

Математична
логіка
Лабораторна робота
№1

Висловлення.
Логічні операції.
Пропозиційні формули.

ВИСЛОВЛЕННЯ

Висловлення - оповідальне речення, про яке можна сказати одне із двох: істинне воно або хибне.

**«Земля — планета сонячної системи»
(істинне висловлення)**

**«Місяць - штучний супутник Землі»
(хибне).**

Не є висловленням:

- ❖ Питальне речення
- ❖ Окличне речення
- ❖ Означення

Хибність.Істина

$$(v)=1$$

Висловлення **істине** і приймає істинносне значення «**істинна**»

$$(v) = 0$$

Висловлення **хибне** і приймає істинносне значення «**хибність**»

$$\text{Істина} = 1$$

$$\text{Хибність} = 0$$

ПРИКЛАД

$$(3 > 2) = 1$$

$$(2 > 5) = 0$$

$$(2 > 2) = 0$$

$$(\sin x - \text{періодична функція}) = 1$$

Задача 1

Які з наступних оповідальних речень є висловленнями?

1. Київ - столиця України.
2. Студент факультету фізики, математики та інформатики університету.
3. Кожне ціле число є і числом раціональним.
4. Трикутник ABC подібний трикутнику A'B'C'.
5. Існує комплексне число x таке, що $x^2 < 0$.
6. Для кожного дійсного числа x $x + 1 > 0$.
7. Каша – смачна страва.
8. $x^2 > 0$.
9. $x + x = 3(x+1)^2$.
10. У романі О. С. Пушкіна «Євгеній Онєгін» 136245 літер.

Розв'язування

2.

Це речення не є висловленням, тому що воно нічого не стверджує про студента.

4.

Речення не є висловленням: ми не можемо визначити, істинне воно або хибне, тому що не знаємо, про які саме трикутниках йде мова.

7.

Речення не є висловленням, так як поняття «смачна страва» дуже невизначено.

10.

Речення - висловлення, але для виявлення його значення істинності треба затратити багато часу.

ОСНОВНІ ОПЕРАЦІЇ

Значення висловлення - його істиносне значення

Над висловленнями визначають наступні **основні операції**, які дозволяють з певних вихідних висловлень утворювати нові висловлення:

- Заперечення
- Кон'юнкція
- Диз'юнкція
- Імплікація
- Еквіваленція

ЗАПЕРЕЧЕННЯ

Запереченням висловлення v називається висловлення, яке позначається $\neg v$ (або \bar{v})

Істинне тоді і тільки тоді, коли v хибне.

Висловлення \bar{v} читається «*не v* ».

Висловлення «не v »; «невірно, що v »;
« v хибне» означають (передають)
висловлення \bar{v}

ТАБЛИЦЯ ІСТИНОСТІ

заперечення

(скорочено ТІ)

V	
0	1
0	1
1	0
1	0

КОН'ЮНКЦІЯ

Кон'юнкцією висловлень v і ω називається висловлення, яке позначається $v \wedge \omega$

Істинне тоді і тільки тоді, коли v і ω істинні, тобто $(v) = 1$ і $(\omega) = 1$.

Висловлення $v \wedge \omega$ читається « **v і ω** ».

Висловлення « v і ω »;

«і v , і ω »;

«одночасно обидва висловлення v і ω істинні»
означають висловлення $v \wedge \omega$.

ТАБЛИЦЯ ІСТИНОСТІ КОН'ЮНКЦІЯ

v	w	$v \wedge w$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ДИЗ'ЮНКЦІЯ

Диз'юнкцією висловлень u і ω називається висловлення, яке позначається $u \vee \omega$

Хибне тоді і тільки тоді, коли u і ω хибні,
тобто $(u) = 0$ і $(\omega) = 0$

Висловлення $u \vee \omega$ читається « **u або ω** ».

Висловлення « u або ω »;

«або u , або ω »;

«принаймні одне з висловлень u або ω істинне»
означають висловлення $u \vee \omega$.

ТАБЛИЦЯ ІСТИНОСТІ ДИЗ'ЮНКЦІЯ

V	W	$v \vee w$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ІМПЛІКАЦІЯ

Імплікацією висловлень u і ω називається висловлення, що позначається $u \rightarrow \omega$

Хибне тоді і тільки тоді, коли u істинне, ω хибне, тобто $(u) = 1, (\omega) = 0$.

Висловлення $u \rightarrow \omega$ читається «**з u слідує ω** ».

Висловлення $u \rightarrow \omega$ означає те саме, що і висловлення:

«якщо u , то ω »; «з u випливає ω »;

« u тільки тоді, коли ω »; « u тягне ω »; « u тільки в тому випадку, якщо ω »; « u є достатньою умовою для ω »; « ω за умови, що u »; « ω , якщо u »; « ω є необхідною умовою для u »; «для того, щоб ω , досить, щоб u »; « ω тоді, коли u »; «коли u , тоді ω ».

ТАБЛИЦЯ ІСТИННОСТІ імплікація

V	W	$U \rightarrow \omega$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ЕКВІВАЛЕНЦІЯ

Еквіваленцією висловлень u і ω називається висловлення, яке позначається $u \leftrightarrow \omega$,

Істинне тоді і тільки тоді, коли значення висловлень u і ω збігаються.

Висловлення $u \leftrightarrow \omega$ читається « u еквівалентно ω ».

Висловлення « u тоді і тільки тоді, коли ω »; «для того щоб u , необхідно і достатньо, щоб ω » означають висловлення $u \leftrightarrow \omega$.

ТАБЛИЦЯ ІСТИННОСТІ еквіваленція

V	W	$U \leftrightarrow \omega$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Задача 2

Нехай $v_1=1, v_2=0, v_3=1$.

Знайти значення наступних складових висловлень:

а) $(\bar{v}_1 \rightarrow \overline{(v_2 \vee v_3)}) \wedge (\bar{v}_1 \vee \bar{v}_2 \vee \bar{v}_3)$

б) $\overline{(\bar{v}_1 \rightarrow \bar{v}_2 \rightarrow (v_3 \leftrightarrow (\bar{v}_1 \vee (v_2 \vee v_3))))}$

Задача 3

Придумати два висловлення, що є кон'юнкцією (диз'юнкцією) трьох висловлень, одне з яких істинне, а інші хибні.

Задача 4

Записати за допомогою символів наступні висловлення, вживаючи букви для позначення простих висловлень:

- а) 3 є простим числом і 9 – складене число;
- б) — ірраціональне число або існує раціональне число, що не є цілим;
- в) Петро встане і він або Іван вийде;
- г) Петро встане і вийде або Іван вийде;
- д) студент не може навчатися, якщо він утомився або голодний;
- л) якщо у трикутнику медіана не є висотою і бісектрисою, то цей трикутник не рівнобедрений і не рівносторонній.

Розв'язування.

- л) виділимо і наступним чином позначимо прості складові висловлення:

А: «У трикутнику медіана є висотою»;

В: «У трикутнику медіана є бісектрисою»;

С: «Цей трикутник рівнобедрений»;

Д: «Цей трикутник рівносторонній»;

Тоді дане висловлення символічно записується так:

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \rightarrow (\bar{C} \wedge \bar{D}).$$

Задача 5

Нехай

u_1 — «сьогодні світить сонце»,

u_2 — «сьогодні іде сніг»,

u_3 — «сьогодні похмуро»

u_4 — «учора було ясно».

Перевести на звичайну мову наступні висловлення:

а) $u_1 \wedge \bar{u}_3$;

б) $u_2 \vee u_3$;

в) $u_1 \wedge \overline{(u_2 \vee u_3)}$;

г) $u_1 \rightarrow (u_3 \wedge u_2)$;

д) $\bar{u}_1 \leftrightarrow u_4$;

е) $(u_2 \rightarrow u_3) \vee u_1$.

ПРОПОЗИЦІЙНІ ЗМІННІ І ФОРМУЛИ

Пропозиційні змінні (або просто *змінні*) – нескінченний список букв $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, \dots$ за допомогою яких записують висловлення.

Пропозиційної формула (пф) :

1. Символи констант $0, 1$ є пф.

2. Кожна змінна є пф.

3 – 7. Якщо A і B суть пф, то $\neg(A), (A) \wedge (B), (A) \vee (B), (A) \rightarrow (B), (A) \leftrightarrow (B)$ - також пф.

Такі пф будемо називати **пф у мові** (або базисі)

$\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, 0, 1\}$.

- **Підформулою** формули називається всяка її частина, яка сама є формулою.

Дужки у визначенні пропозиційної формули потрібні для того, щоб можна було вказати, як дана пропозиційна формула утворена з вихідних, і довести, що даний вираз є пропозиційною формулою.

Опускання дужок

- ❖ Дужки, що містять у собі змінні, а також 0 і 1
- ❖ Інші дужки, за умови, що їхнє відновлення відбувається в такий спосіб:

1. \leftrightarrow

2. \rightarrow

3. \vee

4. \wedge

5. \neg

! символ \neg зв'язує сильніше, ніж \wedge , а символ \wedge -сильніше від \vee , і т.д.

ПРИКЛАД.ВІДНОВЛЕННЯ ДУЖОК



$$(q) \leftrightarrow (p \rightarrow s \vee r \wedge \bar{q})$$

$$(q) \leftrightarrow ((p) \rightarrow (s \vee r \wedge \bar{q}))$$

$$(q) \leftrightarrow ((p) \rightarrow ((s) \vee (r \wedge \bar{q})))$$

$$(q) \leftrightarrow ((p) \rightarrow ((s) \vee (r \wedge (\bar{q}))))$$

Задача 6

- Які з наступних виразів, що виписані без застосування угоди про опускання дужок, є пропозиційними формулами?

1. $(\bar{P}) \wedge (Q)$;
2. $(P) \rightarrow (\bar{Q}) \leftrightarrow (R)$;
3. $((Q) \vee (R)) \wedge (\bar{S})$;
4. $((P_4) \rightarrow (Q)) \rightarrow ((Q_4) \vee (\overline{R_{15}}))$;
5. $((P) \wedge (\bar{Q}) \vee (S) \rightarrow (R))$;
6. $((P \wedge Q)R) \rightarrow \bar{S}$;
7. $((P \wedge (\bar{Q} \rightarrow R)) \vee ((\bar{P} \leftrightarrow R) \wedge \bar{Q}))$.

Розв'язування.

- 7) Дана послідовність не є формулою вже тому, що у ній нема зовнішніх дужок.

Покажемо, що вона не буде формулою навіть у тому випадку, якщо прийняти угоду про опускання зовнішніх дужок.

Дійсно, пропозиційні змінні P , Q , і R згідно **п. 2.** означення формули є формулами.

Тоді, згідно **п. 4** цього означення, послідовність $(P \wedge Q)$ буде формулою. Але наступна послідовність $(P \wedge Q)R$ формулою не буде, так як формули, що входять до неї $(P \wedge Q)$ і R не з'єднані ні одним з припустимих символів: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Тому і дана послідовність не являється формулою.

- 8) Згідно **п. 2** і **3-7** означення пропозиційні змінні P , Q , і R і вирази $\neg P$, $\neg Q$, $(\neg Q \rightarrow R)$, $(\neg P \leftrightarrow R)$ будуть формулами.

Далі формулами будуть вирази $(P \wedge (\bar{Q} \rightarrow R))$, $((\bar{P} \leftrightarrow R) \wedge \bar{Q})$. Вираз $((P \wedge (\bar{Q} \rightarrow R)) \vee ((\bar{P} \leftrightarrow R) \wedge \bar{Q}))$ також є формулою.

Задача 8

- Відновити дужки в наступних пропозиційних формулах:

1. $P \vee \bar{Q} \rightarrow P;$

2. $\bar{P} \vee \bar{Q} \wedge R \rightarrow P$

3. $P \leftrightarrow Q \rightarrow R \vee S \wedge \bar{Q}$

4. $P \vee \bar{P} \leftrightarrow Q \rightarrow R$

5. $\bar{P} \vee \bar{Q} \wedge R \rightarrow P$

6. $\bar{P} \leftrightarrow \bar{Q} \vee R \wedge Q;$

Розв'язування

- e) $((\bar{P}) \leftrightarrow ((\bar{Q}) \vee (R \wedge Q)))$

Задача 9

- Випишіть всі можливі підформули формули (згідно до домовленості зовнішні дужки у формули опущені):

$$((A \leftrightarrow B) \wedge \bar{C}) \rightarrow (((A \vee B) \rightarrow A) \rightarrow \bar{C})$$

Розв'язування.

● Всі можливі підформули формули
 $((A \leftrightarrow B) \wedge \bar{C}) \rightarrow (((A \vee B) \rightarrow A) \rightarrow \bar{C})$:

1. A

2. B

3. $(A \leftrightarrow B)$

4. C

5. \bar{C}

6. $((A \leftrightarrow B) \wedge \bar{C})$

7. $(A \vee B)$

8. $((A \vee B) \rightarrow A)$

9. $((A \vee B) \rightarrow A) \rightarrow \bar{C}$

10. $((A \leftrightarrow B) \wedge \bar{C}) \rightarrow (((A \vee B) \rightarrow A) \rightarrow \bar{C})$

ТАБЛИЦЯ ІСТИННОСТІ ДЛЯ ПФ

Значення пф для різних наборів значень її змінних зручно представляти у вигляді таблиці, яка називається *таблицею істинності* цієї пф .

Якщо дана пф має n різних змінних, то можливо 2^n різних наборів значень цих змінних і, отже, таблиця істинності для такої пф містить 2^n рядків.

p	q	r	$p \rightarrow q$			
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

ВИКОНУВАНА , ТОТОЖНО ІСТИННА І ТОТЖНО ХИБНА ФОРМУЛИ

Пропозиційна формула $A(X_1, X_2, \dots, X_n)$ називається **виконуваною** (спростовною), якщо існує такий набір висловлень v_1, v_2, \dots, v_n , який обертає цю пропозиційну формулу на істинне (хибне) висловлення $A(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Тотожно істинна формула (тавтологія) - пропозиційна формула, значення якої для будь-якого набору значень змінних є 1

Тотожно хибна формула (заперечення) - пропозиційна формула, значення якої для будь-якого набору значень змінних є 0

Задача 10

- Складіть *таблицю істинності* формули і вкажіть *тип формули* (тобто, чи є формула виконуваною або спростовною, або тотожно істинною (тавтологія), або тотожно хибною (заперечення):

$$((P \vee \bar{Q}) \rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \vee Q)$$

Розв'язування.

Користуючись означеннями логічних зв'язок (операцій над висловленнями), складемо таблицю істинності даної формули. Логічні значення цієї формули записані у останній колонці таблиці, де формула зображена як $F(P,Q)$:

P	Q						F(P,Q)
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

ВИСНОВОК

Із побудованої таблиці істинності бачимо, що дана формула **виконувана**, так якщо, наприклад, замість пропозиційної змінної P підставити у формулу **хибне висловлення**, а замість Q – **істинне**, то вся формула перетвориться в істинне висловлення. Але ця формула є також **спростовною**, тому що, коли, наприклад, замість змінної P підставити у формулу істинне висловлення, а замість Q – **хибне**, то вся формула перетвориться в **хибне висловлення**, тому вихідна формула є, **ні тавтологія, ні заперечення**.

Задачі для самостійного розв'язування

1.1. Випишіть всі можливі підформули кожної з наступних формул (згідно до домовленості зовнішні дужки у формул опущені):

1. $((A \wedge B) \leftrightarrow C) \rightarrow \bar{D}$
2. $(A \wedge (\bar{B} \rightarrow C)) \vee ((\bar{A} \leftrightarrow C) \wedge \bar{B})$
3. $((A \leftrightarrow B) \wedge \bar{C}) \rightarrow (((A \vee B) \rightarrow A) \rightarrow \bar{C})$
4. $((A \vee B) \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee (\bar{B} \vee C))$
5. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow (A \wedge B))$
6. $((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)) \rightarrow (\bar{B} \vee D)$
7. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{B})$
8. $(A \rightarrow (B \wedge \bar{C})) \leftrightarrow (A \wedge (B \rightarrow C))$
9. $\bar{A} \vee (B \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge \bar{C}))$
10. $((C \vee B) \wedge A) \rightarrow (((C \vee A) \rightarrow B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B))$
11. $((A \vee (B \rightarrow \bar{C})) \vee D) \wedge (\bar{D} \vee (\bar{B} \vee C))$
12. $((A \rightarrow \bar{D}) \vee B) \rightarrow ((C \leftrightarrow \bar{D}) \rightarrow (\bar{A} \wedge C))$
13. $((A \rightarrow B) \wedge ((\bar{A} \vee (\bar{B} \vee C)) \rightarrow D)) \rightarrow (\bar{B} \vee D)$
14. $B \leftrightarrow ((A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow ((\bar{A} \leftrightarrow C) \wedge \bar{B}))$
15. $((D \rightarrow ((C \vee B) \wedge A)) \wedge (C \wedge A)) \rightarrow (\bar{B} \vee D)$

Задачі для самостійного розв'язування

Складіть таблиці істинності для наступних формул і вкажіть, які з формул є виконуваними, які спростовними, які тотожно істинними (тавтологіями) і які тотожно хибними (запереченнями):

1. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \bar{Q}) \rightarrow \bar{P})$

2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

3. $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow Q$

4. $(P \wedge (Q \vee \bar{P})) \wedge ((\bar{Q} \rightarrow P) \vee Q)$

5. $((P \wedge \bar{Q}) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

6. $P \wedge (Q \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q}))$

7. $((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow Q$

8. $((P \vee Q) \wedge ((Q \vee R) \wedge (R \vee P))) \rightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$

9. $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (Q \wedge P))$

10. $(\bar{P} \rightarrow (\overline{Q \wedge P})) \rightarrow (P \vee R)$

11. $(P \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow \neg P$

12. $((P \wedge \bar{Q}) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

13. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

14. $(P \wedge (Q \vee \bar{P})) \wedge ((\bar{Q} \rightarrow P) \vee Q)$

15. $(Q \rightarrow (P \wedge R)) \wedge \neg ((P \vee R) \rightarrow Q)$

16. $(\overline{P \leftrightarrow \bar{Q}} \vee R) \wedge Q$

17. $(P \wedge Q) \rightarrow ((R \vee Q) \rightarrow (Q \wedge \bar{Q}))$

18. $((P \rightarrow (Q \wedge R)) \rightarrow (\bar{Q} \rightarrow \bar{P})) \rightarrow \bar{Q}$

19. $((P \vee Q) \vee R) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

20. $((P \vee \bar{Q}) \rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \vee Q)$

21. $(P \vee Q) \rightarrow ((\bar{P} \wedge Q) \vee (P \wedge \bar{Q}))$