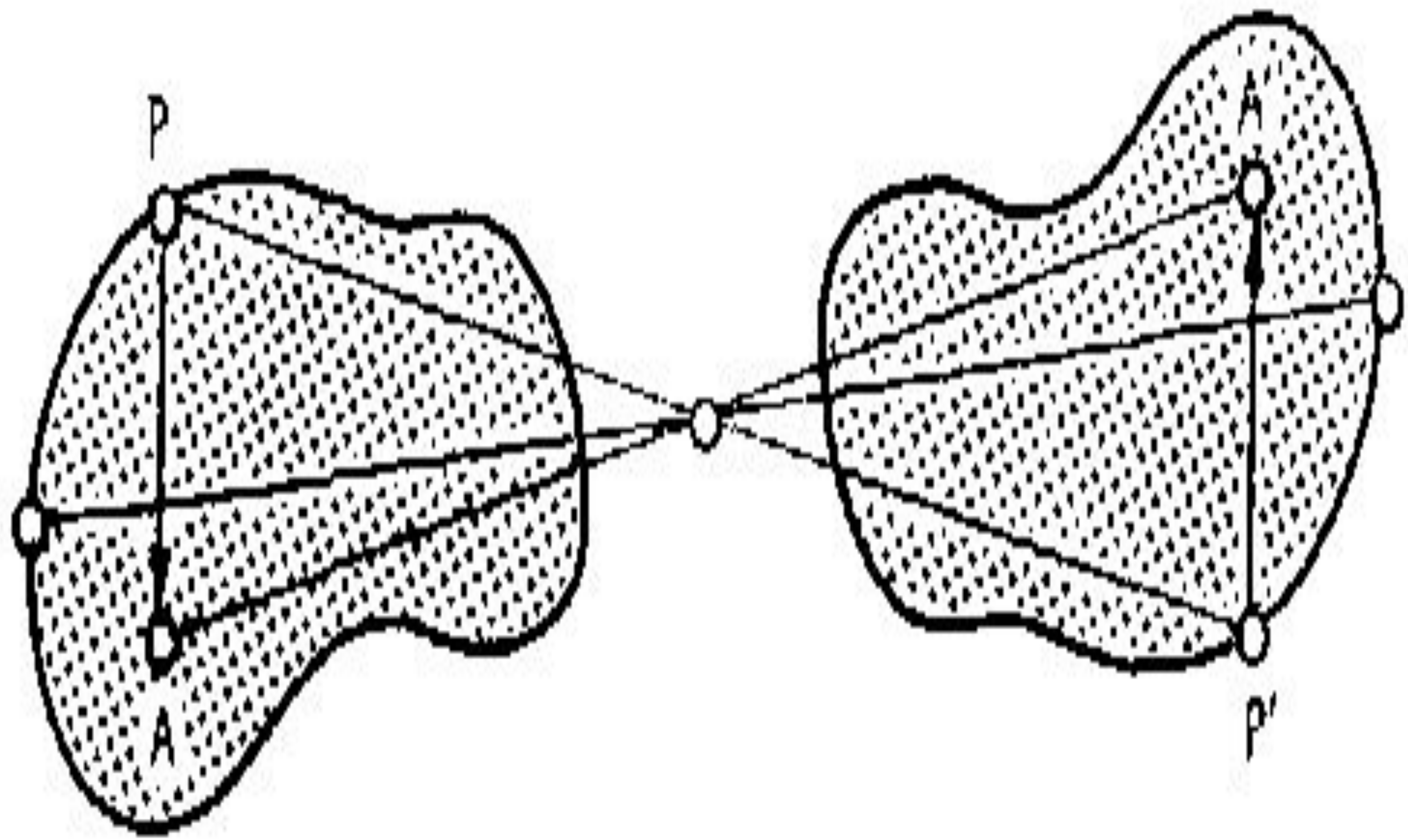
Л.4. ЗЕРКАЛЬНОЕ ОТРАЖЕНИЕ

ЗЕРКАЛЬНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

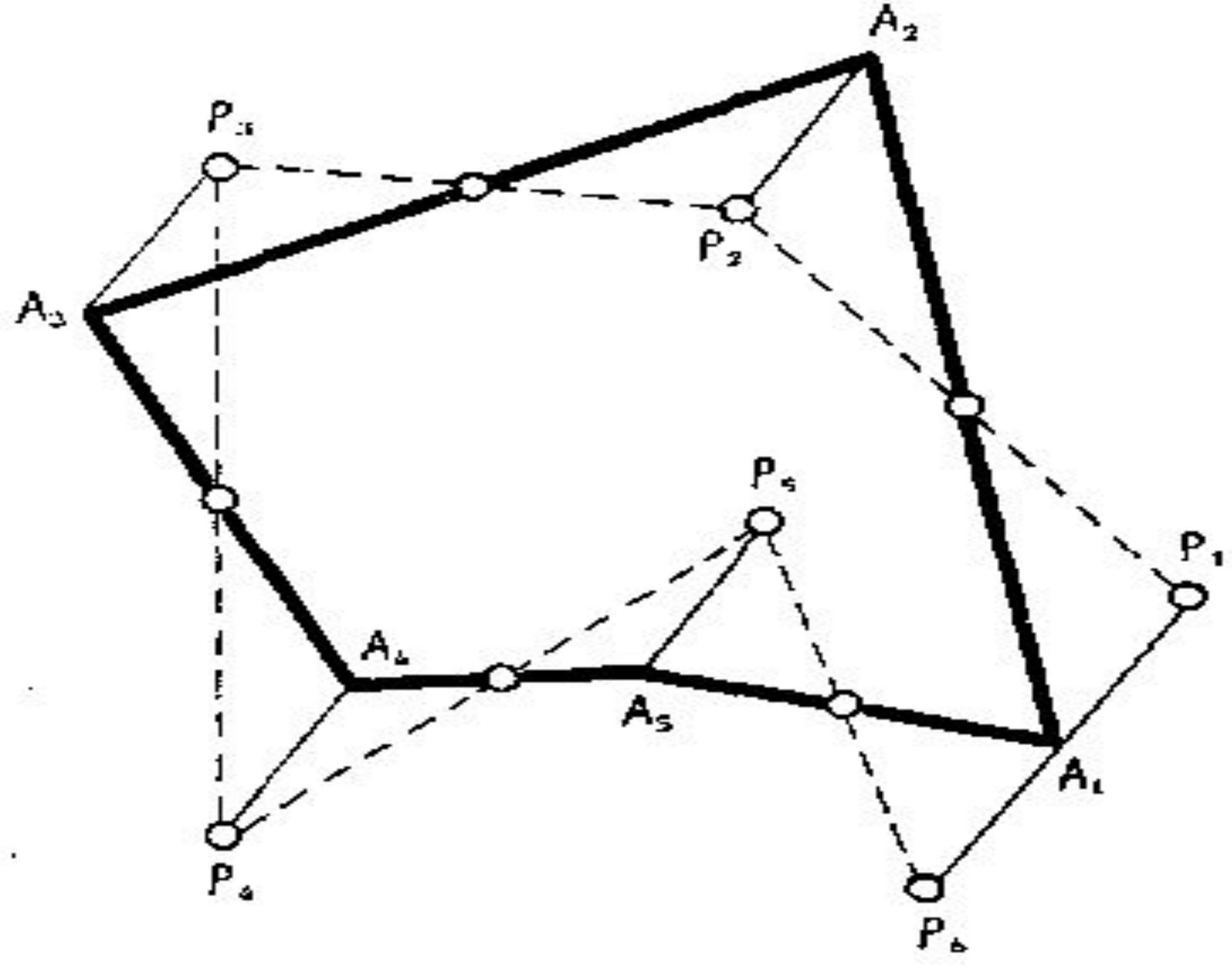
- **Зеркальное отражение от некоторой точки (симметрия относительно точки) равносильна повороту вокруг этой точки на 180°. Это преобразование переводит всякую прямую в параллельную ей прямую. Фигура называется центрально-симметричной, если существует зеркальное отражение относительно некоторой точки, отображающее эту фигуру на себя.**

Центральная симметрия



- **Таковы например, параллелограмм, окружность, плоскость и так далее.**
- **Рассмотрим на плоскости некоторый многоугольник $A_L A_2 . . . A_n$ с нечетным числом сторон (на рисунке изображен пятиугольник).**

Построение многоугольника с нечетным числом сторон по серединам его сторон



- **Если произвольную точку P_1 той же плоскости соединить с точкой A_1, а затем зеркально отразить отрезок P_1A_1 по очереди от сере дин каждой из сторон многоуголь ника, то зеркальные образы P_2A_2, P_3A_3, . . ., P_nA_n будут равны и парал лельны отрезку P_1A_1,**

- **поэтому последний образ. то есть отрезок**

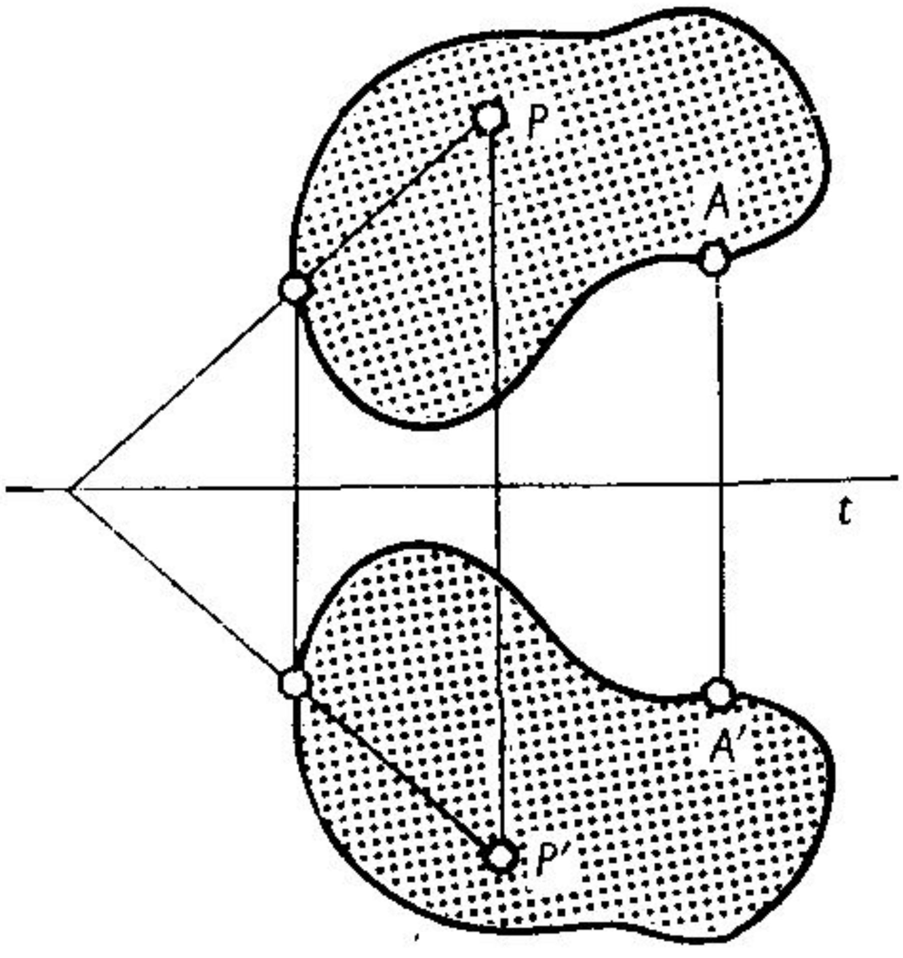
$P_{n+1}A_{1,}$ лежит на одной прямой с отрезком P_1A_1 причем точки P_{n+1} и P_1 расположены симметрично относительно точки A_1 Это дает возможность построить многоугольник с нечетным числом сторон, если заданы лишь середины его сторон.

- **Действительно, если зеркально отразить точку P_1 по очереди от середин всех сторон, то середина отрезка, соединяющего точку P_1 с последним образом, окажется как раз вершиной A_1 искомого многоугольника.**

ЗЕРКАЛЬНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ОТ ОСИ

- Зеркальное отражение от оси является таким преобразованием совмещения на плоскости, которое всякой фигуре ставит в соответствие ее зеркальный образ относительно этой оси.
- Точки, между которыми устанавливается соответствие, лежат по разные стороны от оси на одинаковом расстоянии от нее; соединяющий их отрезок перпендикулярен оси.

Осевая симметрия



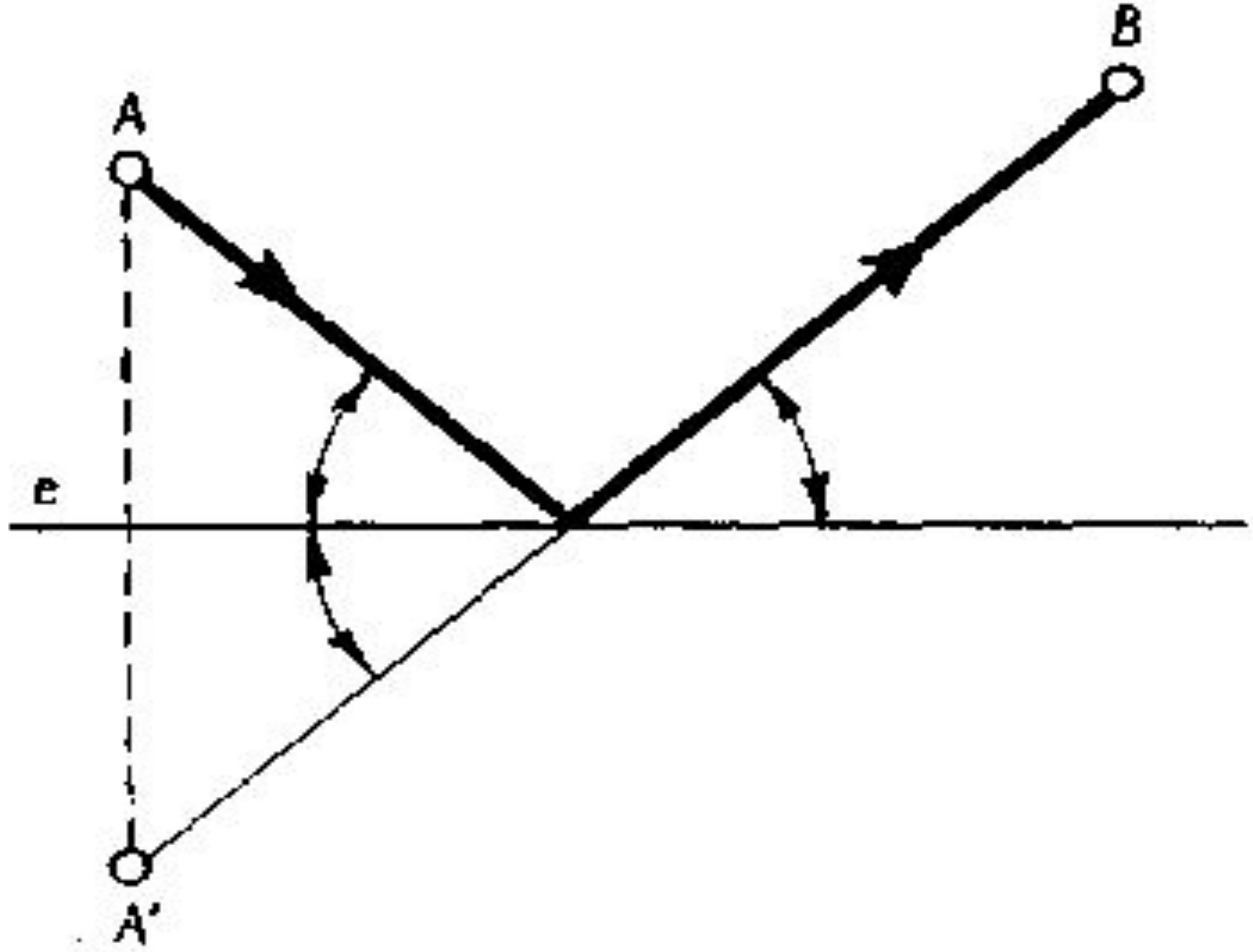
- **Прямая и ее зеркальный образ относительно оси пересекают ось в одной точке или же параллельны ей.**
- **Если существует такое зеркальное отражение относительно некоторой оси, которое отображает фигуру на себя, то эта фигура называется симметричной. Таковы, например, прямая, окружность,**

- **В природе симметричные или по крайней мере приближенно симметричные фигуры встречаются очень часто. Примером могут служить цветы, листья и строение организмов живых существ.**
- **Такая симметрия часто используется в строительстве, в изобразительном искусстве, при изготовлении украшений и так далее. В геометрии также нередко применяются рассуждения, в которых симметрия играет весьма важную роль.**

- **На плоскости осью симметрии отрезка прямой является перпендикулярная прямая, делящая отрезок пополам, а осью симметрии угла — его *биссектриса.* Таким образом, совокупность точек, каждая из которых одинаково удалена от концов данного отрезка, есть перпендикулярная прямая, делящая отрезок пополам, а совокупность точек, каждая из которых одинаково удалена от сторон данного угла, есть биссектриса угла.**

- Отметим, что совокупность или множество точек, обладающих некоторым общим свойством, часто называют геометрическим местом точек, обладающих данным свойст вом. Так, например, ось симметрии отрезка прямой на плоскости является геометрическим местом точек, каждая из которых одинаково удалена от концов

Кратчайший путь из А и В, касающийся прямой *e*

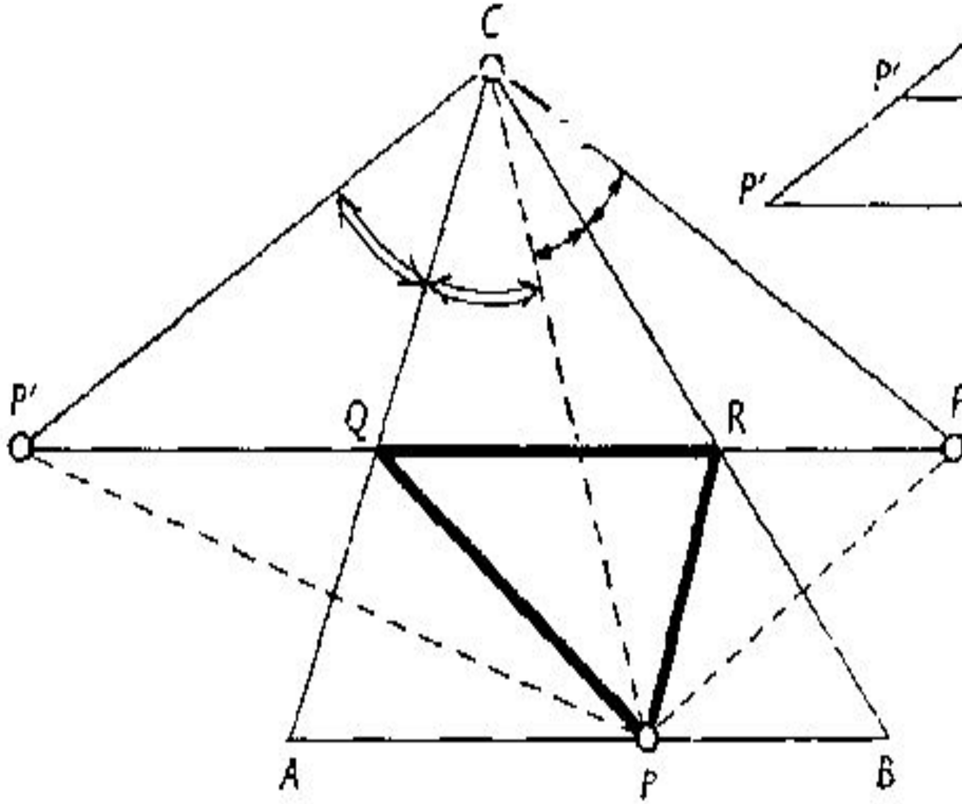


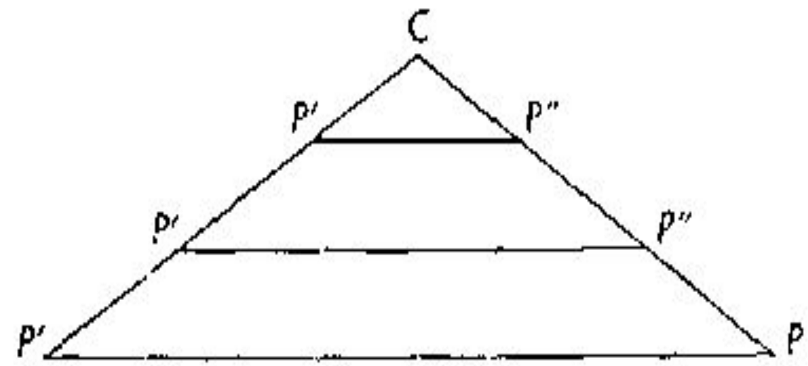
- Рассмотрим на плоскости прямую *e* и точки А и В, лежащие по одну сторону от этой прямой. Определим кратчайший путь, ведущий от А до прямой, а затем в В. Для этого найдем кратчайший путь из точки А' (зеркального образа А относительно прямой *e*) в точку В.

- **Очевидно, что это отрезок прямой, соединяющий A' и B. Наши рассуждения основаны на том, что расстояние от точки *A* до любой точки прямой *e* равно расстоянию от ее зеркального образа *A'* до той же точки.**

- **Нетрудно заметить, что построенный таким образом кратчайший путь совпадает с траекторией светового луча, который, выходя из точки *A*, отражается от зеркала, проходящего через прямую *e* перпендикулярно плоскости, а затем попадает в В (угол падения равен углу отражения).**

Определение вписанного треугольника с наименьшим периметром





- **Рассмотрим теперь остроугольный треугольник *ABC*. Пусть требуется определить кратчайший путь, ведущий из некоторой точки *P* стороны *AB* к стороне *AC*, отсюда к стороне *BC* , а затем обратно в точку *P*. Воспользуемся методом, примененным выше.**

- **Если *P'* — зеркальное отражение точки *P* относительно стороны *AC*, а точка *P"* — относительно стороны *BC*, то искомый путь равен отрезку *P'P"*. Этот отрезок пересекает стороны треугольника в точках *Q* и *R*, следовательно, кратчайшим путем является контур**

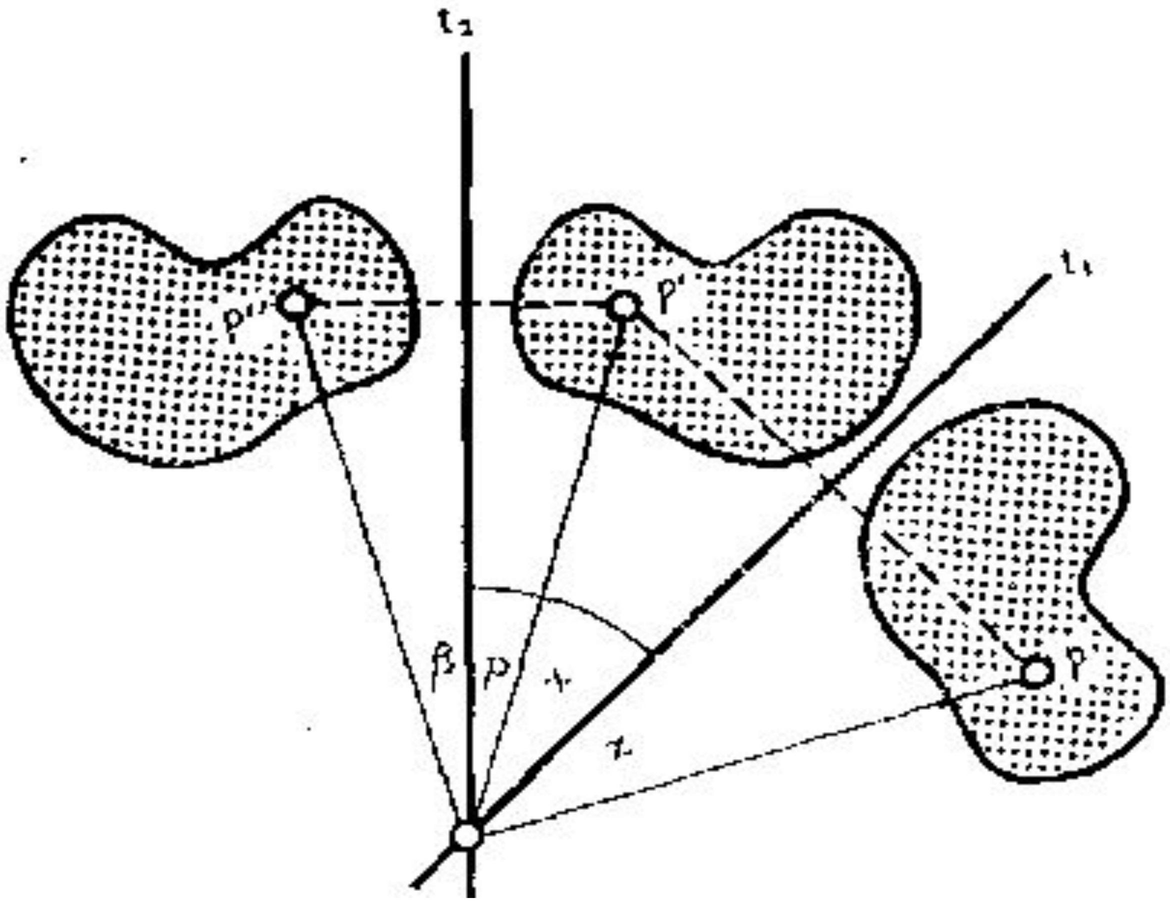
- **Тем самым мы построили треугольник наименьшего периметра, вписанный в данный треугольник (то есть его вершины лежат на сторонах треугольника *ABC)* и удовлетворяющий тому условию, что одна из его вершин совпадает с данной точкой *P*.**

- Периметр вписанного таким образом треугольника зависит, естественно, от выбора точки Р. Если мы теперь хотим определить положение точки P, при котором треугольник *PQR* имеет наименьший периметр, то следует принять во внимание, что стороны CP' и CP'' треугольника *P'CP''* являются зеркальными образами отрезка *CP,* то есть равны между собой.

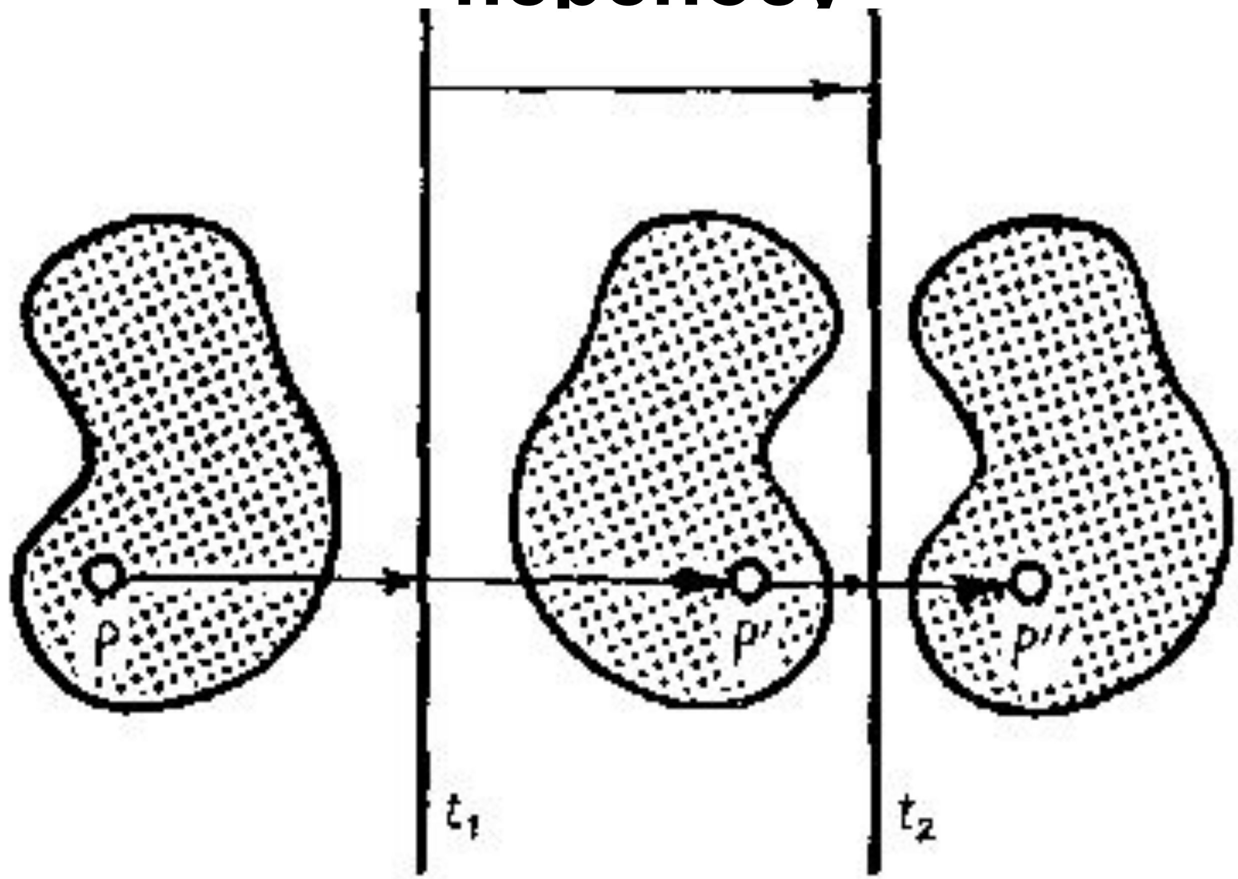
- **Отсюда следует также, что угол *P'CP"* вдвое больше, чем угол *ACB*треугольника *ABC,* то есть не зависит от выбора точк*и* Р. Следовательно, наименьший периметр имеет тот из треугольников *P'CP",* который имеет наименьшее ребро, то есть для которого соответствующий отрезок CP имеет наименьшую длину.**

- **Среди преобразований совмещения зеркальное отражение от оси играет особую роль. Любое преобразование совмещения может быть получено в результате последовательного выполнения нескольких зеркальных отражений (то есть как *произведение* нескольких зеркальных отражений).**

Последовательное отражение от пересекающихся осей равносильно повороту



Последовательное отражение от параллельных осей равносильно переносу



- **Среди преобразований совмещения зеркальное отражение от оси играет особую роль. Любое преобразование совмещения может быть получено в результате последовательного выполнения нескольких зеркальных отражений (то есть как *произведение* нескольких зеркальных отражений).**

- Последовательное отражение от двух *пересекающихся прямых* равносильно повороту вокруг точки их пересечения на угол, вдвое превышающий угол между этими прямыми.
- Произведение отражений от двух *параллельных осей* равносильно переносу в направлении, перпендикулярном осям, на расстояние, вдвое превышающее расстояние между ними.

- **Две совместимые фигуры на плоскости всегда могут быть переведены одна в другую при помощи самое большее трех последовательных зеркальных отражений.**