

ЛЕКЦИЯ 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.

Понятие числовой функции

Способы задания функции

Характеристики функций

Основные элементарные функции

Предел функции

Односторонние пределы

Теоремы о пределах функции

Замечательные пределы

Бесконечно малые и бесконечно большие
величины

Примеры

ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ

- ✘ Понятие функции является одним из основных математических понятий, оно связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.
- ✘ Пусть даны два непустых множества действительных чисел X и Y . Соответствие f , которое каждому данному числу $x \in X$ сопоставляет одно и только одно число $y \in Y$, называется числовой функцией и записывается $y = f(x)$
- ✘ Говорят еще, что функция f отображает множество X на множество Y .

ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ

- ▣ Переменная x называется **аргументом функции** или **независимой переменной**, а y — **значением функции** или **зависимой переменной** (от x).
Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в **функциональной зависимости**.
- ▣ Множество X называется **областью определения** функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех y называется **множеством значений** функции f и обозначается $E(f)$
- ▣ Если переменные x и y рассматривать, как декартовы координаты, то **графиком функции** $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости OXY с координатами (x, y) .

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

- ✳ Основные формы аналитического способа задания функции
- ✳ 1) явная форма: функция задается в виде одной или нескольких формул, например

$$y = (\sqrt{x} - 1)^2 \text{ или } y = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

- ✳ 2) неявная форма: функция задается в виде уравнения, например $xy-1=0$
- ✳ 3) параметрическая форма: значения x и y выражаются через третью величину, называемую параметром, например $x=\sin t, y=\cos t$

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

- ▣ **Табличный способ:** функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.
На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.
- ▣ **Графический способ:** задается график функции.
Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком — его неточность

ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

- ✦ Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D , называется **четной**, если для любого $x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$;
- ✦ **нечетной**, если для любого $x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.
- ✦ График четной функции симметричен относительно оси Oy , а нечетной — относительно начала координат.
- ✦ Например, $y = x^2$; $y = \sqrt{1 + x^2}$; $y = \ln|x|$; — четные функции;
- ✦ $y = \sin(x)$; $y = x^3$ — нечетные функции;
- ✦ $y = x - 1$, $y = \sqrt{x}$ — функции общего вида, т. е. не четные и не нечетные

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

- ✘ Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D , называется периодической на этом множестве, если существует такое число $T > 0$, что при каждом $x \in D$ значение $(x + T) \in D$ и $f(x + T) = f(x)$.
- ✘ При этом число T называется периодом функции .
- ✘ Если T - период функции, то ее периодами будут также числа kT . где $k = \pm 1; \pm 2, \dots$
- ✘ Например, для $f = \sin x$ периодами будут числа $\pm 2\pi; \pm 4 \pi; \pm 6 \pi, \dots$ Основной период (наименьший положительный) - это период $= 2 \pi$.

ОГРАНИЧЕННАЯ ФУНКЦИЯ

- ✦ Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху, если существует такое число M , что для всех значений $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$, и ограниченной снизу, если существует такое число m , что для всех значений $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \geq m$,
- ✦ Функция, ограниченная и сверху и снизу, называется ограниченной
- ✦ Например, $f(x) = x^2$ ограничена снизу, ($m=0$) и не ограничена сверху,
- ✦ $f(x) = -x^2$ ограничена сверху ($M=0$) и не ограничена снизу.
- ✦ $f(x) = \sin(x)$ ограничена сверху $M=1$ и снизу $m=-1$

МОНОТОННАЯ ФУНКЦИЯ

- ✦ Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b) ;
- ✦ Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на (a,b) , если для любой пары значений $x_1 \in (a,b)$, $x_2 \in (a,b)$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$
- ✦ Если из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция называется **неубывающей**
- ✦ Функция $f(x)$ называется **убывающей** на (a,b) , если для любой пары значений $x_1 \in (a,b)$, $x_2 \in (a,b)$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$
- ✦ Если из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция называется **невозрастающей**
- ✦ Возрастающие, не возрастающие, убывающие и неубывающие функции называются **монотонными**

ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

- ✦ Пусть функция $y=f(x)$ - числовая функция с областью определения $D(f)$ и множеством значений $E(f)$
- ✦ Для любого $y_0 \in E(f)$ в множестве $D(f)$ найдется хотя бы одно значение $x=x_0$ такое, что $f(x_0)=y_0$.
- ✦ Если $y=f(x)$ непрерывная и строго монотонная, то это значение x_0 единственное
- ✦ Соответствие, относящее каждому числу $y_0 \in E(f)$ единственное число $x_0 \in D(f)$, называют функцией, обратной к функции f , обозначают символом f^{-1} и пишут $x=f^{-1}(y)$
- ✦ Чтобы найти функцию, обратную данной, нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x .
- ✦ Примеры.
 1. Для функции $y=2x$ обратной функцией является функция $x=\frac{1}{2}y$:
 2. Для функции $y=x^2$, $x \in [0, \infty)$ обратной функцией является $x = \sqrt{y}$

СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

- Если функция $x=f^{-1}(y)$ является обратной для функции $y=f(x)$, то функция $y=f(x)$ будет обратной для функции $x=f^{-1}(y)$.

Т.е. функции $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ являются **взаимно обратными**.

- Область определения функции $y=f(x)$ является множеством значений функции $x=f^{-1}(y)$, а множество значений функции $y=f(x)$ - областью определения функции $x=f^{-1}(y)$

- Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов координатной плоскости OXY

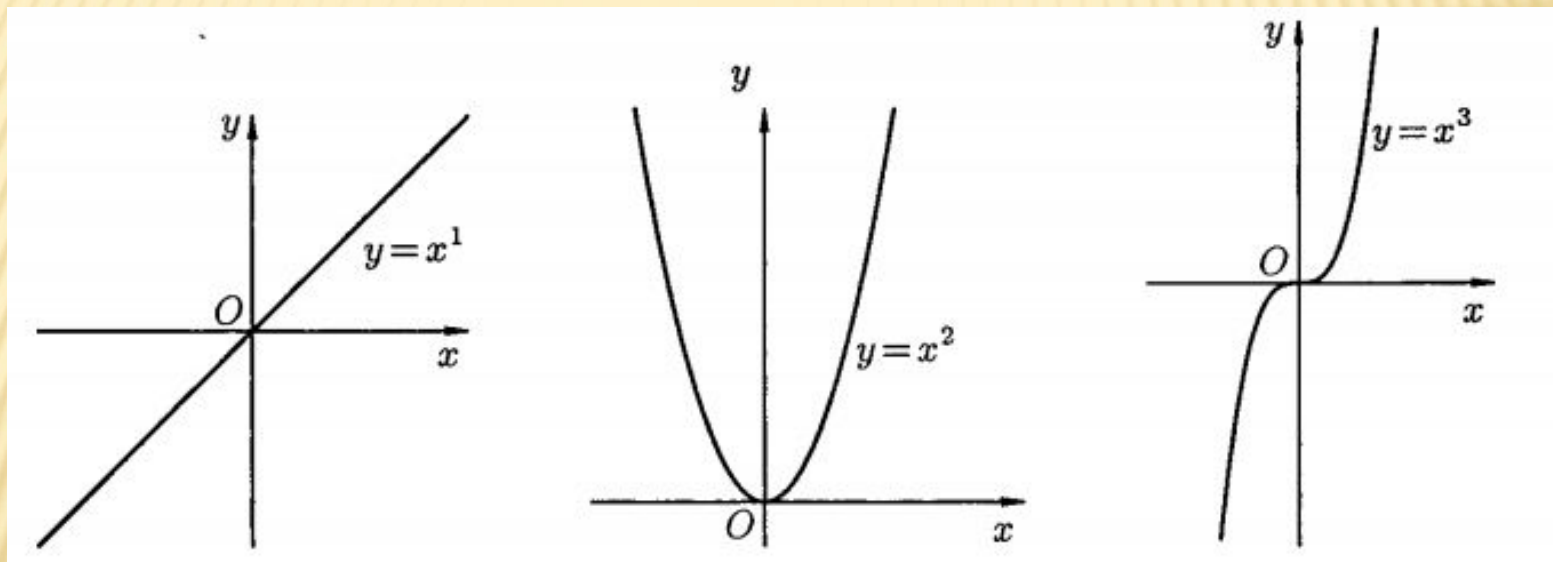


СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ

- ✦ Пусть $y=f(x)$ – числовая функция с областью определения $D(f)$ и множеством значений $E(f)$, а $z=g(y)$ – числовая функция с областью определения $E(f)$ и множеством значений $E(g)$
- ✦ Соответствие, которое каждому данному числу $x \in D(f)$ сопоставляет единственное число $y \in E(f)$, а этому числу y – единственное число $z \in E(g)$, называется сложной функцией (или суперпозицией заданных функций, или функцией от функции) и записывается $z = g(f(x))$
- ✦ Например, функция $z=\sin 2x$ есть суперпозиция двух функций $z=\sin y$ и $y=2x$

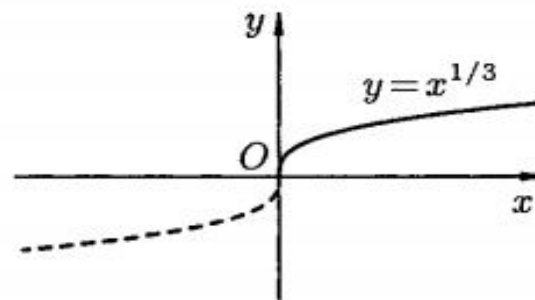
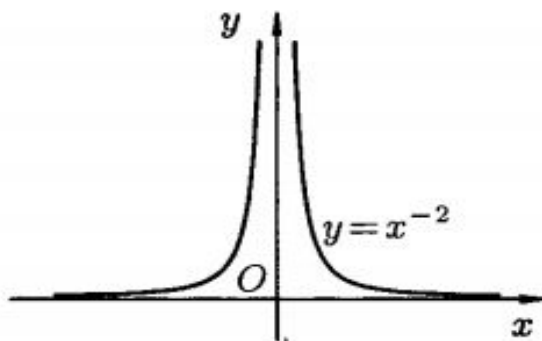
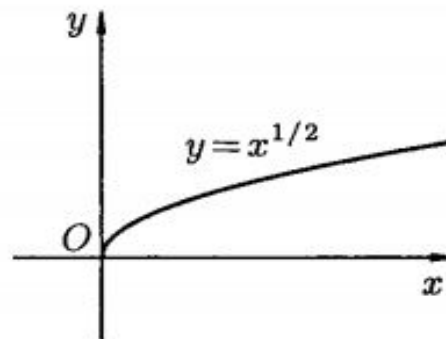
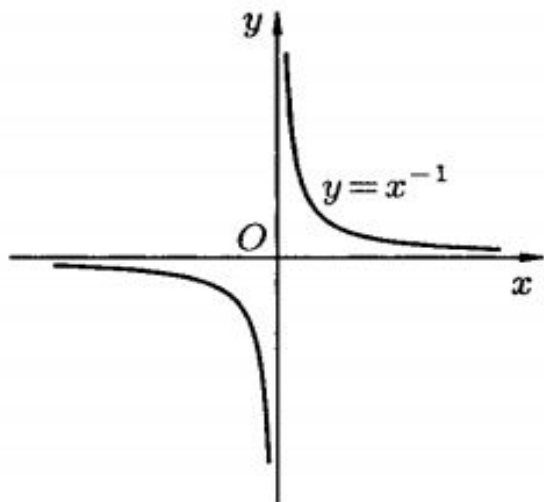
ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

✦ Степенная функция $y = x^a$



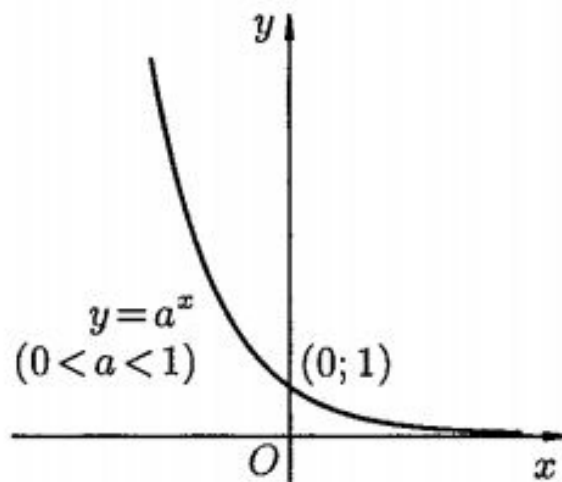
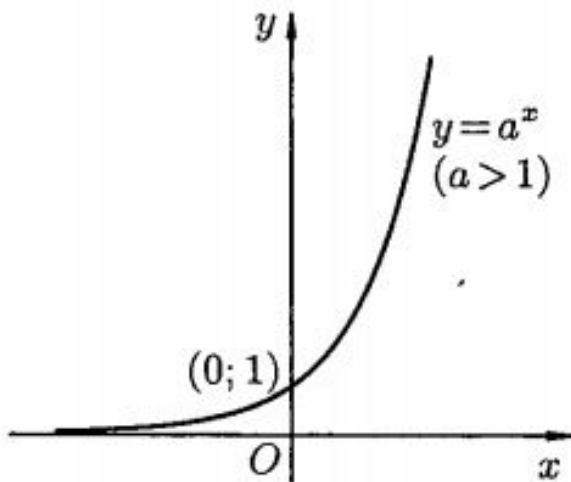
ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

✦ Степенная функция $y = x^a$



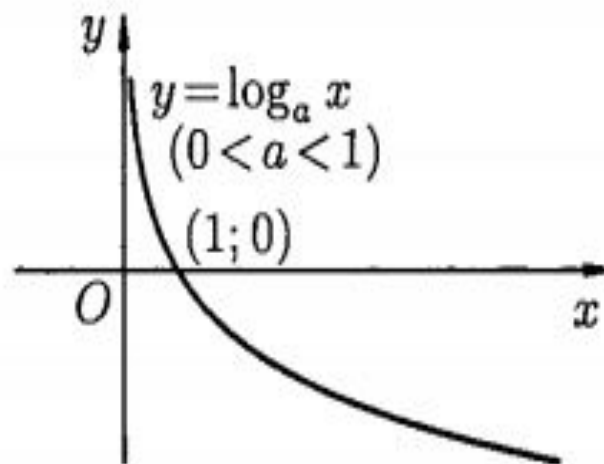
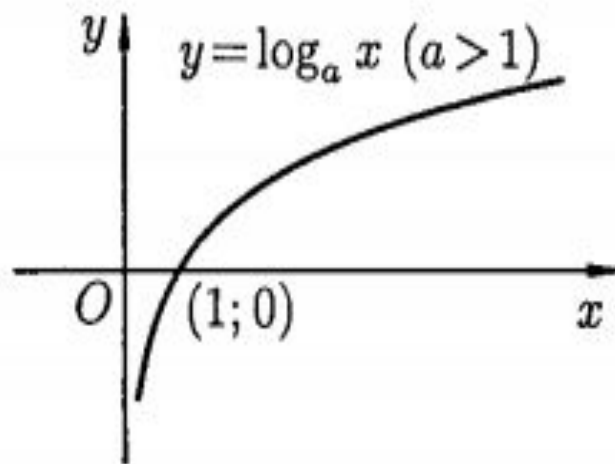
ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

✦ Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$



ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

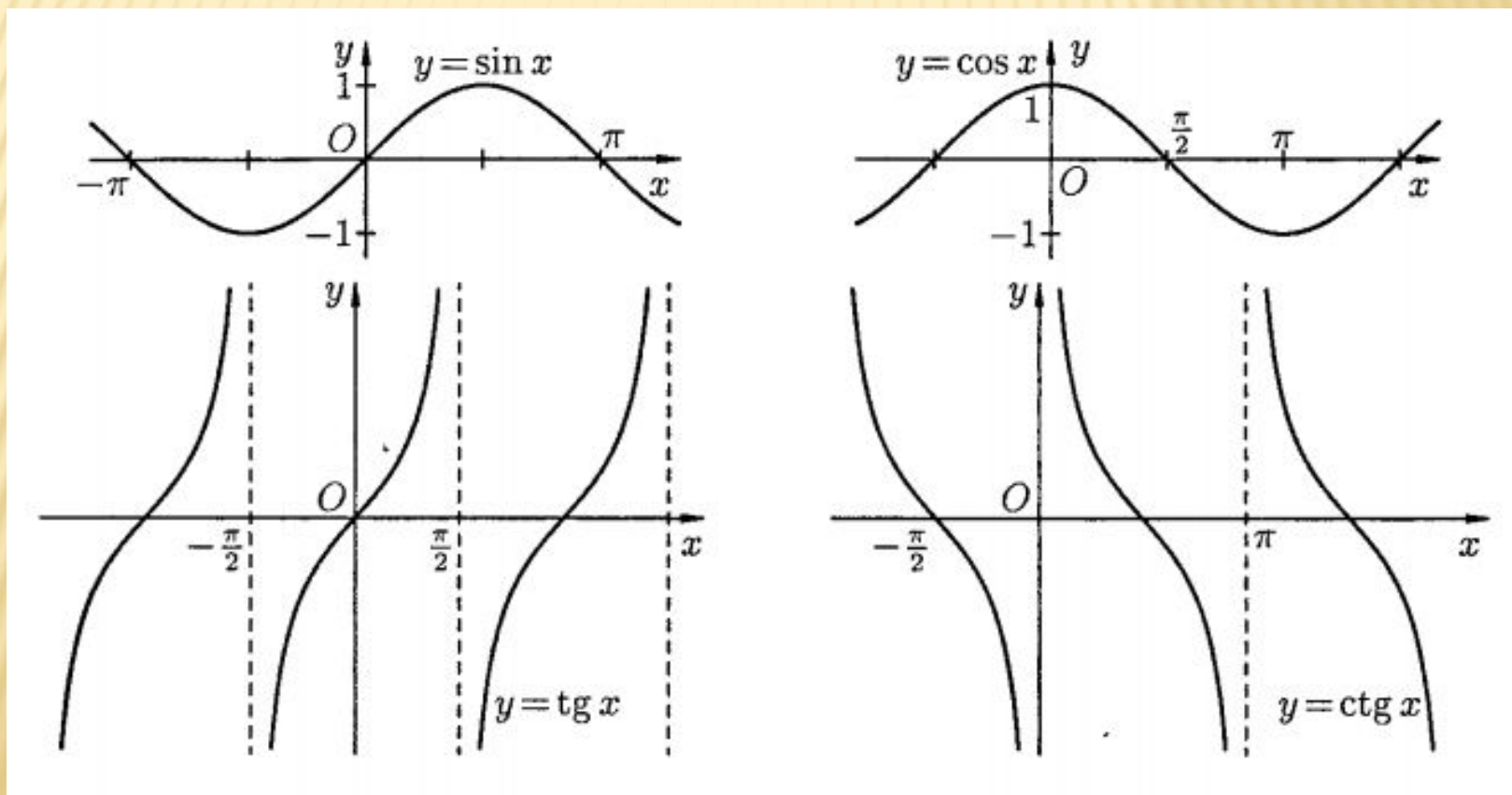
✦ Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$



ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

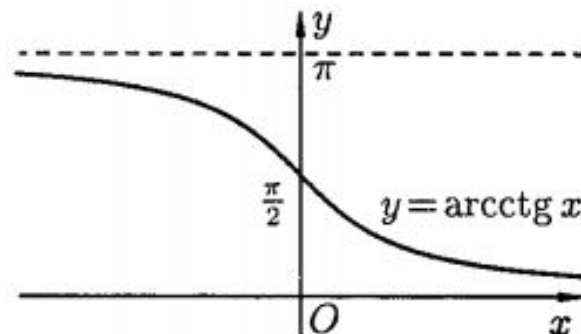
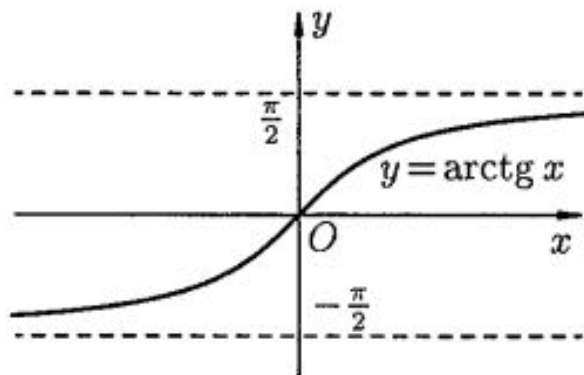
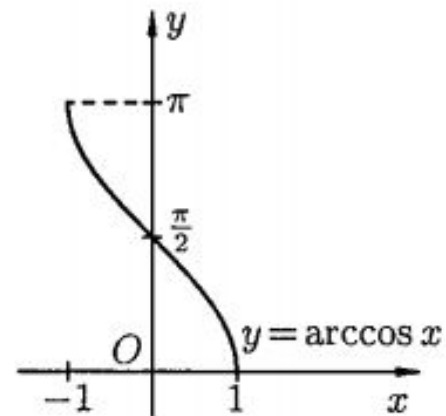
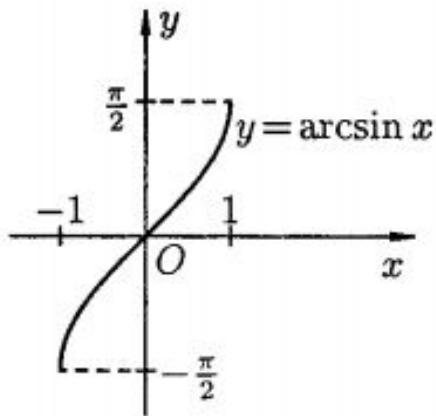
▣ Тригонометрические функции

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$



ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

- ▣ **Обратные тригонометрические функции**
 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$



ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ФУНКЦИЯ

✘ - эта функция, задаваемая одной формулой , составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и суперпозиций функции

✘ Примеры элементарных функций

$$y = (\sqrt{x} - 1)^2 ; y = \ln(2 + x^3) ; y = \sin 2x - \ln x$$

✘ Примеры неэлементарных функций

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

$$y = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \dots$$

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ (ПО ГЕЙНЕ)

- ✦ Пусть функция $f(x)$ определена во всех точках промежутка (a,b) . Построим последовательность значений аргумента функции $f(x)$ x_1, x_2, x_3, \dots такую, чтобы все $x_n \in (a,b)$ и последовательность сходилась к $x_0 \in (a,b)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

- ✦ Тогда значения функции $f(x)$ тоже образуют числовую последовательность $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$
- ✦ Число A является пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 , если для любой последовательности значений аргумента, сходящихся к x_0 , последовательность значений функции сходится к числу A

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

ГЕНРИХ ЭДУАРД ГЕЙНЕ (*HEINRICH EDUARD HEINE*)

- (1821-1881) — немецкий математик. Ученик Дирихле.
- Изучал математику в Гёттингенском университете, Берлинском университете и в Альбертине в Кёнигсберге, был профессором математики в Бонне и в Галле.
- Занимался теорией потенциала, теорией функций и дифференциальными уравнениями



ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ (ПО КОШИ)

- ✘ Число A является пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

- ✘ если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , зависящее от ε , что для всех $x \in (a, b)$, удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ (ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ

∞)

- ✘ Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty, +\infty)$
- ✘ Число A является пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к $+\infty$,

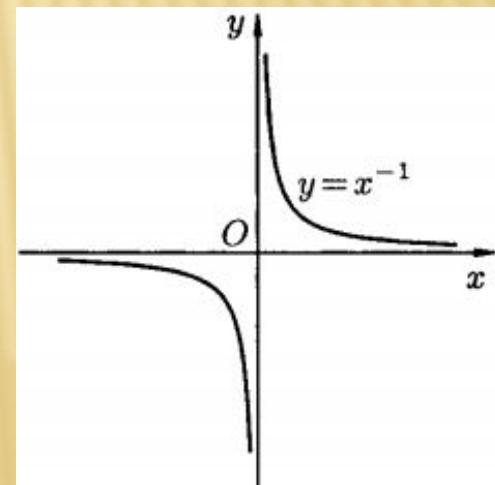
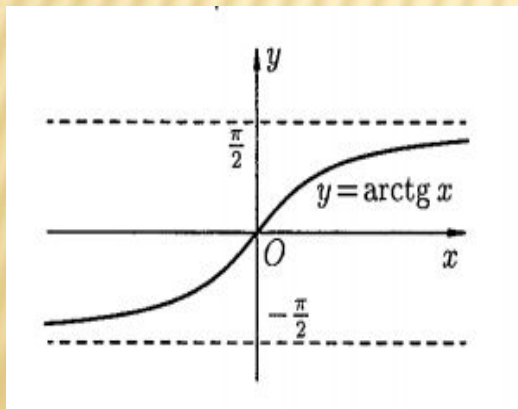
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число Δ , зависящее от ε , что для всех x , удовлетворяющих неравенству

$$x > \Delta$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$



ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ (ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ

∞)

* Функция $f(x)$ стремится к $+\infty$, при стремлении x к x_0 ,

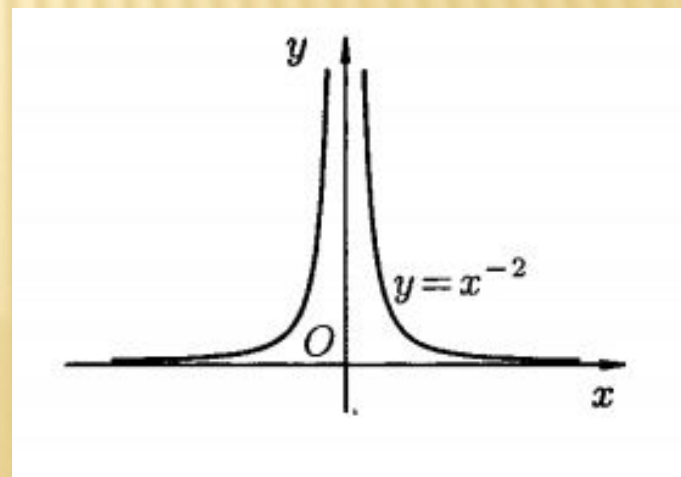
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

если для любого сколь угодно большого положительного числа E найдется такое положительное число δ , что для всех x , удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

выполняется неравенство

$$f(x) < E$$



ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

- * В определении предела функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0 . Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов

ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

- ✦ Пусть $f(x)$ определена на (a, x_0) . Число A_1 является левым пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 слева

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$$

если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , зависящее от ε , что для всех $x \in (a, x_0)$, удовлетворяющих неравенству $x_0 - x < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$

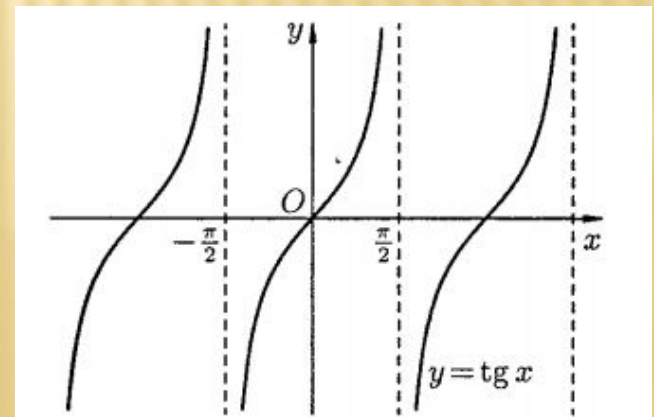
- ✦ Пусть $f(x)$ определена на (x_0, b) . Число A_2 является правым пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 справа

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$$

если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , зависящее от ε , что для всех $x \in (x_0, b)$, удовлетворяющих неравенству $x - x_0 < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$

ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

- ✳ Пределы функции слева и справа называются односторонними пределами.
- ✳ Очевидно, если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mathbf{A}$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$
- ✳ Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба предела $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$ и они равны, то существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mathbf{A}$
- ✳ Если же $A_1 \neq A_2$, то предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mathbf{A}$ не существует



ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ

- * 1) Функция может иметь только один предел
- * 2) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \rightarrow a$, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ также имеют пределы при $x \rightarrow a$, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМ О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ

- ✦ 1) Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- ✦ 2) Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n,$$

В частности

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n,$$

ПРИМЕР 1

✳ Вычислить предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 5}{2x^2 - x + 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 3x^2 + 5}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 5}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 2} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 5}{2 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} x + 2} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 1} x)^3 + 3(\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 + 5}{2(\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 - 1 + 2} = \frac{1 + 3 + 5}{2 - 1 + 2} = \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

- Использованы теоремы о пределе частного, суммы, произведения

ПРИМЕР 2

✳ Вычислить предел

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 + x - 3x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x + 3)(x - 3)}{x(x + 1) - 3(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x + 3)(x - 3)}{(x + 1)(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x + 3)}{x + 1} = \frac{12}{4} = 3\end{aligned}$$

✳ Числитель и знаменатель разложены на множители, дробь преобразована, затем использованы теоремы о пределе частного, суммы, произведения

ПРИМЕР 3

✳ Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{\sqrt{2x} - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 4)(\sqrt{2x} + 2)}{(\sqrt{2x} - 2)(\sqrt{2x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 4)(\sqrt{2x} + 2)}{2x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x} + 2) = 4$$

✳ Числитель и знаменатель дроби умножен на выражение, сопряженное знаменателю, дробь преобразована, затем использованы теоремы о пределе частного, суммы, произведения

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

✦ В теории пределов важное место занимают следующие пределы, с помощью которых вычисляются многие пределы от элементарных функций:

$$\times 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\times 2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\times 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\times 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\times 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

ПРИМЕР 4

✘ Вычислить предел

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x}{\sin x - \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x - 2\sin x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin x(1 - \sin^2 x)}{\sin x(1 - 2\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\cos x}{1 - 2\cos x} = \frac{4}{-1} = -4\end{aligned}$$

✘ Использованы тригонометрические формулы двойного и тройного угла, преобразование дроби и первый замечательный предел

БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

- ✦ Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (ББФ) при $x \rightarrow a$, если для любого сколь угодно большого положительного числа E найдется такое положительное число δ , что для всех x , удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - a| < \delta$$

выполняется неравенство

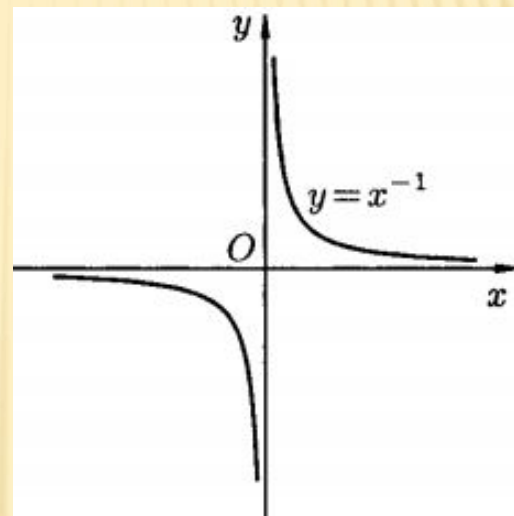
$$|f(x)| < E$$

- ✦ Т.е. если $f(x)$ стремится к $\pm\infty$, при стремлении x к a

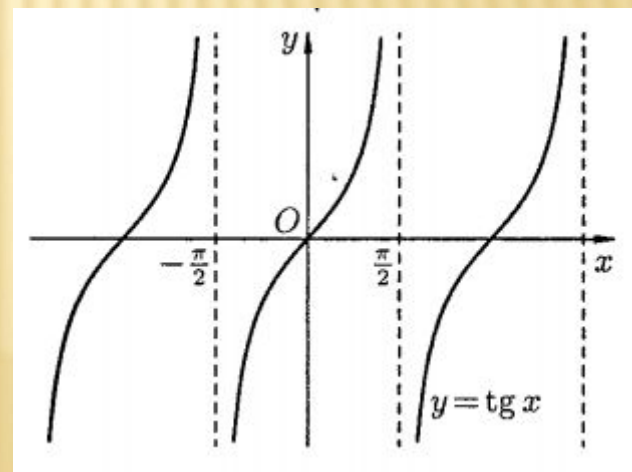
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

ПРИМЕРЫ ББФ

✘ $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$



✘ $f(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow \pi/2$



БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

- ✦ Функция $f(x)$ называется бесконечно малой функцией (БМФ) при $x \rightarrow a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , что для всех x , удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - a| < \delta$$

выполняется неравенство

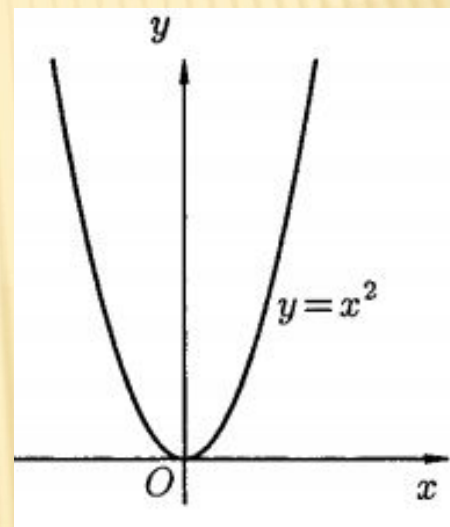
$$|f(x)| < \varepsilon$$

- ✦ Т.е. если $f(x)$ стремится к 0, при стремлении x к a

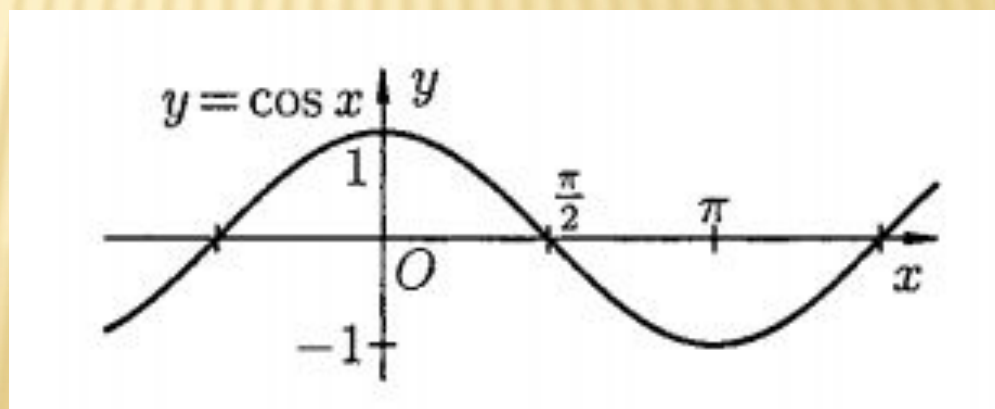
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

ПРИМЕРЫ БМФ

✘ $f(x) = x^2$ при $x \rightarrow 0$



✘ $f(x) = \cos x$ при $x \rightarrow \pi/2$



ТЕОРЕМЫ О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЯХ

- ✦ 1) Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция
- ✦ 2) Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция

Следствие 1 Произведение двух БМФ есть БМФ

Следствие 2 Произведение БМФ на число БМФ

- ✦ 3) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть бесконечно малая функция
- ✦ 4) Если функция $a(x)$ — бесконечно малая ($a \neq 0$), то функция $\frac{1}{a(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция $f(x)$ — бесконечно большая, $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

- Две БМФ сравниваются между собой с помощью их отношения.
- Как известно, сумма, разность и произведение двух БМФ. есть БМФ. Отношение же двух БМФ может вести себя различным образом: быть конечным числом, быть бесконечно большой функцией, бесконечно малой или вообще не стремиться ни к какому пределу.

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

✦ Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ – две БМФ при $x \rightarrow x_0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$$

- ✦ 1) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$, то α и β - бесконечно малые одного порядка
- ✦ 2) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то α - бесконечно малая более высокого порядка, чем β
- ✦ 3) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то α - бесконечно малая более низкого порядка, чем β
- ✦ 4) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β - несравнимые бесконечно малые

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

- ✦ Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β - эквивалентные бесконечно малые $\alpha \sim \beta$
- ✦ эквивалентные бесконечно малые играют особую роль среди БМФ одного порядка
- ✦ Т.1. Предел отношения двух БМФ не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей БМФ.
- ✦ Т.2. Разность двух эквивалентных БМФ есть БМФ более высокого порядка, чем каждая из них.
- ✦ Т.3, Сумма конечного числа БМФ разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

1. $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$ ($x \rightarrow 0$);
3. $\arcsin x \sim x$ ($x \rightarrow 0$);
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ ($x \rightarrow 0$);
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ($x \rightarrow 0$);

6. $e^x - 1 \sim x$ ($x \rightarrow 0$);
7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ ($x \rightarrow 0$);
8. $\ln(1 + x) \sim x$ ($x \rightarrow 0$);
9. $\log_a(1 + x) \sim x \cdot \log_a e$ ($x \rightarrow 0$);
10. $(1 + x)^k - 1 \sim k \cdot x$, $k > 0$ ($x \rightarrow 0$);
в частности, $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{2}$.

ПРИМЕР 5

✘ Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$$

✘ Так как $\sin 3x \sim 3x$ и $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$