свойство непрерывности и другие.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОВМЕЩЕНИЯ (СОХРАНЯЮЩИЕ РАССТОЯНИЕ)

- Преобразование сохраняет расстояние, если всякому отрезку прямой оно ставит в соответствие равный ему отрезок. Мы назовем такие преобразования совмещениями (преобразованиями совмещения).

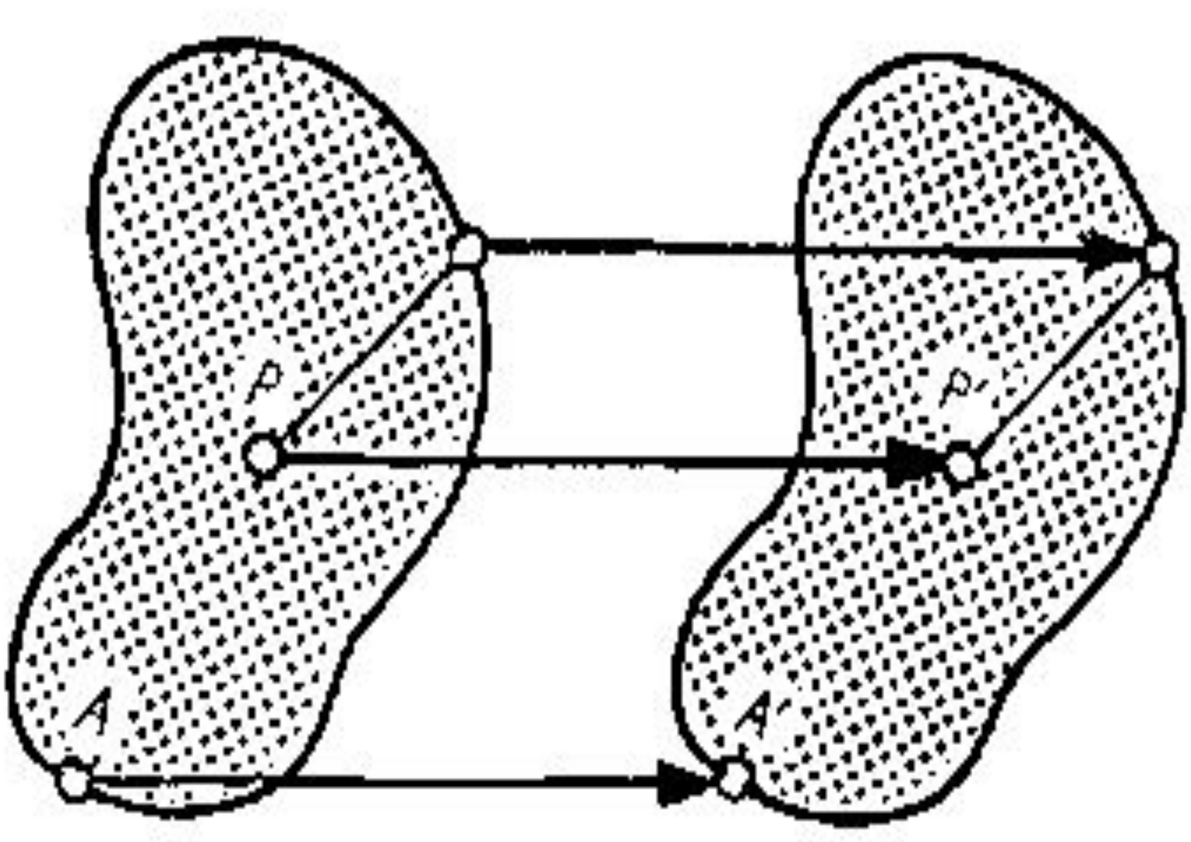
- **Две фигуры могут быть совмещены друг с другом, если существует такое преобразование совмещения, которое переводит одну из них в другую.**
- **Совместимые фигуры на плоскости всегда могут быть совмещены друг с другом в результате некоторого движения (для этого, может быть, нужно выйти за пределы чертежа).**

- Совместимые же тела — уже не всегда (например, правый и левый ботинки). Совместимость обозначается знаком =. Ниже будут рассмотрены некоторые специальные преобразования совмещения на плоскости.

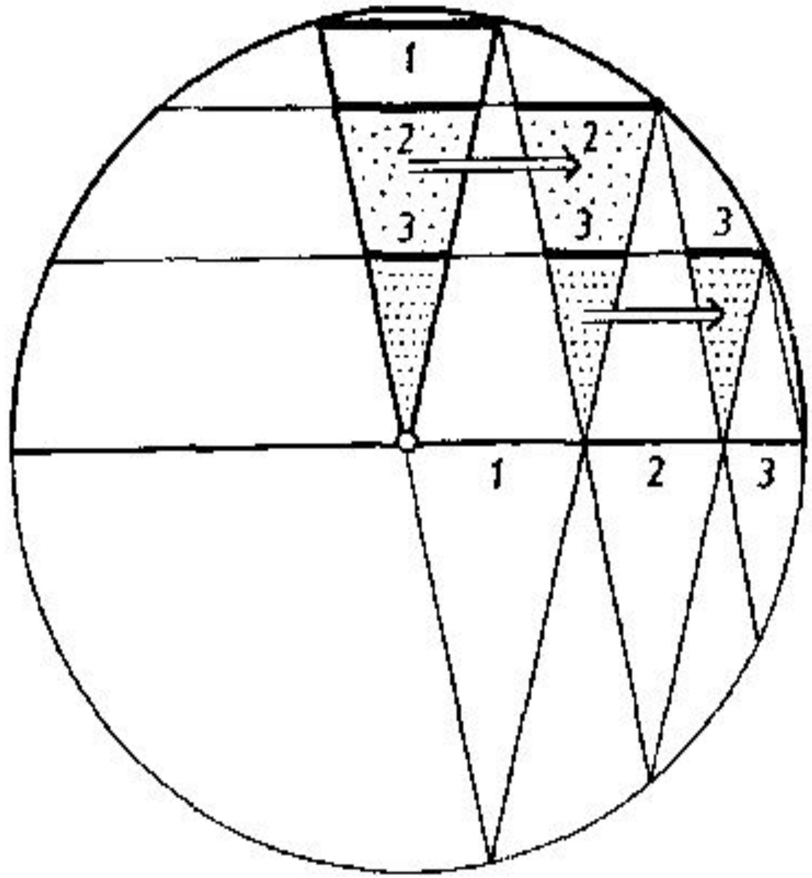
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

- При параллельном переносе прямые, соединяющие исходные точки с их образами, параллельны между собой (они задают направление переноса);
- расстояния от исходных точек до их образов равны (длина переноса). Два последовательно выполняемые переноса могут быть заменены одним, который называется их суммой (или произведением).

Перенос



Разделим окружность на нечетное количе ство равных частей (на рисунке их семь).

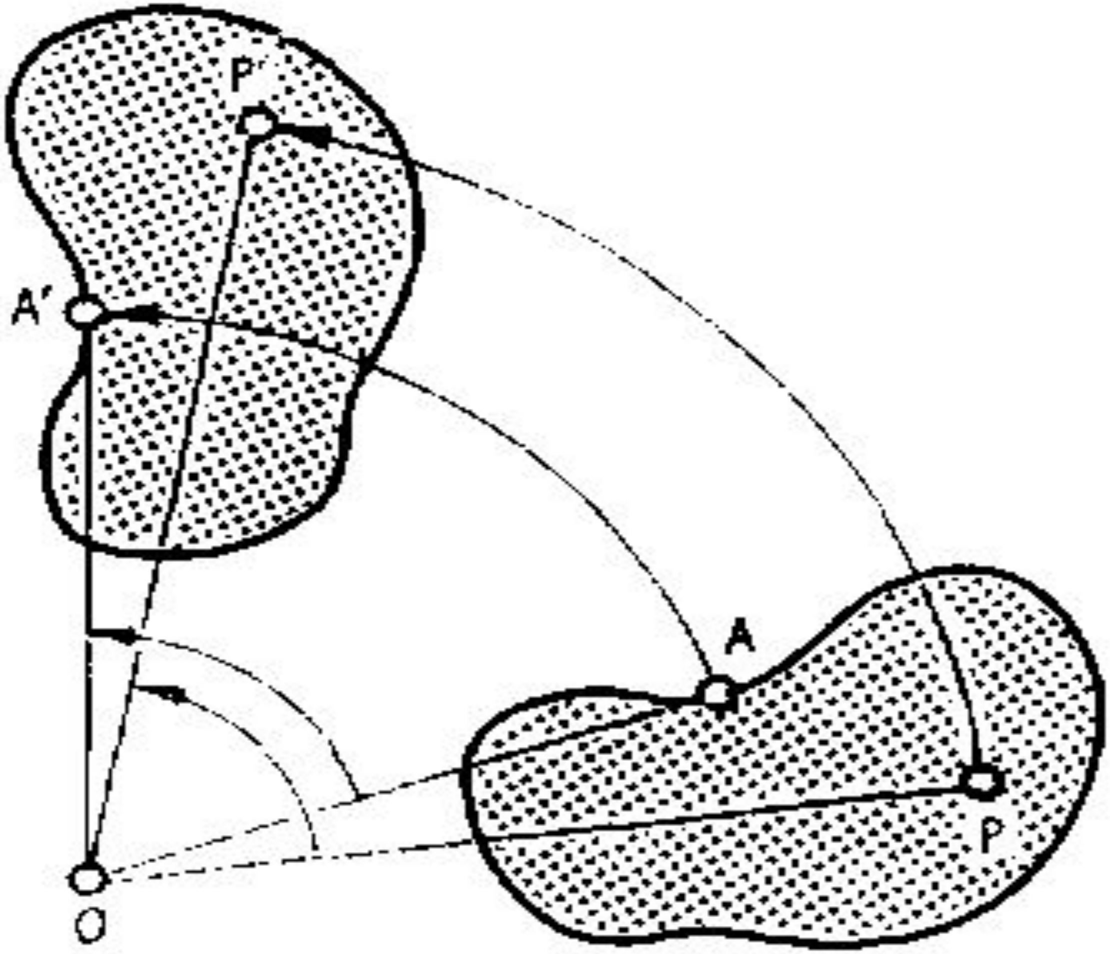


- **Из рисунка видно, что сумма отрезков хорд, расположенных между двумя радиусами равна радиусу окружности.**
- **Точки деления, расположенные на одинаковом расстоянии от диаметра, соединим хордами и проведем радиусы, соответствующие двум средним точкам деления.**

- При помощи переноса нетрудно убедиться, что отрезки хорд, расположенные между этими радиусами, в сумме дают радиус окружности (из рисунка видно, что каждый из этих отрезков можно с помощью максимум двух переносов (вместе с соответствующим треугольником) наложить на радиус).

ПОВОРОТ

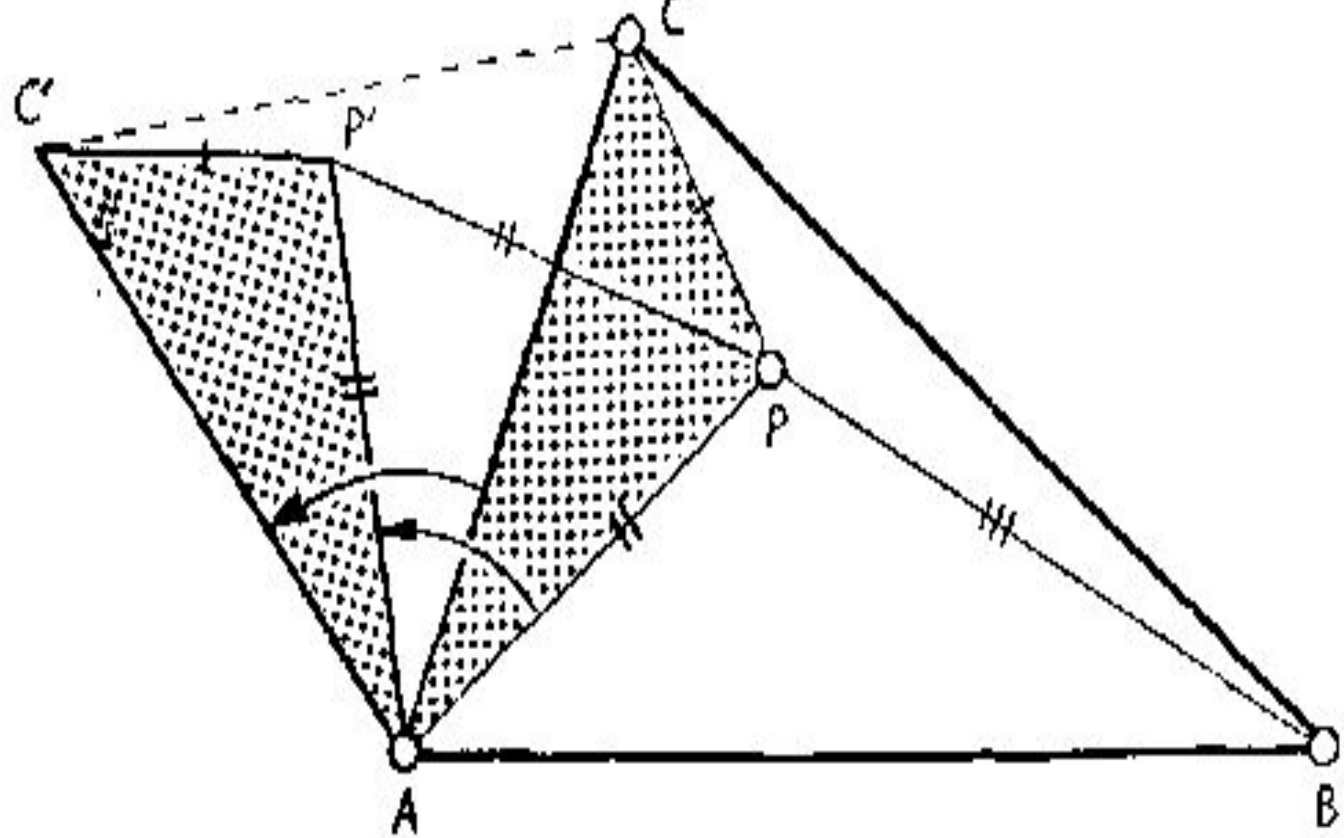
- Поворот (вокруг точки) — это такое преобразование совмещения, при котором неподвижной остается только одна точка — центр вращения.
- Поворот однозначно определяется заданием центра вращения, направления и угла, на который совершается поворот.



P'
A'
A
P
O

- С помощью поворота можно решить, например, следующую задачу: на плоскости требуется найти точку P, сумма расстояний от которой до трех данных точек *A*,*B* и С той же плоскости была бы наименьшей. Выберем сначала точку P произвольным образом. Величину суммы PA + PB ++ PC можно представить наглядно, если отложить эти отрезки последовательно — один от конца другого.

Определение точки P, которой соответствует наименьшая сумма расстояний до трех данных точек

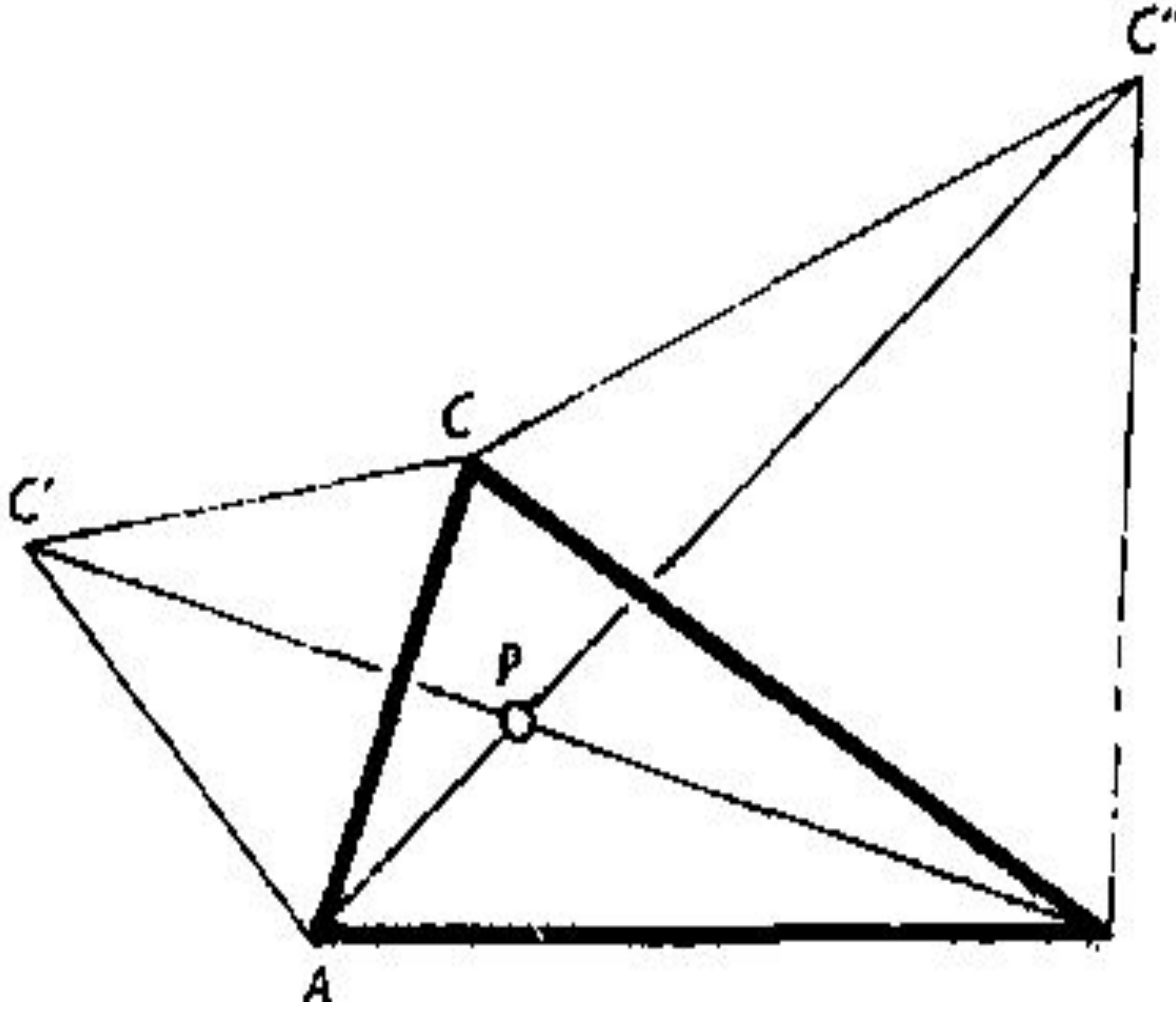


- **Этого можно добиться, если, например, повернуть треугольник АВС вокруг точки А «во внешнюю сторону» на 60° (см. рисунок). При этом получатся равносторонние треугольники *АСС'*, и *АРР'*, (оба треугольника равнобедренные с углом при вершине, равным 60°).**

- Сумма отрезков $C'P' + P'P + PB$ равна сумме $PA + PB + PC$, причем она достигает максимума, когда все три отрезка лежат на одной прямой. Отсюда следует, что искомая точка P должна лежать на прямой, соединяющей точку B с точкой C', которая является вершиной равностороннего треугольника, построенного на отрезке AC

Построение *изогональной* точки

- Аналогичные соображения позволяют заключить, что точка; Р должна лежать на прямой, соединяющей точку А с точкой С", которая является вершиной равностороннего треугольника, построенного на отрезке ВС.



C''
C
C'
P
A

- **Следовательно, искомая точка P является точкой пересечения прямых *AC''* и *BC'*. (Предполагается, что ни один из углов треугольника ABC не превышает 120°). Точка *P* называется *изогональной* точкой треугольника, так как из нее все стороны треугольника видны под одним и тем же углом.**