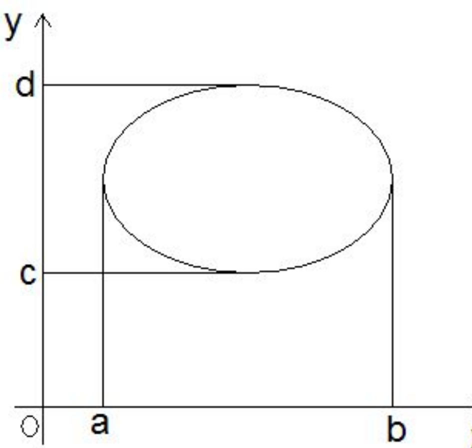
Лекция 3.2. **Криволинейные интегралы.**

3. Формула Грина



Теорема (формула Грина): $G \subset R^2$ – замкнутая ограниченная выпуклая область, $\partial G = \bar{\gamma}(t)$ – кусочно непрерывно дифференцируема; пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на G, $\exists \frac{\partial P}{\partial y}, \exists \frac{\partial Q}{\partial x}$, непрерывные на G; тогда:

$$\oint_{\partial G} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Следствие 1: Для конечного объединений областей G, удовлетворяющих условиям формулы Грина, также верна формула Грина.

Пример. Вычислить $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

Лекция 3.2. ***Криволинейные интегралы.***

4. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Теорема. Пусть функции P(x, y) и Q(x, y) непрерывны в области D. Тогда следующие три условия эквивалентны.

1. Для любой замкнутой (возможно самопересекающейся) кусочно-гладкой кривой L, расположенной в D, $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

2. Для любых двух точек A и B области D значение интеграла $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от кусочно-гладкой кривой L, соединяющей точки A и B и расположенной в D.

3. Дифференциальная форма P(x, y) dx + Q(x, y) dy представляет собой полный дифференциал.

Иными словами, в D существует такая функция u(M) = u(x, y), что du = Pdx + Qdy. В этом случае для любых точек A и B из области D и для произвольной кусочно-гладкой кривой L, соединяющей эти точки и расположенной в D, $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$ u(B) - u(A).

Теорема. Пусть функции P(x, y) и Q(x, y) и их частные производные непрерывны в односвязной области D. Тогда каждое из трех условий 1; 2; 3 предыдущей теоремы эквивалентно следующему (четвертому) условию

$$4. \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ в } D$$

Лекция 3.2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Понятие поверхности

Множество Ф точек трехмерного пространства называется элементарной поверхностью, если это множество является образом открытого круга G при гомеоморфном отображении G в пространство.

Множество Ф точек пространства называется простой поверхностью, если это множество связно и любая точка этого множества имеет окрестность, которая является элементарной поверхностью.

Поверхность Ф, точки которой имеют координаты x, y, z, называется регулярной (k раз дифференцируемой), если при некотором $k \geq 1$ у каждой точки Ф есть окрестность, допускающая k раз дифференцируемую параметризацию:

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),$$

в которых функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ являются k раз дифференцируемыми в области G.

Если $k = 1$, то поверхность обычно называется гладкой.

Точка регулярной поверхности называется обыкновенной, если существует такая регулярная параметризация некоторой ее окрестности, что в этой точке ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

равен двум. В противном случае точка поверхности называется особой.

Лекция 3.2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В любой обыкновенной точке гладкой поверхности существует касательная плоскость.

Нормалью к поверхности Ф в точке M_0 называется прямая, проходящая через M_0 и перпендикулярная к касательной плоскости в M_0. Вектором нормали к поверхности в точке M_0 будем называть любой ненулевой вектор, коллинеарный нормали в M_0.

Пусть M_0 — обыкновенная точка гладкой поверхности Ф. Тогда, вектор

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$$

Понятие площади поверхности. Пусть Ф —ограниченная полная двусторонняя поверхность. Разобьем Ф кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей $Ф_i$, каждая из которых однозначно проецируется на касательную плоскость, проходящую через любую точку этой части. Обозначим через Δ максимальный из размеров частей $Ф_i$, а через Q_i — площадь проекции $Ф_i$ на касательную плоскость в некоторой точке M_i части $Ф_i$. Составим далее сумму Q_i всех указанных площадей.

Определение 1. Число Q называется пределом сумм $\sum_i Q_i$ при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех разбиений Ф кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей $Ф_i$ для которых $\Delta < \delta$, независимо от выбора точек M_i на частях $Ф_\wedge$ выполняется неравенство: $|Q - \sum_i Q_i| < 0$

Определение 2. Если для поверхности Ф существует предел Q сумм $\sum_i Q_i$ при $\Delta \to 0$, то поверхность называется ***квадрируемой***, а число Q называется площадью поверхности.

Лекция 3.2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Площадь а поверхности может быть найдена по формуле

$$Q = \iint_{\Omega} |[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]| dudv$$

Поверхностные интегралы

Пусть Ф — гладкая, ограниченная полная двусторонняя поверхность. Пусть на Ф задана функция f(M) точки M поверхности Ф. Обозначим через **n**(M) непрерывное векторное поле единичных нормалей к Ф. Разобьем поверхность Ф кусочно-гладкими кривыми на части $Ф_i$ и на каждой такой части выберем произвольно точку M_i. Введем следующие обозначения: Δ — максимальный размер частей $Ф_i$; Q_i— площадь $Ф_i$; α_i, β_i, γ_i - углы, которые составляет с осями координат вектор **n**(M_i).

Составим следующие четыре суммы:

$$I\{\Phi_i, M_i\} = \sum_i f(M_i) Q_i$$

$$I\{\Phi_i, M_i, X\} = \sum_i f(M_i) Q_i \cos\alpha_i$$

$$I\{\Phi_i, M_i, Y\} = \sum_i f(M_i) Q_i \cos\beta_i$$

$$I\{\Phi_i, M_i, Z\} = \sum f(M_i) Q_i \cos\gamma_i$$

Лекция 3.2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение. Число I называется пределом сумм $I\{\Phi_i, M_i\}$ при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любых разбиений поверхности Ф кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, максимальный размер которых Δ меньше δ, независимо от выбора точек M_i на частях Φ_i выполняется неравенство $|I\{\Phi_i, M_i\} - I| < \varepsilon$.

Предел сумм $I\{\Phi_i, M_i\}$ при $\Delta \to 0$ называется поверхностным интегралом первого рода от функции f(M) по поверхности Ф и обозначается следующим образом:

$$\iint\limits_{\Phi} f(M)\,dQ$$

Пределы сумм остальных сумм при $\Delta \to 0$ называются поверхностными интегралами второго рода от функции f(M) по поверхности Ф. Для этих интегралов соответственно используются обозначения

$$\iint\limits_{\Phi} f(M)\cos\alpha\,dQ\,,\ \iint\limits_{\Phi} f(M)\cos\beta\,dQ\,,\ \iint\limits_{\Phi} f(M)\cos\gamma\,dQ$$