Лекция 3.2. Общее определение интеграла

Рассмотрим разбиение T области D на подобласти $D_1, D_2, \ldots, D_n$, удовлетворяющие свойствам (рис.1):

1) объединение подобластей D_i полностью покрывает область D;
2) подобласти D_i могут пересекаться только по своим граничным точкам;
3) границы $\Gamma(D_i)$ подобластей D_i представляют собой «*хорошие*» кривые, т.е. определены их площади $|D_i|$.

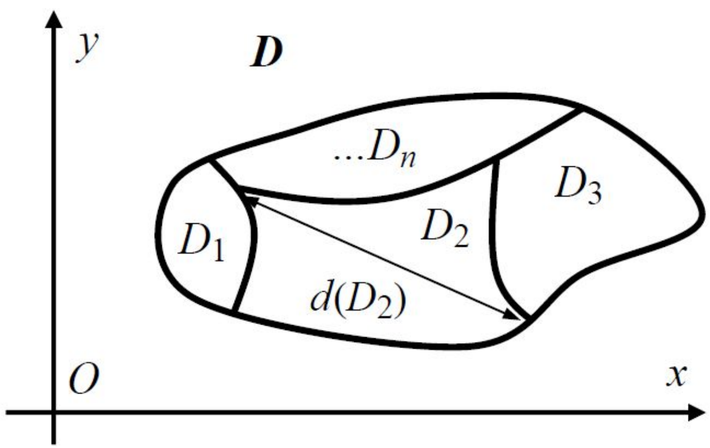


Рис. 1. Область D и ее разбиение на части.

Лекция 3.2. **Общее определение интеграла**

Определение 1. *Число*

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{r} f(P_i)\,\Delta D_i \qquad (3.3)$$

называется интегральной суммой функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению области D на частичные области D_i и данному выбору промежуточных точек P_i в частичных областях.

Определение 2. *Число I называется пределом интегральных сумм* (3.3) *при $\tilde{\Delta}\to 0$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что при $\tilde{\Delta}<\delta$ независимо от выбора точек P_i в частичных областях D_i выполняется неравенство $|\tilde{\sigma}-I|<\varepsilon$.*

Определение 3 (общее определение интегрируемости). *Функция $f(x, y)$ называется интегрируемой (по Риману) в области D, если существует конечный предел I интегральных сумм $\tilde{\sigma}$ этой функции при $\tilde{\Delta}\to 0$. Этот предел I называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D.*

Теорема 3.5. *Общее определение интегрируемости эквивалентно определению, данному в* п. 3.

Лекция 2.15. Свойства определенного интеграла

1.Простейшие свойства

$$1)\ \int\limits_D dxdy = \mu D$$

2) Если f и g интегрируемы на D, то $f + g$ также интегрируема и

$$\int\limits_D (f(x,y) + g(x,y))dxdy = \int\limits_D f(x,y)dxdy + \int\limits_D g(x,y)dxdy.$$

3) Если f интегрируема на D , то $cf(x)$ также интегрируема и

$$\int\limits_D c\,f(x,y)dxdy = c\int\limits_D f(x,y)dxdy.$$

4) Если f интегрируема на D , то $|f|$ также интегрируема и

$$\left|\int\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \int\limits_D |f(x,y)|dxdy.$$

Лекция 2.15. **Свойства определенного интеграла**

1.Простейшие свойства

5) Если *f*, *g* интегрируемы на *D* , то *fg* также интегрируема.

6) Если *f* отлична от *0* лишь в конечном числе точек, то она интегрируема и ее интеграл равен нулю.

Следствие. Если f_1 интегрируема, и f_2 отлична от f_1 на конечном числе точек, то f_2 также интегрируема и

$$\int\limits_D f_1(x,y)dxdy = \int\limits_D f_2(x,y)dxdy .$$

7) Если *f* и *g* интегрируемы на *D* и $f \le g$ на *D* , то

$$\int\limits_D f(x,y)\,dxdy \le \int\limits_D g(x,y)\,dxdy .$$

Лекция 2.15. **Свойства определенного интеграла**

2. Теоремы о среднем, аддитивность по множеству.

Теорема 1. *Если $m \le f(x,y) \le M$ на D, то $\exists\, c \in [m,M]$:*

$$\int\limits_D f(x,y)dxdy = c\,\mu D.$$

Следствие. Если f непрерывна на связном компакте D, то $\exists \xi \in D$:

$$\int\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi)\mu D.$$

Лекция 2.15. **Свойства определенного интеграла**

Теорема 2. *Если f – интегрируема на D и $D=D_1 \cup D_2$ (разбиение произведено некоторой линией), то f(x) – интегрируема на D_1 и D_2 и*

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int_{D_2} f(x,y)dxdy\,.$$

Лекция 2.15. **Сведение двойного интеграла к повторному**

1. Случай прямоугольника.

Теорема 1. Пусть для функции $f(x,y)$ в прямоугольнике D = [a; b]×[c; d] существует двойной интеграл

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

Пусть далее для каждого *x* из сегмента [a; b] существует однократный интеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)dy\,.$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

и справедливо равенство

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy\,.$$

Лекция 2.15. Сведение двойного интеграла к повторному

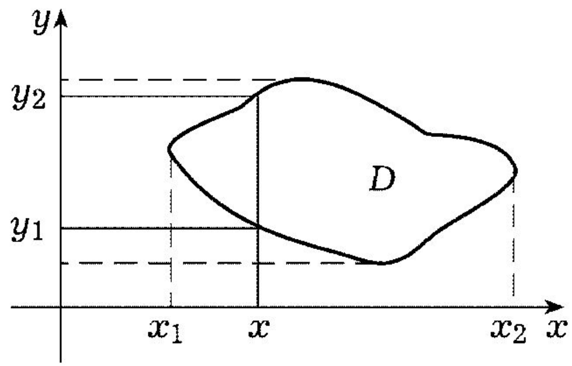
2. Случай произвольной области.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия: 1) область D ограничена, замкнута и такова, что любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу этой области не более чем в двух точках, ординаты которых суть $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $y_1(x) \le y_2(x)$; 2) функция $f(x,y)$ допускает существование двойного интеграла

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

и существование для любого x однократного интеграла

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,.$$



При этих условиях существует повторный интеграл

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

и справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Примеры

1. Свести двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами, если D — область, ограниченная кривыми $x = 1$, $y = x^2$, $y = 2x$ ($x \leq 1$).

2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$$