

Лекция 4. Поток.

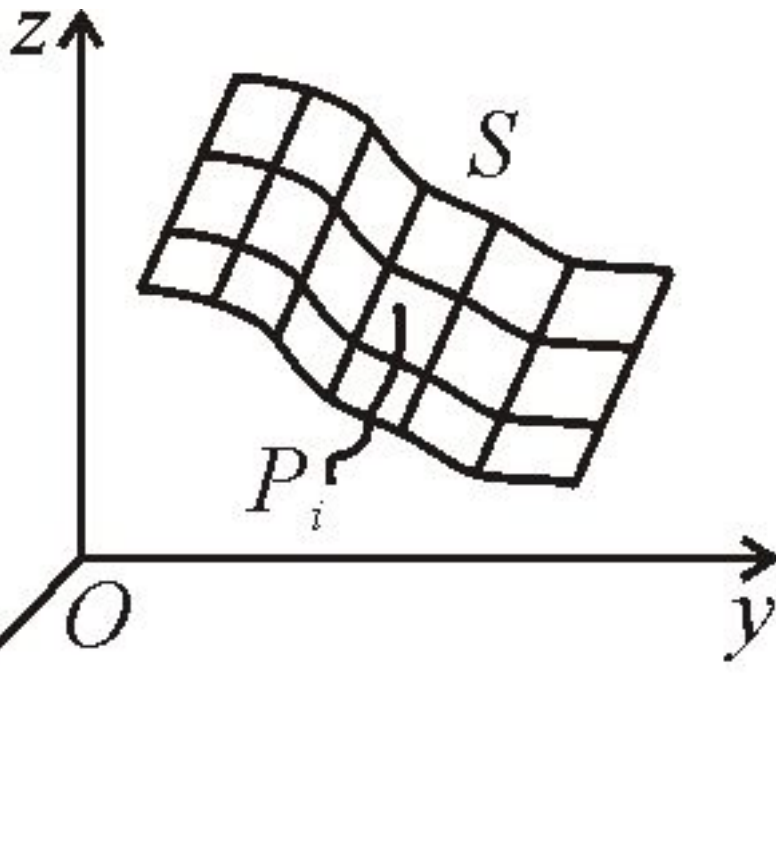
§ 1. Задача приводящая к понятию потока векторного поля.

Пусть в трехмерном пространстве имеется ориентируемая поверхность S и векторное поле, задаваемое формулой:

$$\vec{V} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Считаем, что векторное поле \vec{V} в каждой точке векторного пространства задает поле скоростей жидкости. Попробуем найти количество жидкости, которое протекает через поверхность S в направлении нормали.

Для этого возьмем в трехмерном пространстве поверхность S и разобьем ее на маленькие кусочки S_1, S_2, \dots, S_n с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. В каждом из кусочков выберем точки P_1, P_2, \dots, P_n , в которых найдем значение

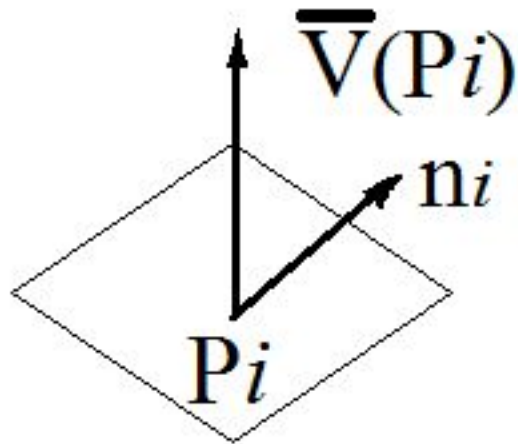


скорости жидкости:
 $\vec{v}(P_1), \vec{v}(P_2), \dots, \vec{v}(P_n)$

и нормали к
 поверхности S :

$\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_n$

Найдем количество жидкости, которое протекает через каждый участок S_i в единицу времени в направлении нормали.



$$(\overline{V}(P_i) \cdot \mathbf{n}_i) \cdot \Delta S_i$$

Численно это значение равно объему параллелепипеда, построенного на S_i как на основании с высотой

$$|\overline{V}_i| \cdot \cos(\overline{V}_i, \mathbf{n}_i)$$

Если сложить объемы всех маленьких параллелепипедов, то количество жидкости, протекающее через поверхность S , обозначаемое Q равно:

$$Q \approx \sum_{i=1}^n (V(P_i) \cdot n_i) \cdot \Delta S_i$$

При таком приближенном вычислении количество жидкости зависит от способа разбиения и выбора точек P_i .

В физике величина не зависит. Считаем, если существует конечный предел

$$\lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (V(P_i) \cdot n_i) \cdot \Delta S_i$$

то он и будет выражать значение количества жидкости, протекающей через поверхность S . Вспоминая, если предел существует, то он называется поверхностным интегралом 1-го рода.

$$Q = \iint_S (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS$$

Количество жидкости, протекающей через поверхность S равно поверхностному интегралу 1-го рода от скалярного произведения скорости на единичный вектор нормали к поверхности.

Для того, чтобы количественно описать векторы, электростатического, электромагнитного поля вводится понятие потока.

Определение (Потока).

Потоком векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ называется число, обозначаемое буквой Π и вычисляемое как:

$$\dot{I} = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

Примечание: в случае жидкости поток равен количеству жидкости, протекающей через поверхность.

§ 2. Вычисление потока.

Если задано векторное поле \vec{a} ,
 $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и задана поверхность S ,
нормаль к которой может быть вычислена:

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad}U}{|\text{grad}U|}$$

то поток через эту поверхность S может быть вычислен по определению

$$\dot{I} = \iint_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS$$

При этом поверхность S должна быть однозначно проектируемой на одну из координатных плоскостей. В этом случае поверхностный интеграл по поверхности S сводится к интегралу по области проектирования поверхности S

Второй способ вычисления потока называется методом проектирования на координатные плоскости. Чтобы получить формулы, заметим, что нормаль к поверхности может быть представлена:

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

где α, β, γ - углы которые составляет нормаль с координатными осями.

Тогда, в силу определения скалярного произведения, имеем:

$$(\vec{a} \cdot \vec{n}) = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$$

Поток через поверхность S равен

$$\dot{I} = \iint_S [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] dS$$

Пользуясь аддитивностью интеграла

$$\dot{I} = \iint_S P \cos \alpha dS + \iint_S Q \cos \beta dS + \iint_S R \cos \gamma dS$$

Предполагая, что поверхность S однозначно проектируется на координатные плоскости

имеем:
$$\dot{I} = \iint_S P dydz + \iint_S Q dzdx + \iint_S R dxdy$$

Поверхностные интегралы 2 рода вычисляются с учетом области проектирования на координатную плоскость. Для вычисления потока методом проектирования на координатные плоскости имеем

$$\dot{I} = \pm \iint_{D_1} P(x(y, z), y, z) dydz \pm$$

$$\pm \iint_{D_2} Q(x, y(x, z), z) dx dz \pm \iint_{D_3} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

Знаки \pm берутся с учетом того, какой угол составляет нормаль к поверхности для 1-го интеграла с осью x , для 2-го с осью y , для 3-го с осью z .

Замечание: В том случае если поток через замкнутую поверхность > 0 , то внутри замкнутой поверхности есть источник. Если поток < 0 , то внутри поверхности находится сток.

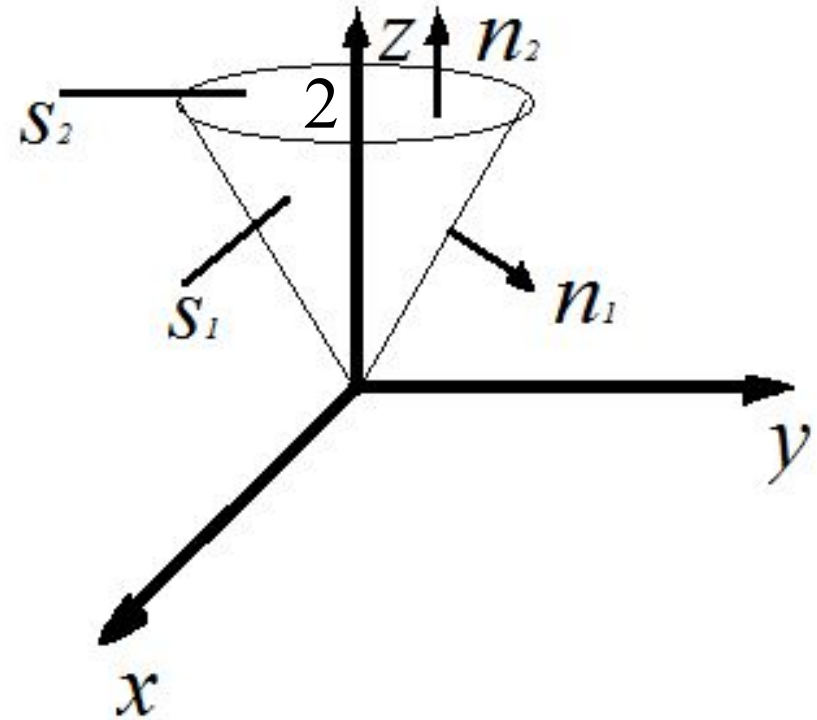
Если поток $= 0$, то говорят, что количество вещества втекающего в поверхность $=$ количеству вещества вытекающего из нее.

Пример: пусть дано векторное поле
 найти поток через внешнюю
 поверхность конуса

$$S: \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\underline{n}_2 \parallel z$$

\underline{n}_1 составляет тупой угол с осью z .



Поток через всю поверхность S : $\ddot{I}_S = \ddot{I}_{S_1} + \ddot{I}_{S_2}$

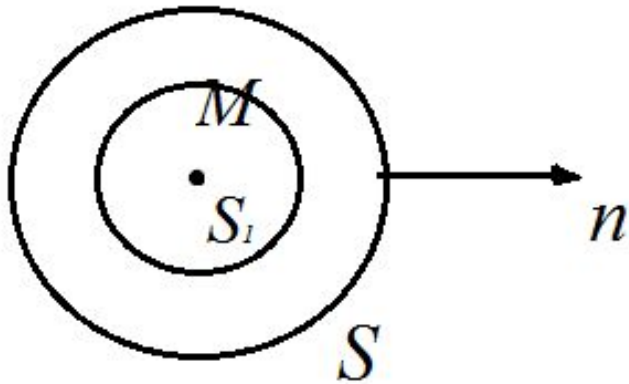
$$\ddot{I}_{S_2} = \iint_{S_2} (\underline{a} \cdot \underline{n}_2) dS = \left\{ \begin{array}{l} \underline{a} = x\underline{i} + y\underline{j} \\ \underline{n}_2 = 1\underline{k} \end{array} \right\} = 0$$

§ 3. Дивергенция векторного поля, ее вычисление.

В векторном поле \vec{a} возьмем замкнутую поверхность S с внешней нормалью \vec{n} . Можем получить характеристику поля, называемую потоком, воспользовавшись формулой:

$$I = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

Если взять поверхность S_1 , то поток будет другим, чем через поверхность S , и понятие потока отражает количественную характеристику векторного поля при наличии некоторой поверхности, и зависит не только от векторного поля но и от поверхности.



В некоторых задачах необходимо знать характеристики векторного поля в каждой точке, независимо от выбора поверхности S . Если разделить поток на объем поверхности:

$$\frac{\dot{I}_S}{V_S} = \frac{\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{V_S}$$

- средняя плотность потока через поверхность S .

Если поверхность S стягивать в точку и предполагать что существует предел такого отношения, то получим плотность потока в точке.

Эту характеристику по определению называют дивергенцией векторного поля.

Определение (дивергенции)

Если существует конечный предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность S к V ,

содержащемся внутри этой поверхности, при стягивании поверхности S в точку, этот предел называется дивергенцией векторного поля в точке и обозначается:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{V_S}$$

Физический смысл дивергенции - плотность потока векторного поля.

Если $\operatorname{div} > 0$, то в точке - источник,

если < 0 , то сток,

если $= 0$, то ничего не находится

Теорема. (о вычислении дивергенции)

Если в 3-х мерном пространстве задано

векторное поле

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

где P, Q, R непрерывны вместе со своими производными

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$$

в некоторой области V , то в каждой точке этой области дивергенция может быть вычислена по формуле

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Доказательство:

По определению: $\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{V_S}$

$$\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy$$

Так как поверхность S замкнутая, то применяя формулу Остроградского имеем:

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

Значит, дивергенция поля может быть записана

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV}{V_S}$$

Частные производные непрерывны, значит к тройному интегралу применима теорема о среднем.

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M^*} \cdot V_S}{V_S}$$

Частные производные непрерывны, необходимо учитывать, что поверхность S стягивается в точку M , можно записать, что $M^* \rightarrow M$ и перейти к пределу под знаком непрерывной функции, после чего получим:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$$