

Лекция 3.2. Общее определение интеграла

Рассмотрим разбиение T области D на подобласти D_1, D_2, \dots, D_n , удовлетворяющие свойствам (рис.1):

- 1) объединение подобластей D_i полностью покрывает область D ;
- 2) подобласти D_i могут пересекаться только по своим граничным точкам;
- 3) границы $\Gamma(D_i)$ подобластей D_i представляют собой «хорошие» кривые, т.е. определены их площади $|D_i|$.

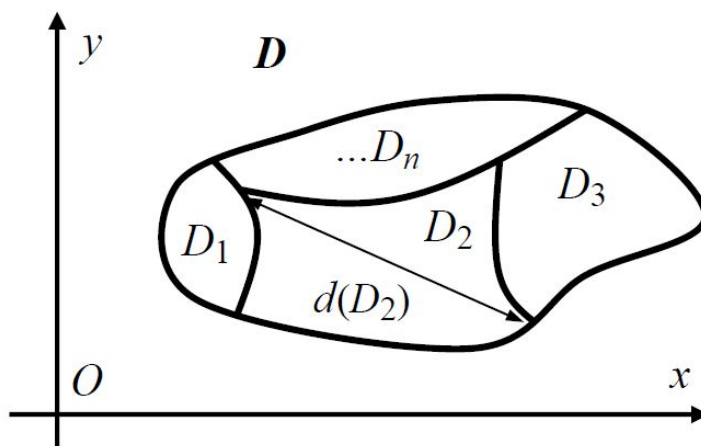


Рис. 1. Область D и ее разбиение на части.

Лекция 3.2. Общее определение интеграла

Определение 1. Число

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^r f(P_i) \Delta D_i \quad (3.3)$$

называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению области D на частичные области D_i и данному выбору промежуточных точек P_i в частичных областях.

Определение 2. Число I называется *пределом интегральных сумм* (3.3) при $\tilde{\Delta} \rightarrow 0$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ , что при $\tilde{\Delta} < \delta$ независимо от выбора точек P_i в частичных областях D_i выполняется неравенство $|\tilde{\sigma} - I| < \varepsilon$.

Определение 3 (общее определение интегрируемости). Функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой (по Риману)* в области D , если существует конечный предел I интегральных сумм $\tilde{\sigma}$ этой функции при $\tilde{\Delta} \rightarrow 0$. Этот предел I называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D .

Теорема 3.5. Общее определение интегрируемости эквивалентно определению, данному в п. 3.

Лекция 2.15. Свойства определенного интеграла

1. Простейшие свойства

$$1) \int_D dx dy = \mu D$$

2) Если f и g интегрируемы на D , то $f + g$ также интегрируема и

$$\int_D (f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \int_D f(x, y) dx dy + \int_D g(x, y) dx dy.$$

3) Если f интегрируема на D , то $cf(x)$ также интегрируема и

$$\int_D c f(x, y) dx dy = c \int_D f(x, y) dx dy.$$

4) Если f интегрируема на D , то $|f|$ также интегрируема и

$$\left| \int_D f(x, y) dx dy \right| \leq \int_D |f(x, y)| dx dy.$$

Лекция 2.15. Свойства определенного интеграла

1. Простейшие свойства

5) Если f, g интегрируемы на D , то fg также интегрируема.

6) Если f отлична от 0 лишь в конечном числе точек, то она интегрируема и ее интеграл равен нулю.

Следствие. Если f_1 интегрируема, и f_2 отлична от f_1 на конечном числе точек, то f_2 также интегрируема и

$$\int_D f_1(x, y) dx dy = \int_D f_2(x, y) dx dy.$$

7) Если f и g интегрируемы на D и $f \leq g$ на D , то

$$\int_D f(x, y) dx dy \leq \int_D g(x, y) dx dy.$$

Лекция 2.15. Свойства определенного интеграла

2. Теоремы о среднем, аддитивность по множеству.

Теорема 1. Если $m \leq f(x, y) \leq M$ на D , то $\exists c \in [m, M]$:

$$\int_D f(x, y) dx dy = c \mu D.$$

Следствие. Если f непрерывна на связном компакте D , то $\exists \xi \in D$:

$$\int_D f(x, y) dx dy = f(\xi) \mu D.$$

Лекция 2.15. Свойства определенного интеграла

Теорема 2. Если f – интегрируема на D и $D=D_1 \cup D_2$ (разбиение произведено некоторой линией), то $f(x)$ – интегрируема на D_1 и D_2 и

$$\int_D f(x, y) dx dy$$

$$= \int_{D_1} f(x, y) dx dy + \int_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Лекция 2.15. Сведение двойного интеграла к повторному

1. Случай прямоугольника.

Теорема 1. Пусть для функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $D = [a; b] \times [c; d]$ существует двойной интеграл

$$\int_D f(x, y) dx dy$$

Пусть далее для каждого x из сегмента $[a; b]$ существует однократный интеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

и справедливо равенство

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Лекция 2.15. Сведение двойного интеграла к повторному

2. Случай произвольной области.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия: 1) область D ограничена, замкнута и такова, что любая прямая, параллельная оси Oy , пересекает границу этой области не более чем в двух точках, ординаты которых суть $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $y_1(x) \leq y_2(x)$; 2) функция $f(x, y)$ допускает существование двойного интеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

и существование для любого x однократного интеграла

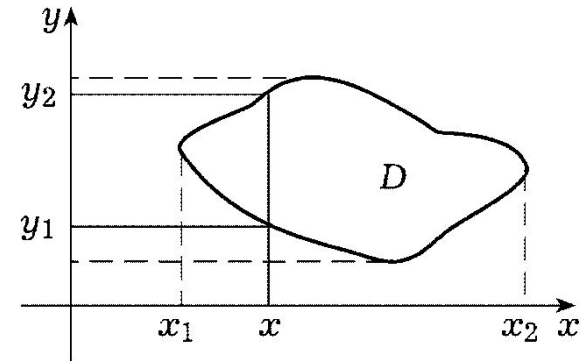
$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

При этих условиях существует повторный интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

и справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$



Примеры

1. Свести двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ к повторному двумя способами, если D — область, ограниченная кривыми $x = 1$, $y = x^2$, $y = 2x$ ($x \leq 1$).

2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy$$