Лекция 4. Поток.

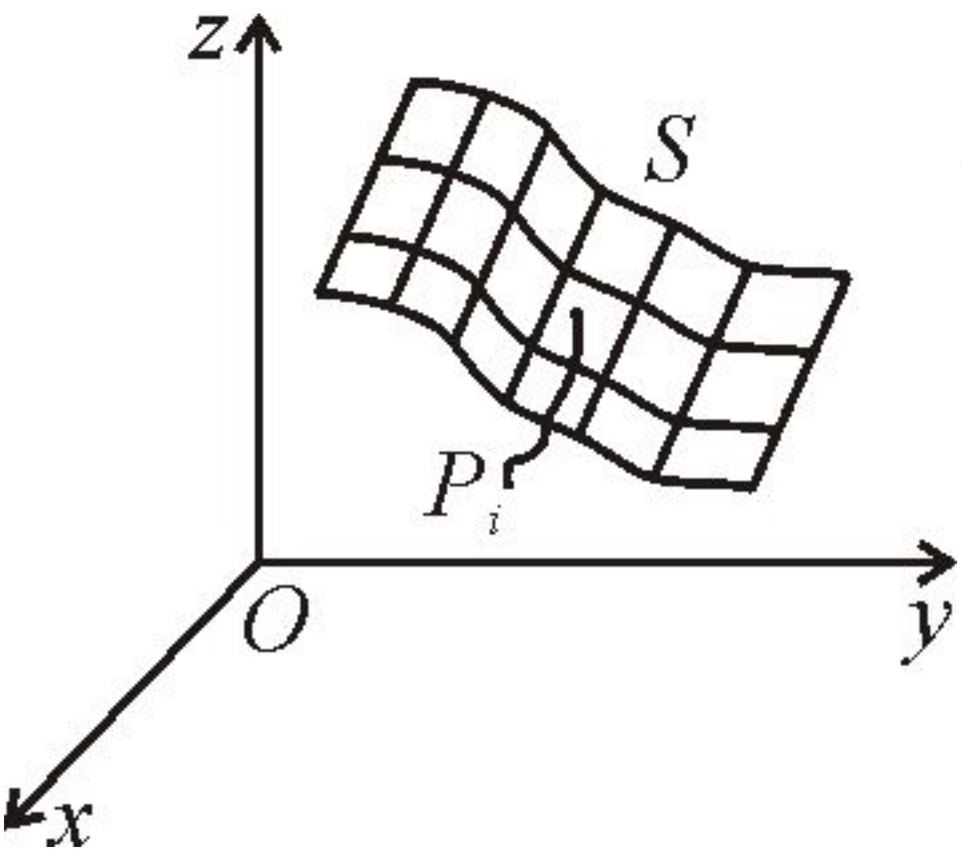
§ 1. Задача приводящая к понятию потока векторного поля.

Пусть в трехмерном пространстве имеется ориентируемая поверхность S и векторное поле, задаваемое формулой:

$$\vec{V} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Считаем, что векторное поле $\vec{V}$ в каждой точке векторного пространства задает поле скоростей жидкости. Попробуем найти количество жидкости, которое протекает через поверхность S в направлении нормали.

Для этого возьмем в трехмерном пространстве поверхность S и разобьем ее на маленькие кусочки $S_1, S_2, \ldots, S_n$ с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. В каждом из кусочков выберем точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$, в которых найдем значение



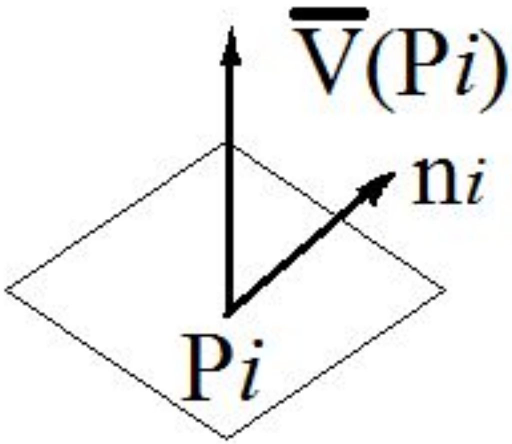
скорости жидкости:

$$\vec{V}(P_1), \vec{V}(P_2), \ldots, \vec{V}(P_n)$$

и нормали к поверхности S:

$$\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_n$$

Найдем количество жидкости, которое протекает через каждый участок S_i в единицу времени в направлении нормали.



$$(\vec{V}(P_i) \cdot \vec{n}_i) \cdot \Delta S_i$$

Численно это значение равно объему параллелепипеда, построенного на S_i как на основании с высотой

$$\left|\vec{V}_i\right| \cdot \cos\left(\vec{V}_i, \vec{n}_i\right)$$

Если сложить объемы всех маленьких параллелепипедов, то количество жидкости, протекающее через поверхность S, обозначаемое Q равно:

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n} (\vec{V}(P_i) \cdot \vec{n}_i) \cdot \Delta S_i$$

При таком приближенном вычислении количество жидкости зависит от способа разбиения и выбора точек P_i.

В физике величина не зависит. Считаем, если существует конечный предел

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\vec{V}(P_i) \cdot \vec{n}_i) \cdot \Delta S_i$$

то он и будет выражать значение количества жидкости, протекающей через поверхность S. Вспоминая, если предел существует, то он называется поверхностным интегралом 1-го рода.

$$Q = \iint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

Количество жидкости, протекающей через поверхность S равно поверхностному интегралу 1-го рода от скалярного произведения скорости на единичный вектор нормали к поверхности.

Для того, чтобы количественно описать векторы, электростатического, электромагнитного поля вводится понятие потока.

<u>Определение</u> (Потока).

Потоком векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ называется число, обозначаемое буквой *П* и вычисляемое как:

$$\Pi = \iint\limits_S (\vec{a} \cdot \vec{n})\,dS$$

Примечание: в случае жидкости поток равен количеству жидкости, протекающей через поверхность.

§ 2. Вычисление потока.

Если задано векторное поле $\vec{a}$,
$\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и задана поверхность S, нормаль к которой может быть вычислена:

$$\vec{n} = \pm \frac{gradU}{\left|gradU\right|}$$

то поток через эту поверхность S может быть вычислен по определению

$$\ddot{I} = \iint\limits_{S} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

При этом поверхность S должна быть однозначно проектируемой на одну из координатных плоскостей. В этом случае поверхностный интеграл по поверхности S сводится к интегралу по области проектирования поверхности S

Второй способ вычисления потока называется методом проектирования на координатные плоскости. Чтобы получить формулы, заметим, что нормаль к поверхности может быть представлена:

$$\vec{n} = \cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k}$$

где α, β, γ - углы которые составляет нормаль с координатными осями.

Тогда, в силу определения скалярного произведения, имеем:

$$(\vec{a} \cdot \vec{n}) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

Поток через поверхность S равен

$$\ddot{I} = \iint\limits_{S} \left[P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right] dS$$

Пользуясь аддитивностью интеграла

$$\ddot{I} = \iint\limits_{S} P\cos\alpha\, dS + \iint\limits_{S} Q\cos\beta\, dS + \iint\limits_{S} R\cos\gamma\, dS$$

Предполагая, что поверхность S однозначно проектируется на координатные плоскости имеем: $\ddot{I} = \iint\limits_S P dydz + \iint\limits_S Q dzdx + \iint\limits_S R dxdy$

Поверхностные интегралы 2 рода вычисляются с учетом области проектирования на координатную плоскость. Для вычисления потока методом проектирования на координатные плоскости имеем

$$\ddot{I} = \pm \iint\limits_{D_1} P(x(y,z),y,z)dydz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_2} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \iint\limits_{D_3} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

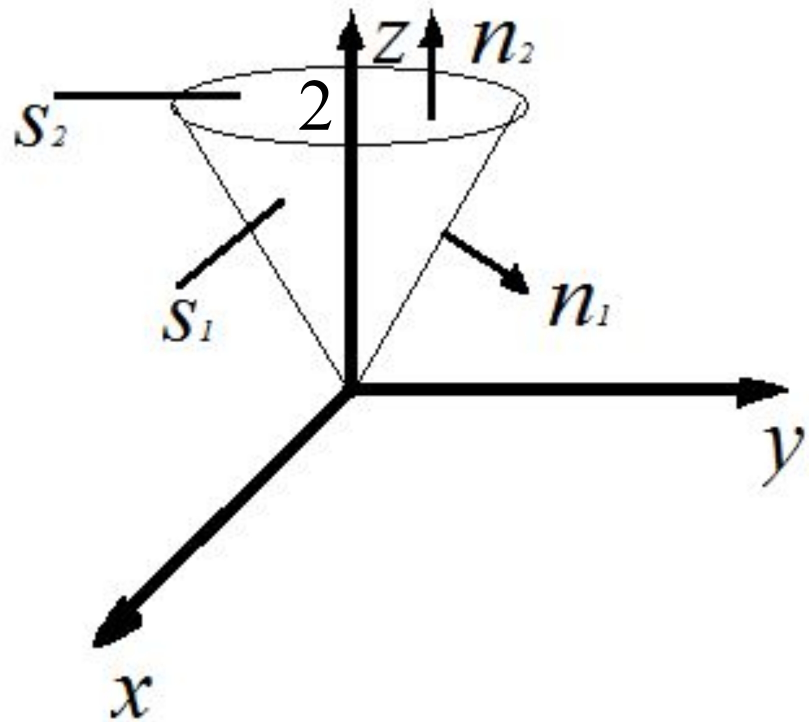
Знаки $\pm$ берутся с учетом того, какой угол составляет нормаль к поверхности для 1-го интеграла с осью x, для 2-го с осью y, для 3-го с осью z.

Замечание: В том случае если поток через замкнутую поверхность > 0, то внутри замкнутой поверхности есть источник. Если поток < 0 ,то внутри поверхности находится сток.

Если поток $= 0$, то говорят, что количество вещества втекающего в поверхность = кол-ву вещества вытекающего из нее.

Пример: пусть дано векторное поле

найти поток через внешнюю поверхность конуса



$$S:\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=2 \end{cases}$$

$$\vec{n}_2 \parallel z$$

$\vec{n}_1$ составляет тупой угол с осью z.

Поток через всю поверхность S: $\ddot{I}_{S} = \ddot{I}_{S_1} + \ddot{I}_{S_2}$

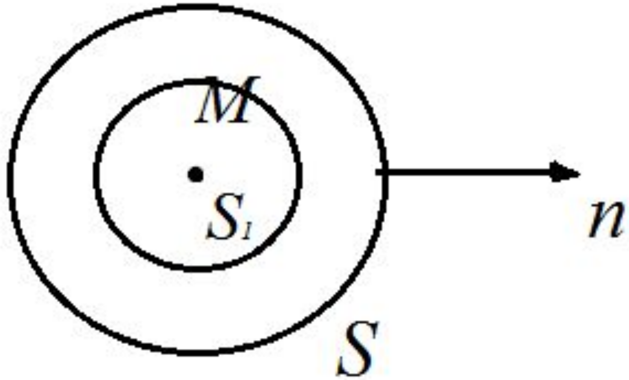
$$\ddot{I}_{S_2} = \iint\limits_{S_2} (\vec{a} \cdot \vec{n}_2)\, dS = \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{n}_2 = 1\vec{k} \end{array} \right\} = 0$$

§ 3. Дивергенция векторного поля, ее вычисление.

В векторном поле $\vec{a}$ возьмем замкнутую поверхность S с внешней нормалью $\vec{n}$. Можем получить характеристику поля, называемую потоком, воспользовавшись формулой:

$$\ddot{I} = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

Если взять поверхность S_1, то поток будет другим, чем через поверхность S, и понятие потока отражает количественную характеристику векторного поля при наличии некоторой поверхности, и зависит не только от векторного поля но и от поверхности.



В некоторых задачах необходимо знать характеристики векторного поля в каждой точке, независимо от выбора поверхности *S*. Если разделить поток на объем поверхности:

$$\frac{\ddot{I}_{S}}{V_{S}} = \frac{\iint_{s} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{V_{S}}$$

- средняя плотность потока через поверхность *S*.

Если поверхность S стягивать в точку и предполагать что существует предел такого отношения, то получим плотность потока в точке.

Эту характеристику по определению называют дивергенцией векторного поля.

Определение (дивергенции)

Если существует конечный предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность S к V, содержащемся внутри этой поверхности, при стягивании поверхности S в точку, этот предел называется дивергенцией векторного поля в точке и обозначается:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{S \to M} \frac{\iint\limits_{S} (\vec{a} \cdot \vec{n})\, dS}{V_s}$$

Физический смысл дивергенции - плотность потока векторного поля.

Если div > 0, то в точке - источник,

если < 0, то сток,

если = 0, то ничего не находится

<u>Теорема.</u> (о вычислении дивергенции)

Если в 3-х мерном пространстве задано векторное поле

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

где P, Q, R непрерывны вместе со своими производными

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$$

в некоторой области V, то в каждой точке этой области дивергенция может быть вычислена по формуле

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Доказательство:

По определению: $div\vec{a} = \lim\limits_{S \to M} \frac{\iint\limits_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{V_S}$

$$\iint\limits_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Так как поверхность S замкнутая, то применяя формулу Остроградского имеем:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right)$$

Значит, дивергенция поля может быть записана

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{S\to M} \frac{\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV}{V_s}$$

Частные производные непрерывны, значит к тройному интегралу применима теорема о среднем.

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{S\to M} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{M^*} \cdot V_S}{V_S}$$

Частные производные непрерывны, необходимо учитывать, что поверхность S стягивается в точку M, можно записать, что $M^* \to M$ и перейти к пределу под знаком непрерывной функции, после чего получим:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$$