Лекция 5. Производная и дифференциал

5-1 Определение производной

5-2 Нахождение производных

5-3 Производные элементарных функций

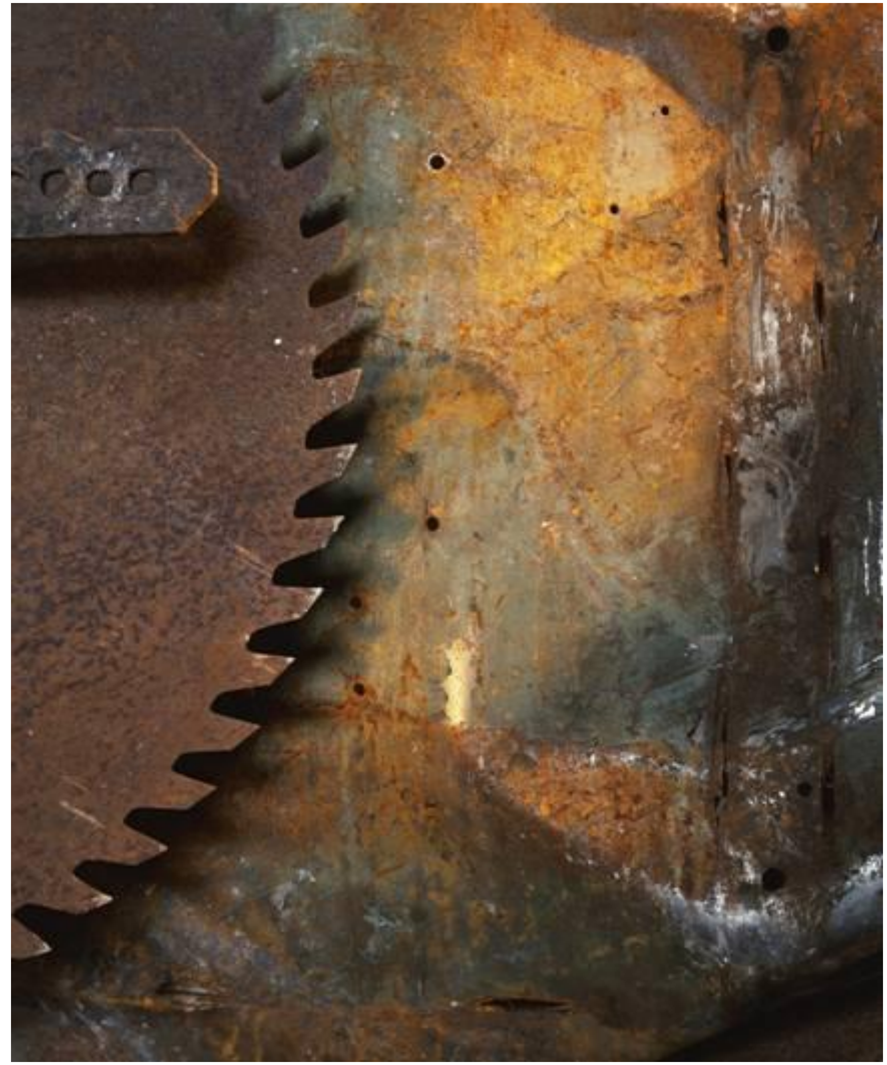
5-4 Дифференциал функции

26 октября 2019 г.

Эпиграф

Какой знак имеет производная от настроения по расстоянию до кресла зубного врача?

П.В.Грес



5-1.
Производная

Определение

Геометрический смысл

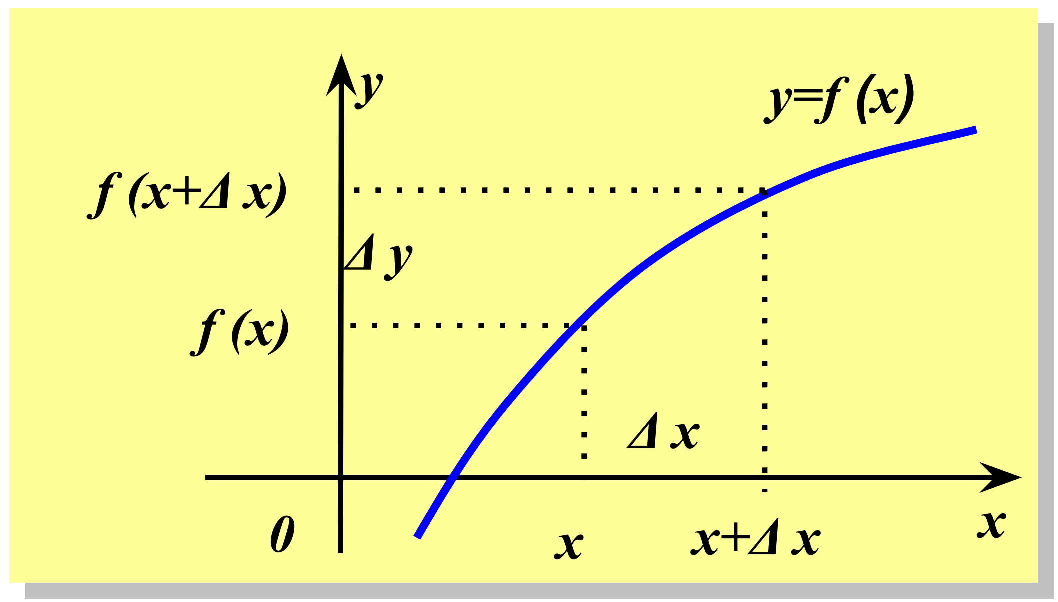
Механический смысл

26 октября 2019 г.

Определение производной

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Лагранж Жозеф Луи

Лагранж Жозеф Луи (1736-1813) – французский математик и механик, член Берлинской и Парижской Академии наук. Самостоятельной изучал математику, в 23 года стал академиком. Сделал массу открытий. Парижская АН пять раз присуждала ему премии. В математике и механике его именем названы несколько методов, формул и теорем. Термин «производная» введен Лагранжем на рубеже 18-19 веков. Производная – произведенная, полученная по определенным правилам из данной функции.

Дифференцируемая функция

Нахождение производной называется **дифференцированием** этой функции.

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функцию называют **дифференцируемой в этой точке**.

Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X, называется **дифференцируемой на этом промежутке**.

Четыре обозначения для производной

y' Лагранжа (читается «игрек штрих»)

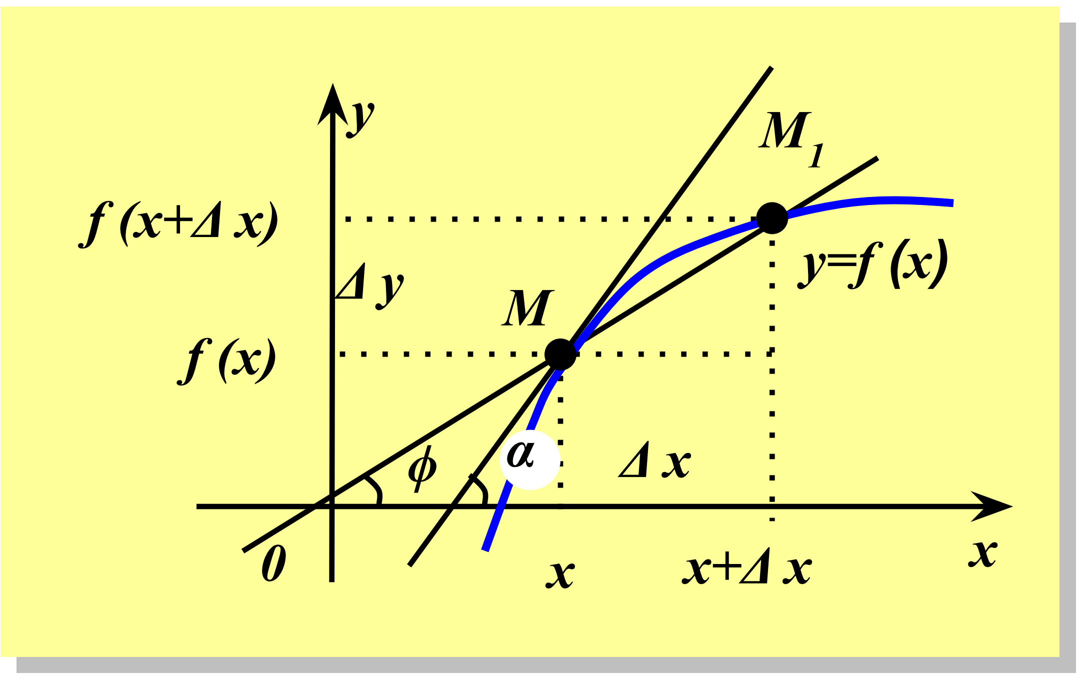
$\dfrac{dy}{dx}$ Лейбница (читается «дэ игрек по дэ икс»)

$\dot{y}$ Ньютона (читается «игрек с точкой»)

Dy Коши (читается «дэ игрек»)

Геометрический смысл производной

Для функции $y = f(x)$ ее производная $y' = f'(x)$ в точке x_0 есть **угловой коэффициент** (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к графику функции в точке x_0.



$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$$

При Δx→0 точка M_1 переходит в точку M и секущая MM_1 становится касательной к кривой f(x) в точке M.

Механический смысл производной

Для функции $y = f(x)$, меняющейся со временем x, производная $y' = f'(x)$ есть скорость изменения y в момент x_0.

Пройденный путь s зависит от времени t: $s = s(t)$.

Скорость:
$$s'_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \mathrm{v}(t)$$

Ускорение:
$$\mathrm{v}'_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \mathrm{w}(t)$$

Лейбниц Готфрид Вильгельм

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716) – немецкий философ, математик, физик, изобретатель, юрист, историк, экономист, дипломат, языковед, член Лондонского королевского общества и Парижской Академии наук, основатель Берлинской Академии наук.

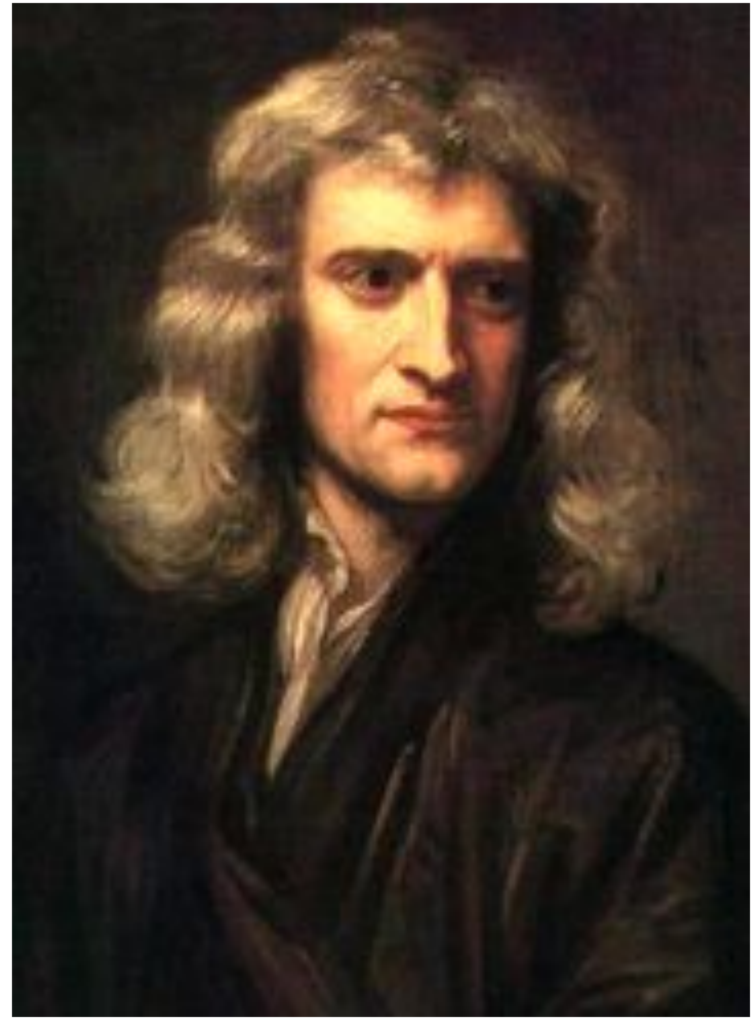
В 18 лет защитил магистерскую диссертацию по философии, в 20 лет стал доктором права.

Является одним из создателей математического анализа, алгебры определителей, дифференциального и интегрального исчислений.

Ньютон Исаак

Ньютон Исаак (1643-1727) – английский физик и математик, член Лондонского королевского общества (с 1672) и его президент (с 1703).

Им начато построение математического анализа на основе учения о пределе, подготовлены основы для дифференциального и интегрального исчисления. В физике обосновал справедливость закона всемирного тяготения, законы движения, теорию света и др.



Непрерывность и дифференцируемость

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке x∈Df, то в этой точке функция непрерывна.

Доказательство. Если существует производная, тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)=y'\cdot 0=0$$

Это означает, что функция в этой точке непрерывна. Обратное утверждение **неверно**.

□

5-2. Нахождение производных

Схема нахождения производной

Правила дифференцирования

Производная сложной и обратной функций

Производная неявной функции

26 октября 2019 г.

Нахождение производной по определению

1. Для фиксированного значения x аргумента функции находится исходное значение функции $y = f(x)$.
2. Аргументу x дается приращение Δx и находится новое значение функции $f(x + \Delta x)$.
3. Вычисляется приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Находится предел отношения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$$

Производная постоянной

Функция: $y = C$

1. Для фиксированного значения x аргумента функции находим исходное значение функции $y = f(x) = C$.

2. Аргументу x даем приращение Δx и находим новое значение функции $f(x + \Delta x) = C$.

3. Вычисляем приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0.$$

4. Находим предел отношения:

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Производная x^2

Функция: $y = x^2$

1. Для фиксированного значения x аргумента функции находим исходное значение функции $y = f(x) = x^2$.

2. Аргументу x даем приращение Δx и находим новое значение функции $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$.

3. Вычисляем приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2.$$

4. Находим предел отношения:

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x = 2x$$

Производная суммы

Производная суммы двух дифференцируемых функций равна сумме производных:

$$(u+v)' = u' + v'$$

Доказательство.

$$(u(x)+v(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-(u(x)+v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x)+v'(x)$$

□

Производная произведения

Производная произведения двух дифференцируемых функций находится по формуле:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Доказательство.

$$(u(x)\cdot v(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) = uv' + vu' + u'\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v =$$

$$= u'v + uv' \qquad \square$$

Производная частного

Производная частного двух дифференцируемых функций находится по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Доказательство. Самостоятельно.

Производная сложной функции

Если y есть дифференцируемая функция от u, а u есть дифференцируемая функция от x, то производная сложной функции существует и равна производной внешней функции, умноженной на производную внутренней функции:

$$y'_x = y'_u(u) \cdot u'_x(x)$$

Доказательство.

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta u \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u u'_x$$

□

Производная обратной функции

Производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Здесь $y = f(x)$ и $x = g(y)$ – две взаимно-обратные дифференцируемые функции, $y'_x \neq 0$.

Доказательство.

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

□

Производная неявной функции

Если $F(x, y) = 0$, не разрешенное относительно y, определяет y как однозначную функцию x, то y называют **неявной функцией (implicit function)** от x.

Чтобы найти производную y' этой неявной функции, нужно уравнение продифференцировать по x, считая y как функцию от x. Из полученного уравнения выразить y'.

Пример.

$$x^2 + y^2 - xy = 0$$

$$2x + 2yy' - (y + xy') = 0$$

Ответ.

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

Производные высших порядков

Функция $f'(x)$ есть производная первого порядка функции $f(x)$.
Ее производная есть производная второго порядка:

$$(f'(x))' = f''(x)$$

Производная n –го порядка обозначается $f^{(n)}(x)$ и находится как производная от функции $f^{(n-1)}(x)$.

5-3. Производные элементарных функций

Производные логарифмической функции
Производная показательной функции
Производная степенной функции
Производные тригонометрических функций
Таблица производных

26 октября 2019 г.

Производная логарифмической функции

Функция: $$y = \ln x$$

Производная: $$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Доказательство.

1. Для фиксированного значения x аргумента функции находим исходное значение функции:

$$f(x) = \ln x$$

2. Аргументу x даем приращение Δx и находим новое значение функции:

$$f(x + \Delta x) = \ln(x + \Delta x)$$

Производная логарифмической функции

3. Вычисляем приращение функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \ln(x+\Delta x) - \ln(x) =$$

$$= \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

4. Находим предел отношения:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

Производная логарифмической функции

Функция: $$y = \log_a x$$

Производная: $$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Доказательство: самостоятельно

Производная показательной функции

Функция: $y = e^x$

Производная: $y' = (e^x)' = e^x$

Доказательство.

Обратная функция: $x = \ln y$

Находим, как производную обратной функции: $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$

$$y'_x = (e^x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\ln y)'_y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y = e^x$$

Производная показательной функции

Функция: $$y = a^x$$

Производная: $$y' = (a^x)' = a^x \ln a$$

Доказательство. Самостоятельно.

Производная степенной функции

Функция: $$y = x^n$$

Производная: $$y = n \cdot x^{n-1}$$

Доказательство.

Логарифмируем обе части равенства $$\ln y = n \ln x$$

Дифференцируем:

$$\frac{1}{y} y' = n \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y \cdot n \cdot \frac{1}{x} = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} = n \cdot x^{n-1}$$

Производные тригонометрических функций

Функция: $y = \sin x$

Производная: $y' = \cos x$

Доказательство.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

Производные тригонометрических функций

Функция: $y = \cos x$

Производная: $y' = -\sin x$

Функция: $y = tg\, x$

Производная: $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Доказательство. Самостоятельно.

Таблица производных

Функция	Производная
$y = C$	$y' = 0$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$

И так далее…

5-4. Дифференциал

Определение

Геометрический смысл

Свойства

Приращение функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in$ X. Тогда существует конечная производная:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

На основании теоремы о связи предела и б.м. можно записать:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Дифференциал

Дифференциал функции (differential) есть главная (линейная) часть приращения функции, равная произведению производной на приращение аргумента:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Или

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

Если x – независимая переменная, то Δ*x* = *dx*

$$\Delta y = \overbrace{f'(x) \cdot \Delta x}^{\text{Дифференциал}} + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Пример нахождения дифференциала

Найти дифференциал для функции:

$$y = 3x^2 - 4x$$

Решение.

Находим производную:

$$y' = 6x - 4$$

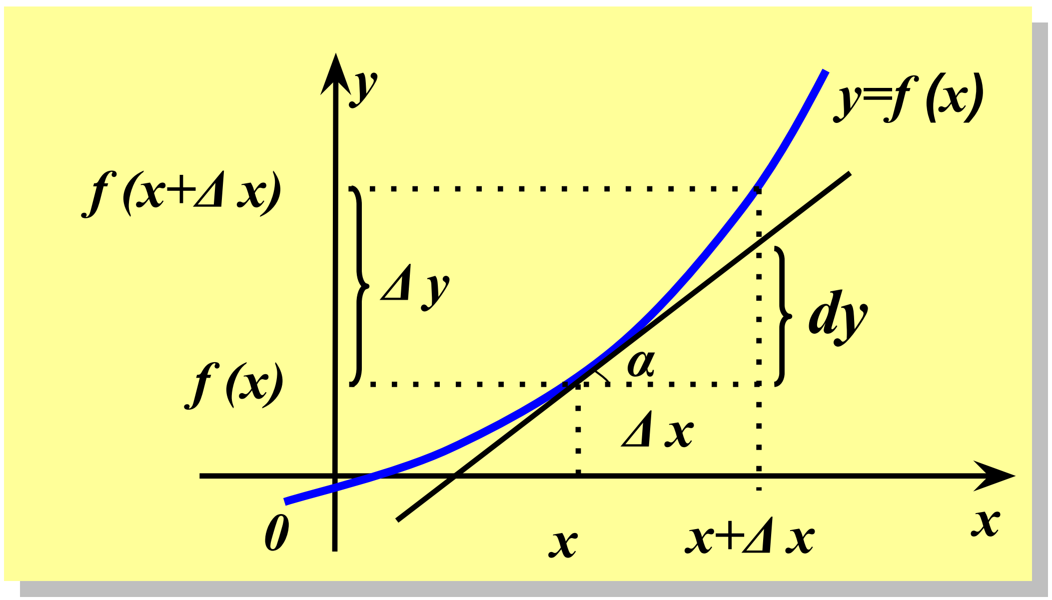
А затем дифференциал:

$$dy = y'dx = (6x - 4)dx$$

Геометрический смысл

Геометрически дифференциал есть приращение функции до касательной.

$$dy = y'dx = tg\alpha \cdot \Delta x$$



Свойства

1. Дифференциал постоянной: $dC = 0$

2. Дифференциал суммы: $d(u+v) = du + dv$

3. Дифференциал произведения: $d(uv) = u'dv + v'du$

4. Дифференциал частного: $$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'dv - v'du}{v^2}$$

Свойства дифференциала связаны со свойствами производной.

Дифференциал истории

Л. Н. Толстой
«Война и мир»

Обещанное продолжение …

Движение человечества, вытекая из бесчисленного количества людских произволов, совершается непрерывно.

Постижение законов этого движения есть цель истории. Но для того, чтобы постигнуть законы непрерывного движения суммы всех произволов людей, ум человеческий допускает произвольные, прерывные единицы. Первый прием истории состоит в том, чтобы, взяв произвольный ряд непрерывных событий, рассматривать его отдельно от других, тогда как нет и не может быть начала никакого события, а всегда одно событие непрерывно вытекает из другого. Второй прием состоит в том, чтобы рассматривать действие одного человека, царя, полководца, как сумму произволов людей, тогда как сумма произволов людских никогда не выражается в деятельности одного исторического лица.

Историческая наука в движении своем постоянно принимает все меньшие и меньшие единицы для рассмотрения и этим путем стремится приблизиться к истине.

Дифференциал истории

Л. Н. Толстой
«Война и мир»

Продолжение …

Но как ни мелки единицы, которые принимает история, мы чувствуем, что допущение единицы, отделенной от другой, допущение *начала* какого-нибудь явления и допущение того, что произволы всех людей выражаются в действиях одного исторического лица, ложны сами в себе.

Всякий вывод истории, без малейшего усилия со стороны критики, распадается, как прах, ничего не оставляя за собой, только вследствие того, что критика избирает за предмет наблюдения большую или меньшую прерывную единицу; на что она всегда имеет право, так как взятая историческая единица всегда произвольна.

Только допустив бесконечно-малую единицу для наблюдения - дифференциал истории, то есть однородные влечения людей, и достигнув искусства интегрировать (брать суммы этих бесконечно-малых), мы можем надеяться на постигновение законов истории.