

Лекция 3.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5. Квадрируемость гладких поверхностей.

Теорема. Гладкая ограниченная полная двусторонняя поверхность без особых точек квадрируема. Площадь поверхности может быть найдена по формуле

$$\sigma = \iint_{\Omega} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| du dv$$

$$\mathbf{r}_u^2 = E, \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = F, \mathbf{r}_v^2 = G$$

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

$$|[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]| = \sqrt{\mathbf{r}_u^2 \mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v)^2},$$

$$\sigma = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Лекция 3.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6. Существование поверхностных интегралов первого и второго родов и их вычисление.

Теорема. Пусть на поверхности Φ можно ввести единую параметризацию посредством функций

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),$$

заданных в ограниченной замкнутой области Ω плоскости uv и принадлежащих классу C_1 в этой области. Если функция $f(M) = f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности Φ , то поверхностный интеграл первого рода от этой функции по поверхности Φ существует и может быть вычислен по формуле

$$I = \iint_{\Phi} f(M) d\sigma = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Лекция 3.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теорема. Пусть на поверхности Φ можно ввести единую параметризацию посредством функций

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),$$

заданных в ограниченной замкнутой области Ω плоскости uv и принадлежащих классу C_1 в этой области. Если функция $f(M) = f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности Φ , то поверхностный интеграл второго рода от этой функции по поверхности Φ существует и может быть вычислен по формуле

$$\begin{aligned} & \iint_{\Phi} f(x, y, z) dydz + \iint_{\Phi} f(x, y, z) dzdx + \iint_{\Phi} f(x, y, z) dxdy = \\ & \iint_{\Phi} f(M) \cos \alpha dQ + \iint_{\Phi} f(M) \cos \beta dQ + \iint_{\Phi} f(M) \cos \gamma dQ = \\ & = (\pm) \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) dudv \\ & + (\pm) \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) dudv + (\pm) \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) dxdy \end{aligned}$$

Лекция 3.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Вычислите интеграл

$$\iint_{(\sigma)} z \, dx \, dy$$

по внешней стороне параболоида $9 - z = x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$ (Нормаль к поверхности образует острый угол с осью OZ)

2. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода по внешней боковой стороне цилиндра $y^2 + z^2 = 1$, лежащей в первом октанте и ограниченной плоскостями $x = 0,5$, $x = 1$, $y = 0,5$, причём $0,5 < x < 1$, $y > 0,5$.

Векторная функция $\mathbf{F} = xi + j/y - k$

Лекция 3.3.

5. Квадрируемость гладких поверхностей.

Теорема. Гладкая ограниченная полная двусторонняя поверхность без особых точек квадрируема. Площадь поверхности может быть найдена по формуле

$$\sigma = \iint_{\Omega} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| dudv$$

$$\mathbf{r}_u^2 = E, \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = F, \mathbf{r}_v^2 = G$$