

Лекция 5

Непрерывные функции одной и двух переменных.

Литература.

В.Г. Зубков, В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев.
Курс математики для технических высших учебных заведений
Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А.
Пушкаря. 2012г. Лекция 9.

В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев.
Курс математики для технических высших учебных заведений
Учебное пособие часть II Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А.
Пушкаря. 2012г. Лекция 38 .

Непрерывные функции, действия над непрерывными функциями,
точки разрыва и их классификация, свойства функций,
непрерывных на сегменте.

Предел функции двух переменных. Точки и линии разрыва.
Функции непрерывные в ограниченной замкнутой области.

9.1. Непрерывные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если:

- функция определена в точке x_0 и в некоторой её окрестности, содержащей эту точку;
- функция имеет предел при $x \rightarrow x_0$;
- предел функции при $x \rightarrow x_0$ равен значению функции в точке x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (9.1)$$

Если в точке x_0 функция непрерывна, то точка x_0 называется точкой непрерывности функции.

Решение: Чтобы доказать, что функция $y = e^x$ непрерывна в точке $x = 1$, необходимо проверить выполнение трёх следующих условий (определение непрерывности):

- функция $y = e^x$ определена в точке $x = 1 \Rightarrow f(1) = e$;
- существует $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^x = e$;
- этот предел равен значению функции в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = e.$$

Таким образом, доказано, что функция $y = e^x$ непрерывна в точке $x = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Формулу (9.1) можно записать в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right), \quad (9.2)$$

так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$. Это значит, что при нахождении предела непрерывной функции можно переходить к пределу под знаком функции.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (9.1)$$

Введем понятие непрерывности функции в точке x_0 справа и слева. Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной в точке x_0 слева. Аналогично определяется непрерывность функции справа.

Так как $\Delta x = x - x_0$, а $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, то условие (9.1) равносильно следующему:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x - x_0 \rightarrow 0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \tag{9.3}$$

ПРИМЕР 9.2. *Показать, что функция $y = x^3$ непрерывна для любого значения аргумента x .*

Решение: Найдем приращение функции Δy .

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Используя теоремы о пределе суммы и произведения функции, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3) = 0.$$

Следовательно, функция $y = x^3$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$.

9.2. Действия над непрерывными функциями

ТЕОРЕМА 9.1. *(Непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций.)* Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их сумма и произведение также непрерывны в точке x_0 . Если, кроме того, знаменатель в рассматриваемой точке не равен нулю, то частное непрерывных функций есть функция непрерывная.

Можно строго доказать, что все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x , для которых они определены.

Например, степенная $y = x^n$, показательная $y = a^x$, тригонометрические $y = \sin x$ и $y = \cos x$ функции непрерывны на всей числовой оси ($x \in R$), логарифмическая функция $y = \log_a x$ непрерывна при $x > 0$, а тригонометрическая $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна в каждом из интервалов $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$ и терпит разрыв II рода в точках $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$).

ТЕОРЕМА 9.2. *(Непрерывность сложной функции.)* Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 .

Отсюда следует, что элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены. И, следовательно, при исследовании на непрерывность элементарных функций, необходимо исследовать поведение функции лишь в окрестности точек, в которых они неопределены.

В заключение этого раздела рассмотрим два предела, которые нам понадобятся в дальнейшем.

ПРИМЕР 9.3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$.

Решение: Заметим, что при $x \rightarrow 0$ числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю, т.е. имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Выполним преобразование

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \log_a(1+x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a \left(1+x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Так как данная логарифмическая функция непрерывна в окрестности точки $x = 0$, то можно перейти к пределу под знаком функции

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) \right). \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a \left(1+x \right)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(1+x \right)^{\frac{1}{x}} \right],$$

но $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1+x \right)^{\frac{1}{x}} = e$ – второй замечательный предел.

$$\text{Следовательно, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e. \quad (9.4)$$

$$\text{В частности, при } a = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1. \quad (9.5)$$

Таким образом, $y = \ln(1+x)$ и $y = x$ – эквивалентные бесконечно малые функции при $x \rightarrow 0$. (9.5) принято называть третьим замечательным пределом.

ПРИМЕР 9.4. *Найти* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$.

Решение: Здесь мы имеем дело с неопределённостью вида $\frac{0}{0}$.

Для нахождения предела сделаем замену переменной, положив $a^x - 1 = t$.

Тогда $x = \log_a(t + 1)$. При $x \rightarrow 0$ также и $t \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_a(t + 1)}{t}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(t + 1)}{t}}.$$

Так как на основании результата, полученного в предыдущем примере,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + t)}{t} = \log_a e, \text{ то } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a. \quad (9.6)$$

В частности, если $a = e$, имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$,

т.е. $y = e^x - 1$ и $y = x$ — эквивалентные бесконечно малые функции при $x \rightarrow 0$.

9.3. Точки разрыва функции и их классификация

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$, если она принадлежит области определения функции или её границе и не является точкой непрерывности.

Так, например, функция $y = \frac{1}{(1-x)^2}$ (рис. 88) терпит разрыв при $x = 1$. Эта функция не определена в точке $x = 1$, и не существует предела функции в этой точке.

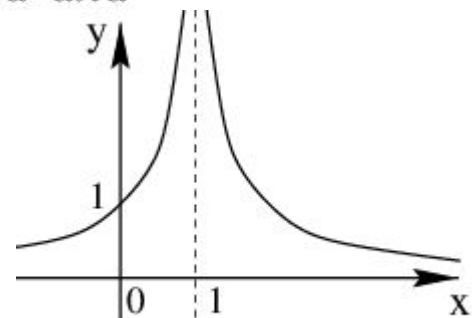


Рис. 88.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.4. Точка разрыва x_0 функции $y = f(x)$ называется точкой устранимого разрыва, если существуют оба односторонних предела в точке x_0 и они равны, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A.$$

ПРИМЕР 9.5. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{\sin x}{x}$

Решение: Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва, так как при $x \rightarrow 0$ существуют пределы справа и слева и они равны:

$$\lim_{x \rightarrow 0 + 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0 - 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если доопределить функцию $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$, полагая $f(0) = 1$, то получим уже непрерывную функцию, определённую так:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ если } x \neq 0; f(0) = 1.$$

Доопределив функцию в точке $x = 0$, мы устранили разрыв.

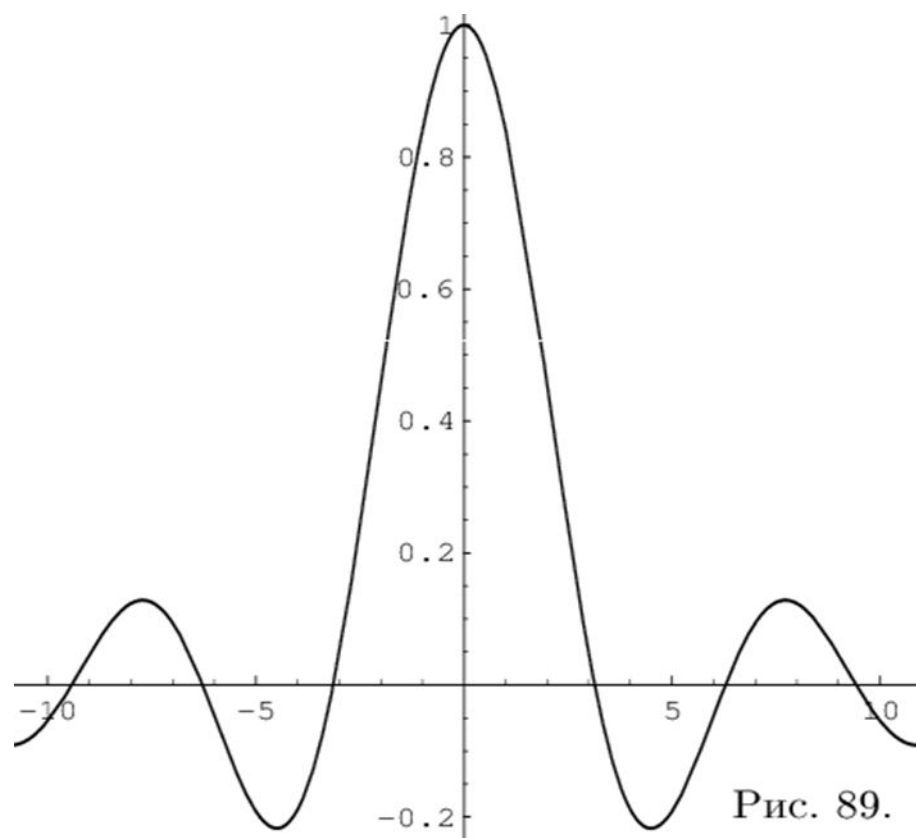


Рис. 89.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.5. Если в точке x_0 односторонние пределы слева и справа существуют, но не равны, точка x_0 называется точкой разрыва I рода.

ПРИМЕР 9.6. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{\sin x}{|x|}$

Решение:

В точке $x = 0$ функция терпит разрыв I-го рода, так как односторонние пределы существуют в этой точке, но не равны:

$$\text{предел слева } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{-x} = -1,$$

$$\text{предел справа } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

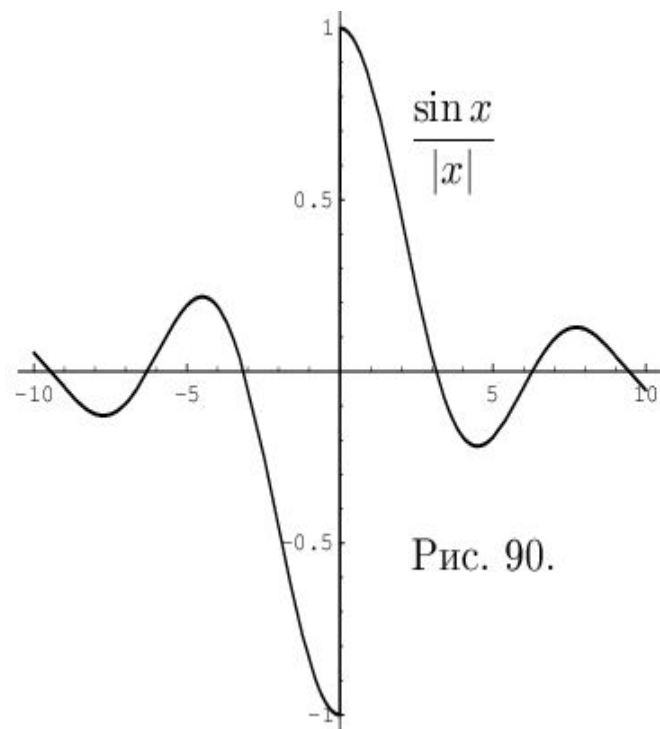


Рис. 90.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.6. Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются точками разрыва II рода.

В точках разрыва II рода не существует хотя бы один из односторонних пределов. Функция $y = \frac{1}{(1-x)^2}$, представленная на рис. 88, не имеет ни левого, ни правого конечного предела в точке $x = 1$. Следовательно, для данной функции $x = 1$ является точкой разрыва II рода.

ПРИМЕР 9.7. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin \frac{1}{x}$.

Решение:

Функция $y = \sin \frac{1}{x}$ определена для всех значений x , кроме $x = 0$. В этой точке она имеет разрыв. Точка $x = 0$ есть точка разрыва II рода, так как при $x \rightarrow 0$ как справа, так и слева, функция $\sin \frac{1}{x}$, колеблясь между -1 и 1 , не приближается ни к какому числовому значению. График её приведен на рис. 91.

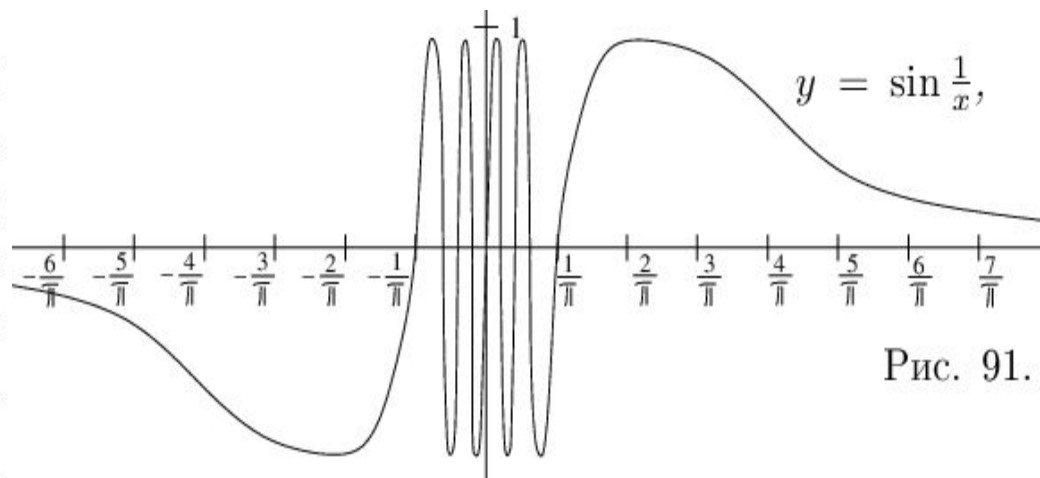


Рис. 91.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.7. Функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках этого сегмента, а на концах сегмента (в точках a и b) непрерывна соответственно справа и слева.

ТЕОРЕМА 9.3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она достигает на этом сегменте своего наибольшего и(или) наименьшего значения.

Простым доказательством этой теоремы является геометрическая иллюстрация функции $y = f(x)$ на рисунке 92. Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция достигает наименьшего своего значения в точке $x = x_1 = a$, а наибольшего значения в точке x_2 .

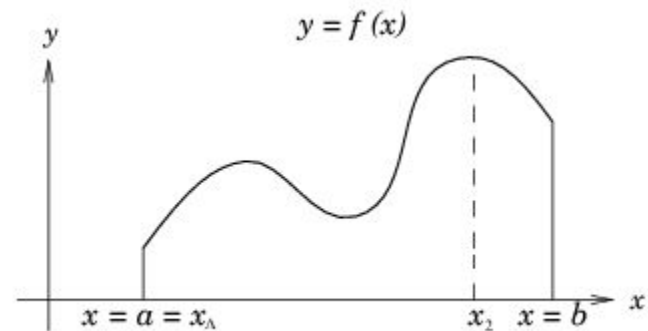


Рис. 92.

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте.

Действительно, если по теореме 9.3 функция достигает на сегменте наибольшего M и наименьшего m значений, то имеет место неравенство $m \leq f(x) \leq M$ для всех значений функции на рассматриваемом сегменте. Т. е. $|f(x)| \leq M$ и, следовательно, функция $y = f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 9.4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и на её концах принимает значения разных знаков, то внутри этого сегмента найдется, по крайней мере, одна точка C , в которой функция равна нулю.

Геометрический смысл теоремы заключается в следующем: если точки графика функции $y = f(x)$, соответствующие концам сегмента $[a, b]$, лежат по разные стороны от оси OX , то этот график хотя бы в одной точке сегмента пересекает ось OX . На данном рисунке 93 это три точки x_1, x_2, x_3 .

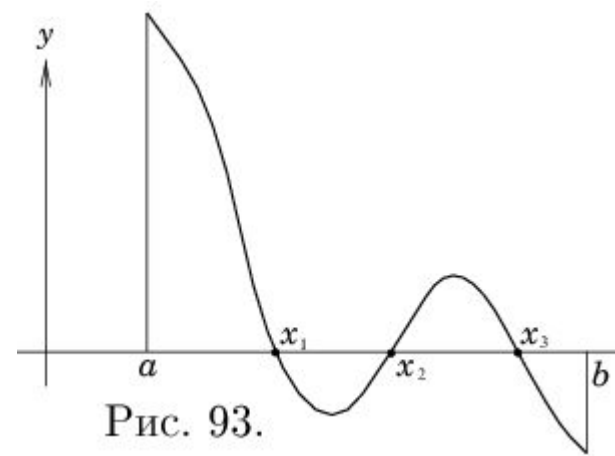


Рис. 93.

ТЕОРЕМА 9.5. (О промежуточных значениях функции.) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то

Из графика на рисунке 94 видно, что непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения.

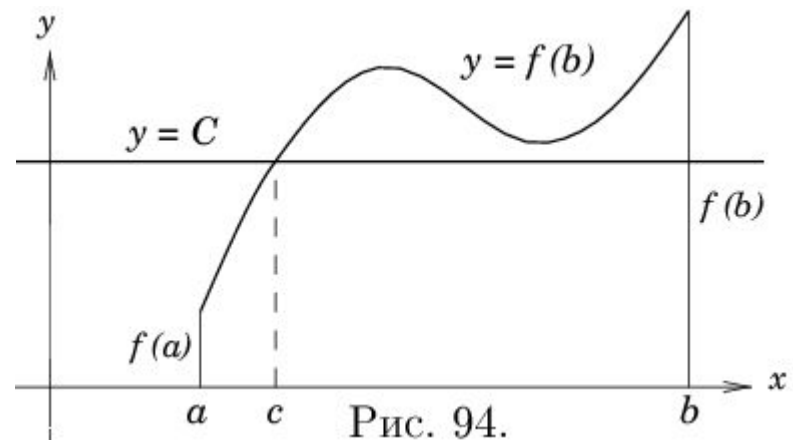


Рис. 94.

ТЕОРЕМА 9.6. (О непрерывности обратной функции.) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и возрастает (убывает) на этом сегменте, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ на соответствующем сегменте оси OY существует и является также непрерывной возрастающей (убывающей) функцией.

Примеры из практического занятия 9

Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{1 + x^3}{1 + x}$.

Решение: В точке $x = -1$ функция не определена, так как, выполнив подстановку, получаем неопределенность $\frac{0}{0}$. В других точках дробь можно сократить на $(1 + x)$, так как в них $1 + x \neq 0$. Легко видеть, что односторонние пределы слева и справа в точке $x = -1$ равны между собой и их можно вычислить:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-0} y &= \lim_{x \rightarrow -1+0} y = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1 + x^3}{1 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{(1 + x)(1 - x + x^2)}{1 + x} = \lim_{x \rightarrow -1+0} (1 - x + x^2) = 1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Таким образом, при $x = -1$ данная функция имеет устранимый разрыв. Он будет устранен, если положить, что при $x = -1 \Rightarrow y = \frac{1 + x^3}{1 + x} = 3$.

Исследовать на непрерывность функцию $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4}$ (рис. 95).

Решение: Вычислим односторонние пределы функции в точке её разрыва $x = 4$.

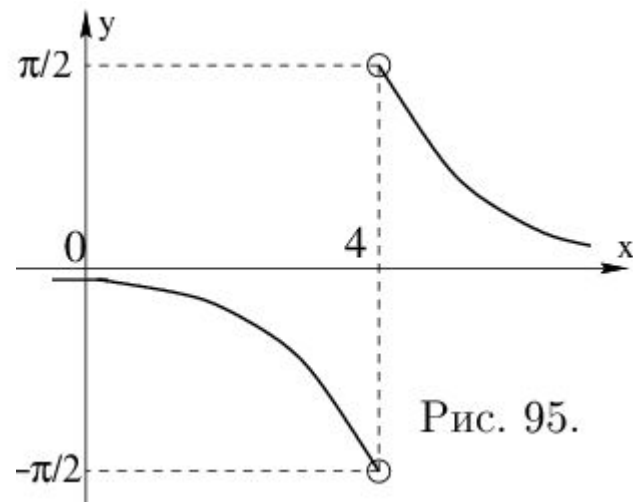


Рис. 95.

Предел слева – $\lim_{x \rightarrow 4-0} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x-4} \right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

Предел справа – $\lim_{x \rightarrow 4+0} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x-4} \right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

Пределы слева и справа существуют, но не равны, следовательно, точка $x = 4$ для данной функции – точка разрыва I рода.

При рассмотрении предела функции одной переменной (часть I курса) было введено понятие δ -окрестности точки x_0 – интервал с центром в точке x_0 вида $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Введем аналогичное понятие для функции двух переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.1. δ -окрестностью точки $P_0(x_0; y_0)$ называется внутренняя часть круга с центром в этой точке радиуса δ :

$$\delta(P_0) = \left\{ P(x; y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \right\}.$$

Любая точка P этой δ -окрестности находится от точки P_0 на расстоянии меньшем δ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.2. Число b называется пределом функции двух переменных или двойным пределом функции $z = f(x; y)$ при $P \rightarrow P_0$, если для любого числа ε найдется такая δ -окрестность точки $P_0(x_0; y_0)$, что для любой точки $P(x; y)$ этой окрестности, за исключением, быть может, точки P_0 , будет выполнено неравенство:

$$|f(x; y) - b| < \varepsilon.$$

При этом записывают:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = b \quad \text{или} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = b.$$

Символическая запись определения 38.2 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = b$:

$$\exists(\varepsilon > 0) \forall(\delta(P_0)) \exists(P \in \delta(P_0), \text{ м.б.кр. } P = P_0) \Rightarrow |f(P) - b| < \varepsilon.$$

Для двойного предела справедливы все свойства предела функции одного переменного: предел суммы, разности, произведения равен соответственно сумме, разности, произведению пределов, если каждый из них существует; предел частного равен частному пределов, если каждый из них существует и предел знаменателя не равен нулю; постоянный множитель можно выносить за знак предела и т.д. Из определений (38.1) и (38.2) следует, что $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = b \Leftrightarrow$

$\lim_{\delta \rightarrow 0} f(x; y) = b$, где $\delta = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ – расстояние между точками P и P_0 . Поэтому для вычисления пределов функции двух переменных мы будем пользоваться равносильным определением (38.3)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.3. Число b называется пределом функции двух переменных или двойным пределом функции $z = f(x; y)$ при $P \rightarrow P_0$, если функция определена в некоторой окрестности точки P_0 за исключением, быть может, точки P_0 и $\lim_{\delta \rightarrow 0} f(x; y) = b$, где

$$\delta = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

ПРИМЕР 38.1. Найдите $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$.

Решение: В данном примере $x_0 = 0, y_0 = 0, P_0(0; 0) \Rightarrow \delta = \sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\sqrt{\delta^2 + 4} - 2} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2 (\sqrt{\delta^2 + 4} + 2)}{\delta^2 + 4 - 4} = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\sqrt{\delta^2 + 4} + 2) = 4. \end{aligned}$$

В данном примере функция $\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$ не определена в точке $P_0(0; 0)$, но имеет предел при $P \rightarrow P_0$.

Заметим, что двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$ при одновременном стремлении обоих аргументов не обязательно совпадает с повторными пределами

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) \right) \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y) \right),$$

которые не являются новыми понятиями, а вычисляются последовательно как обычные пределы функции одной переменной.

Однако существует теорема, которая позволяет заменять двойной предел функции двух переменных повторным пределом при достаточно широких предположениях.

ТЕОРЕМА 38.1. Если существует $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$ и при $\forall y \in \delta$ окрестности

y_0 , $y \neq y_0$, $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y)$, а при $\forall x \in \delta$ окрестности x_0 , $x \neq x_0$,

$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y)$, то $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y)$, $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y)$ и

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y).$$

ПРИМЕР 38.2. В условиях примера (38.1) вычислить повторные пределы.

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + 4} - 2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 (\sqrt{y^2 + 4} + 2)}{y^2 + 4 - 4} = \lim_{y \rightarrow 0} (\sqrt{y^2 + 4} + 2) = 4. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} = 4.$$

Для функций одной переменной $y = f(x)$ были введены односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0}$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0}$ и отмечалось, что для существования $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ они должны быть равны. Для функции 2-х переменных $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x; y)$ существует, если он не зависит от способа стремления точки $P(x; y)$ к точке $P_0(x_0; y_0)$.

ПРИМЕР 38.3. *Найти $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.*

Решение: Пусть $y = \lambda x$, т.е. подход к началу координат совершается вдоль прямых $y = \lambda x$, тогда $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \lambda^2 x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$ зависит от λ и, следовательно, не существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.4. *Функция $f(x; y)$ называется бесконечно малой при $P \rightarrow P_0$, если её двойной предел равен нулю.*

Определение предела естественным образом распространяется на случай функции 3-х и более переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.5. Функция n переменных $u = f(P)$ называется непрерывной в точке P_0 , если функция определена в этой точке и в некоторой её окрестности и $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.6. Точка P_0 , в которой функция $u = f(P)$ непрерывна, называется точкой непрерывности этой функции.

Свойства непрерывных функций сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 38.2. Если функция n переменных $f_1(P)$ и $f_2(P)$ непрерывны в точке P_0 , то в этой же точке непрерывны и их сумма $f_1(P) + f_2(P)$, разность $f_1(P) - f_2(P)$, произведение $f_1(P) \cdot f_2(P)$ и частное $f_1(P)/f_2(P)$, если $f_2(P_0) \neq 0$.

На основании этой теоремы легко устанавливается непрерывность многочлена от двух переменных при любом их значении и непрерывность рациональной функции во всех точках плоскости, в которых знаменатель не равен нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.7. Точка P_0 называется точкой разрыва функции $f(P)$, если она принадлежит области определения этой функции или её границе и не является точкой непрерывности.

ПРИМЕР 38.4. Найти точки разрыва функции $z = \frac{1}{x - y + 1}$.

Р е ш е н и е: Функция определена и непрерывна всюду, кроме точек с координатами, удовлетворяющими уравнению: $x - y + 1 = 0$. Это уравнение прямой $y = x + 1$, являющейся границей области определения функции. Каждая точка этой прямой есть точка разрыва.

Ответ: точки разрыва образуют прямую $y = x + 1$.

Ранее были рассмотрены свойства функции одной переменной, непрерывной на отрезке. Аналогичными свойствами обладают функции нескольких переменных, непрерывные в ограниченной замкнутой области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.8. Функция $z = f(P)$ называется непрерывной в ограниченной замкнутой области D , если она непрерывна в каждой точке этой области. При этом для непрерывности $f(P)$ в граничной точке P_0 траекторию движения точки P при стремлении $P \rightarrow P_0$ выбираем внутри D .

ТЕОРЕМА 38.3. Если функция $z = f(P)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D , то она в этой области:

- (1) ограничена: $\exists N > 0 : |f(P)| \leq N$ для $\forall P \in D$;
- (2) достигает своего наименьшего m и наибольшего M значений:
 $\exists P_1 \in D : f(P_1) = m$ и $\exists P_2 \in D : f(P_2) = M$;
- (3) любое значение между m и M принимает хотя бы в одной точке области: для $\forall c \in [m; M] \exists P_0 : f(P_0) = c$.

ПРИМЕР 38.5. Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $D = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ – круге с центром в точке $O(0; 0)$ и радиуса 1.

Она ограничена: $|\sqrt{1 - x^2 - y^2}| \leq 1$ при $x^2 + y^2 \leq 1$.

Наименьшее значение $m = 0$ достигается в точках окружности $x^2 + y^2 = 1$ – на границе области, наибольшее значение $M = 1$ достигается в начале координат – внутренней точке области.

Функция принимает любое значение $0 \leq c \leq 1$ в точках окружности $c = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - c^2$. Графиком функции является верхняя полусфера, изображенная на рис. 25.

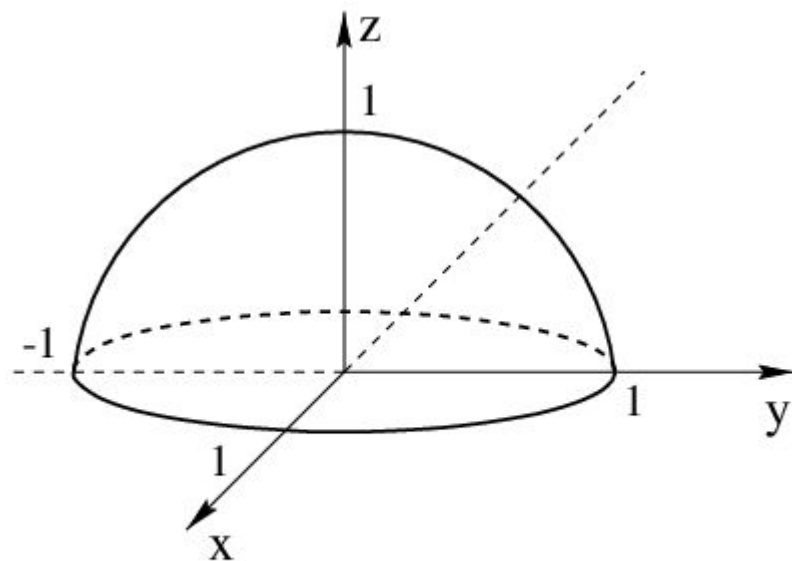


Рис. 25. График функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Спасибо за внимание