

Лекция 16 Функциональные ряды. Формула и ряд Тэйлора и Маклорена

Литература.

В.Г. Зубков, В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев.
Курс математики для технических высших учебных заведений
Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А.
Пушкаря. 2012г. Лекции 18, 19.

Область сходимости функционального ряда. Правильно
сходящиеся ряды и их свойства. Степенные ряды.

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора. Ряд Тейлора.
Формулы и ряды Тейлора для некоторых элементарных
функций и использование их для вычисления пределов и в
приближённых вычислениях.

18.1. Область сходимости функционального ряда

Ранее мы познакомились с рядами, членами которых являются числа. Рассмотрим теперь ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x). \quad (18.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.1. *Ряд (18.1), членами которого являются функции, определённые в некоторой области изменения аргумента x , называется функциональным рядом.*

Если в функциональный ряд вместо x подставить некоторое значение x_0 из области определения всех его функций, то получится числовой ряд.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.2. *Точка $x = x_0$, при подстановке которой в (18.1) получится сходящийся числовой ряд, называется точкой сходимости функционального ряда (18.1).*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.3. *Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его областью сходимости.*

Частичная сумма функционального ряда, т.е. сумма первых n его членов

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \quad (18.2)$$

является функцией переменной x , определённой в области сходимости ряда.

Действительно, из определения области сходимости функционального ряда следует, что для любой точки x этой области существует предел $S_n(x)$ при $n \rightarrow +\infty$.

В точках же, не принадлежащих области сходимости, $S_n(x)$ не имеет предела.

Если функциональный ряд сходится и имеет сумму $S(x)$, то разность $S(x) - S_n(x)$, как и для числового ряда, называется n -м остатком ряда и обозначается

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

Очевидно, что если ряд сходится, то должен быть выполнен необходимый признак сходимости, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0 \quad (18.3)$$

во всех точках сходимости ряда, где также

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0. \quad (18.4)$$

Для определения области сходимости функционального ряда обычно сначала используют признак Даламбера (теорема 11.4), применяемый к ряду, составленному из абсолютных величин ряда (18.1):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1. \quad (18.5)$$

Все точки x , удовлетворяющие (18.5), входят в область сходимости ряда. Из признака Даламбера следует, что в случае, если предел последующего члена ряда к предыдущему равен единице, ряд может сходиться или расходиться. Поэтому в граничных точках промежутка, точки которого удовлетворяют (18.5), ряд также может сходиться, так как в них

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = 1. \quad (18.6)$$

Вопрос о сходимости ряда в точках удовлетворяющих (18.6), решается непосредственной подстановкой их значений в ряд (18.1).

Решение:

$$u_n = \frac{1}{n(x+3)^n}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(x+3)^{n+1}}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+3)^n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n(x+3)^n}{(n+1)(x+3)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x+3|} < 1.$$

Следовательно, $|x+3| > 1 \Rightarrow x > -2$ и $x < -4$.

Проверим сходимость ряда в точках $x = -2$ и $x = -4$:

• $x = -2$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+3)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится;

• $x = -4$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+3)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(-1)^n}$ – знакочередующийся ряд, сходится по признаку Лейбница, но сходится условно, так как ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

является расходящимся.

Таким образом, область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+3)^n}$ состоит из всех точек $x \in (-\infty, -4] \cup (-2, +\infty)$.

18.2. Правильно сходящиеся функциональные ряды и их свойства

Известно, что сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная, и производная суммы конечного числа функций равна сумме производных этих функций. Функциональные же ряды содержат бесконечное число слагаемых и указанные свойства не всегда справедливы и для них.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.4. Функциональный ряд (18.1) называется правильно сходящимся в области D , принадлежащей области его сходимости, если в любой точке этой области все члены ряда не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося знакоположительного ряда.

ТЕОРЕМА 18.1. Всякий функциональный ряд, правильно сходящийся в области D , сходится абсолютно в любой точке этой области.

ТЕОРЕМА 18.2. Если ряд из непрерывных функций правильно сходится в области D , то его сумма есть функция непрерывная в этой области.

ТЕОРЕМА 18.3. Если ряд (18.1), составленный из функций, имеющих непрерывные производные, сходится в области D и его сумма равна $S(x)$, а ряд из производных его членов сходится в этой области правильно, то производная суммы ряда $S'(x)$ равна сумме ряда, составленного из производных его членов. Это значит, что такой ряд можно почленно дифференцировать в области D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.5. *Степенным рядом называется функциональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (18.8)$$

членами которого являются произведения постоянных a_0, a_1, \dots, a_n на разность $(x - x_0)$ в соответствующих целых степенях n . Постоянные a_1, \dots, a_n, \dots называются коэффициентами степенного ряда.

Если $x_0 = 0$, степенной ряд (18.8) примет вид

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots, \quad (18.9)$$

который мы прежде всего и рассмотрим.

Определим область сходимости этого ряда. Для этого рассмотрим знакоположительный ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (18.9) и применим к нему достаточный признак сходимости Даламбера (18.5).

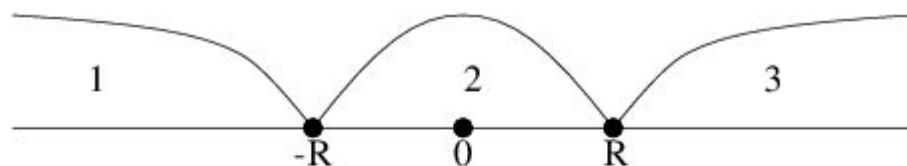
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$

Откуда

$$|x| < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R. \quad (18.10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.6. Число $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ называется радиусом сходимости степенного ряда (18.9), при всех $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, при $|x| > R$ – расходится. Интервал $(-R; R)$ называется интервалом сходимости ряда (18.9).

В точках $x = \pm R$ сходимость или расходимость ряда устанавливается проверкой сходимости числовых рядов, полученных после подстановки в (18.9) $x = -R$ и $x = R$. Областью сходимости степенного ряда (18.9) является интервал $(-R; R)$, к которому, в зависимости от конкретных случаев, могут быть добавлены один или оба конца отрезка $[-R; R]$ (рис. 103). В каждой точке интервала $(-R; R)$ ряд (18.9) сходится абсолютно.



- 1 – область, где ряд расходится;
- 2 – область, где ряд сходится;
- 3 – область, где ряд расходится.

Рис. 103. Область сходимости степенного ряда

Очевидно, любой степенной ряд вида (18.9) сходится при $x = 0$. Если других точек сходимости нет, радиус сходимости $R = 0$. Если же ряд сходится при любых $x \in (-\infty; +\infty)$, то будем считать, что радиус сходимости $R = +\infty$.

Для степенных рядов может быть доказана теорема.

ТЕОРЕМА 18.4. Пусть степенной ряд (18.9) имеет интервал сходимости $(-R; R)$, а $r < R$ произвольное положительное число. Тогда ряд (18.9) является правильно сходящимся на отрезке $[-r; r]$. По свойству правильно сходящихся рядов:

- Степенной ряд (18.9) абсолютно сходится в любой точке интервала сходимости и, следовательно, степенные ряды можно почленно складывать и умножать (как многочлены). При этом интервалом сходимости полученного степенного ряда будет множество всех точек, в которых сходятся складываемые или перемножаемые ряды.
- Сумма степенного ряда (18.9) является непрерывной функцией в каждой точке его интервала сходимости.
- Степенной ряд (18.9) можно почленно дифференцировать в любой точке его интервала сходимости.

Естественно, что радиус сходимости степенного ряда (18.8) также равен

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

однако интервал сходимости будет

$$(x_0 - R; x_0 + R), \quad (18.11)$$

т.к. применив к ряду (18.8) признак Даламбера, получим

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n(x - x_0)^n} \right| = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

и, следовательно, ряд (18.8) сходится в интервале

$$|x - x_0| < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R. \quad (18.12)$$

В точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ сходимость устанавливается так же, как и для ряда (18.9) в точках $x = -R$ и $x = R$.

Формула и ряд Тейлора относятся к числу важнейших понятий математического анализа. Они широко используются в математике. В частности, в нашем курсе мы будем использовать их при исследовании функций, приближённом вычислении значений функций, численном решении уравнений и оценке возникающих при этом ошибок.

19.1. Многочлен Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в некотором интервале, содержащем точку x_0 . Построим многочлен степени $m < n$

$$P_m(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \cdots + C_m(x - x_0)^m = \sum_{k=0}^m C_k(x - x_0)^k, \quad (19.1)$$

коэффициенты которого определим из условия совпадения значений этого многочлена и его m производных с соответствующими значениями функции $y = f(x)$ и её производных в точке x_0 .

$$\left\{ \begin{array}{l} P_m(x_0) = C_0 = f(x_0), \\ P'_m(x_0) = C_1 = f'(x_0), \\ P''_m(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot C_2 = f''(x_0), \\ P'''_m(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_3 = f'''(x_0), \\ \dots\dots\dots \\ P_m^{(k)}(x_0) = k \cdot (k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot C_k = f^{(k)}(x_0), \\ \dots\dots\dots \\ P_m^{(m)}(x_0) = m \cdot (m-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot C_m = f^{(m)}(x_0). \end{array} \right. \quad (19.2)$$

Члены в производных от многочлена (19.1), содержащие множитель $(x - x_0)$ в точке x_0 , равны нулю. Производные порядка выше m от многочлена m -й степени также равны нулю. Из (19.2) имеем

$$C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, k = 0, 1, \dots, m. \quad (19.3)$$

В (19.3) положено $0! = 1$, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Следовательно, искомый многочлен (19.1) с коэффициентами C_k , определяемыми по формуле (19.3), будет

$$\begin{aligned} P_m(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m = \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \end{aligned} \quad (19.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.1. *Многочлен (19.4) называется m -м многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$.*

Если функция $f(x)$ сама по себе является многочленом степени m , то запись ее в виде (19.4) всегда возможна и означает лишь представление данного многочлена по степеням разности $(x - x_0)$.

ПРИМЕР 19.1. Представить функцию $f(x) = x^2$ в виде многочлена Тейлора по степеням $(x - 3)$.

Решение: Имеем $f(3) = 9, f'(3) = 6, f''(3) = 2$. Все производные выше второго порядка от $f(x) = x^2$ равны нулю. Следовательно, многочлен Тейлора при $x_0 = 3$ для $f(x) = x^2$ имеет вид

$$P_2(x) = 9 + 6(x - 3) + (x - 3)^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, очевидно, получим данную функцию $f(x) = x^2$.

Если функция $f(x)$ не является многочленом, её всегда можно представить в виде

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_m(x). \quad (19.6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.2. Формула (19.6) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$, а $R_m(x)$ называется m -м остаточным членом формулы Тейлора и определяет отличие $f(x)$ от многочлена Тейлора (19.4).

Остаточный член может быть найден в виде, подобном $m + 1$ -му члену

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1}, \quad (19.8)$$

где $\xi \in (x_0, x)$ и вся неопределенность остаточного члена, т. е. отличие нашей функции $f(x)$ от многочлена $P_m(x)$, заключена в неизвестном значении ξ . Положив для удобства $m + 1 = n$, формулу (19.6) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (19.9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.3. Формула (19.9) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (19.10)$$

в которой точка $\xi \in (x_0, x)$ не определена и зависит от x и n . Формула (19.9) при $x_0 = 0$ является представлением функции $f(x)$ в виде многочлена в окрестности начала координат и часто называется формулой Маклорена.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n, \quad (19.11)$$

где положено $\xi = \theta x, 0 < \theta < 1$.

При x близком к x_0 , остаточный член является, очевидно, неизвестной бесконечно малой величиной порядка n при $x \rightarrow x_0$ и формула (19.9) может быть записана в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + O((x - x_0)^n), \quad (19.12)$$

где $O(\alpha^n)$ есть обозначение бесконечно малой величины порядка n при $\alpha \rightarrow 0$. Выведенные выше формулы (19.9) и (19.12) позволяют сформулировать важную теорему.

ТЕОРЕМА 19.1. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и её некоторой окрестности непрерывные n производных, то она может быть представлена в виде (19.9) или при $x \rightarrow x_0$ по формуле (19.12).

19.3. Ряд Тейлора

ТЕОРЕМА 19.2. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и её некоторой δ -окрестности, т. е. для всех $x \in (|x - x_0| \leq \delta)$ непрерывные производные любого порядка, ограниченные одним и тем же числом M , то она разлагается в этой окрестности точки x_0 в сходящийся к $f(x)$ степенной ряд.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (19.13)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.4. Ряд (19.13), к которому по теореме (19.2) сходится функция $f(x)$, называется рядом Тейлора.

Для $x_0 = 0$ соответствующий ряд (19.13) часто называют рядом Маклорена .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \quad (19.15)$$

Покажем, что выведенная ранее формула Лагранжа (17.4), или формула конечных приращений, является частным случаем формулы Тейлора (19.9) при $n = 1$. Действительно, из (19.9) при $n = 1$ следует

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0). \quad (19.16)$$

Положив $x_0 = a$ и $x = b$, получим $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, где $\xi \in (a, b)$. Это и есть формула конечных приращений Лагранжа.

Рассмотрим представление по формуле Тейлора (19.9) (чаще всего это будет формула Маклорена (19.11)) и разложение в ряд Тейлора (19.13) или Маклорена (19.15) некоторых элементарных функций и определим их области сходимости.

19.4. Показательная функция $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

Так как $x_0 = 0$, $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, \dots$, $f^{(n)}(\xi) = e^\xi$, то по формуле (19.11):

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{n!} \cdot x^n, \quad (19.17)$$

где $0 < \theta < 1$.

Поскольку для функции $f(x) = e^x$ при любом $x = N \in (-\infty, +\infty)$ производные любого порядка $f^{(n)}(x) = e^N$ ограничены одним и тем же числом $M = e^N$, то по теореме (19.2) предыдущей лекции формула (19.17) переходит в соответствующий ряд Маклорена:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (19.18)$$

который сходится к e^x на $(-\infty, +\infty)$.

ПРИМЕР 19.3. Вычислим $e^{-1} = 1/e$ с точностью до 10^{-4} .

Решение: По (19.18) при $x = -1$,

$$1/e = e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Это знакочередующийся ряд и по теореме Лейбница остаток ряда не превышает своего первого члена. Следовательно, ошибка при вычислении величины e^{-1} не больше первого из отброшенных членов ряда её представляющего

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!} \right| \leq \varepsilon, n! \geq 1/\varepsilon = 10^4, \text{ откуда } n = 8, \text{ т. к. } 8! = 40320 > 10^4.$$

Итак, $1/e = 1/2 - 1/6 + 1/24 - 1/120 + 1/720 - 1/5040 = 0,3679$.

Первый из неучитываемых членов $\frac{(-1)^8}{40320} < 0,25 \cdot 10^{-4}$.

Решение:

Ряд Маклорена (19.18) при $x = 1$ будет знакоположительным и для оценки ошибки вычисления числа e надо воспользоваться формулой (19.17). Оценим величину остаточного члена $\frac{e^\theta x}{n!} x^n$ при $x = 1$:

$$\varepsilon = e^\theta/n! < e/n! < 3/n!, \quad n! > 3 \cdot 10^4,$$

т.е. $n = 8$, как и в примере 19.3. Следовательно, с заданной точностью

$$e = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 + 1/5040 = 2,7183.$$

19.5. Функция $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

Как показано в ранее $f^{(k)}(x) = \sin(x + \pi k/2)$, $f^{(k)}(0) = \sin(\pi k/2)$.

Так как $|\sin(x + \pi k/2)| \leq 1$ и, следовательно, все производные $f(x)$ не превышают единицу, по теореме (19.2) предыдущей лекции $\sin x$ разлагается в сходящийся к ней на $(-\infty, +\infty)$ ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (19.19)$$

19.6. Функция $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$

Продифференцировав обе части (19.19), получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \quad (19.20)$$

В качестве примера рассмотрим применение разложений (19.19) и (19.20) к нахождению предела.

ПРИМЕР 19.5. Показать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} = \frac{n^2 - m^2}{2}$.

Решение: Из (19.20) имеем $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} &= \frac{1 - \frac{m^2 x^2}{2} + O(x^4) - 1 + \frac{n^2 x^2}{2} + O(x^4)}{x^2} = \\ &= \frac{n^2 - m^2}{2} + \frac{O(x^4)}{x^2} = \frac{n^2 - m^2}{2} + O(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{n^2 - m^2}{2}. \end{aligned}$$

19.7. Функция $f(x) = (1+x)^m$, $x_0 = 0$

Здесь $f^{(k)}(x) = m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)(1+x)^{m-k}$,
 $f^{(k)}(0) = m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)$.

Запишем формально ряд Маклорена для этой функции

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{k!} x^k, \quad (19.21)$$

где m – любое действительное число. Определим радиус сходимости этого ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} \times \right. \\ \left. \times \frac{(n+1)!}{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)(m-n)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1.$$

Следовательно, правая часть формулы (19.21) есть сходящийся при $|x| < 1$ ряд и, как показывается, он сходится к функции $(1+x)^m$. Сходимость при $|x| = 1$ необходимо рассматривать отдельно, что мы делать не будем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.5. Ряд (19.21) для $(1+x)^m$ называется биномиальным рядом.

Используем (19.21) для вычисления предела.

ПРИМЕР 19.6. *Найти* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

Решение: Из (19.21) имеем при $m = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2), \\ \sqrt{1-x} &= (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + O(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + O(x)) = 1.$$

Рассмотрим ещё пример приложения биномиального ряда к приближённому вычислению корней $\sqrt[m]{a}$. Прежде всего надо найти число b , близкое к a , из которого корень m -й степени извлекается элементарно, и такое, чтобы их разность была бы, по крайней мере, меньше b .

$$\text{Тогда } \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b+x} = \sqrt[m]{b} \sqrt[m]{1 + \frac{x}{b}} = \sqrt[m]{b} \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Затем $\left(1 + \frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$ необходимо разложить в биномиальный ряд и взять необходимое для нужной точности число членов.

ПРИМЕР 19.7. Вычислить $\sqrt{5}$ с точностью до 10^{-3} .

Решение:

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= \sqrt{4+1} = \sqrt{4(1+0.25)} = 2\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots\right).\end{aligned}$$

Полученный ряд является знакочередующимся и для того, чтобы вычислить $\sqrt{5}$ с нужной точностью, необходимо учитывать лишь те члены, которые по модулю больше 10^{-3} .

Поэтому $\sqrt{5} = 2 + 0,25 - 0,0156 + 0,0020 = 2.236$.

19.8. Функция $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$

Для этой функции

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}; \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!.$$

Соответствующий ряд Маклорена примет вид

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \quad (19.22)$$

Он сходится к функции $\ln(1+x)$ на множестве $(-1 < x \leq 1)$

Полученный ряд (19.22) можно также использовать для вычисления пределов.

ПРИМЕР 19.8.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x) - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

Займемся теперь вычислением логарифмов. По формуле (19.22) вычислить логарифмы можно лишь для чисел от 0 до 2. Получим теперь формулу, позволяющую вычислить логарифмы любых положительных чисел.

Заменим в формуле (19.22) x на $-x$:

$$\ln(1 - x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (19.23)$$

Вычтем теперь из равенства (19.22) соотношение (19.23):

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad (19.24)$$

Положив $\frac{1+x}{1-x} = a$, получим $x = \frac{a-1}{a+1}$.

Формулу (19.24) можно использовать для вычисления логарифмов любых положительных чисел.

Ошибки при вычислении логарифмов с помощью конечного числа членов ряда (19.24) можно оценить следующим образом. По a определим x , затем берем несколько членов в формуле (19.24):

$$\ln a = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) + r_n. \quad (19.25)$$

Остаток ряда r_n и есть ошибка. Учитывая, что

$$\frac{1}{2n+5} < \frac{1}{2n+3}, \quad \frac{1}{2n+7} < \frac{1}{2n+3} \text{ и т. д., получим}$$

$$r_n = 2 \left(\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+5}}{2n+5} + \dots \right) < 2 \left(\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+5}}{2n+3} + \right. \quad (19.26)$$

$$\left. + \frac{x^{2n+7}}{2n+3} + \dots \right) = 2 \frac{x^{2n+3}}{2n+3} (1 + x^2 + x^4 + \dots) = 2 \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \frac{1}{1-x^2}.$$

Так как $|x| < 1$ то $1 + x^2 + x^4 + \dots$ есть бесконечно убывающая геометрическая последовательность с $q = x^2$, её сумма равна $\frac{1}{1-x^2}$.

ПРИМЕР 19.9. Вычислить $\ln 3$, с точностью 10^{-4} .

Решение: В формуле (19.24) положим $a = 3$, а $x = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$. Тогда по

(19.26) должно быть $\frac{2 \cdot 4}{(2n+3) \cdot 3 \cdot 2^{2n+3}} = \frac{1}{3(2n+3) \cdot 4^n} < 10^{-4}$. Это неравенство выполняется при $n = 5$ следовательно,

$$\ln 3 = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} + \frac{11}{3 \cdot 2^{11}} \right) = 1 + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 16} +$$

$$+ \frac{1}{7 \cdot 64} + \frac{1}{9 \cdot 256} + \frac{1}{11 \cdot 1024} = 1,0986.$$

Хотя в данной сумме шестое слагаемое и меньше 10^{-4} , его нельзя отбрасывать, так как тогда ошибка будет больше 10^{-4} . Напомним, что только для знакопередающегося ряда ошибка не превышает первого из не учитываемых членов, а в случае знакоположительных рядов ошибку чаще всего оценивают, сравнивая остаток ряда с геометрической убывающей прогрессией, что мы и сделали в нашем примере.

Спасибо за внимание