

Лекция 7.

Управление портфелем финансовых инструментов

**ОЖИДАЕМАЯ ДОХОДНОСТЬ И
РИСК ПОРТФЕЛЯ**

Понятие портфеля активов

- *Портфель — это набор финансовых активов, которыми располагает инвестор.*
- Главная цель формирования портфеля состоит в стремлении получить требуемый уровень ожидаемой доходности при более низком уровне ожидаемого риска.

Подходы к формированию портфеля

- традиционный
- современный.
- Традиционный основывается на фундаментальном и техническом анализе.
- Современный основан на использовании статистических и математических методов подбора финансовых инструментов в портфель, а также на ряде новых концептуальных подходов.

Теория Марковица

- **подход, основанный на анализе ожидаемых средних значений и вариаций случайных величин.**
- *Разработанная Гарри Марковицем методика формирования инвестиционного портфеля, направленная на оптимальный выбор активов исходя из требуемого соотношения доходность/риск*

ОЖИДАЕМАЯ ДОХОДНОСТЬ ПОРТФЕЛЯ

$$E(r_p) = E(r_1)\theta_1 + E(r_2)\theta_2 + \dots + E(r_n)\theta_n$$

- где: $E(rp)$ — ожидаемая доходность портфеля;
- $E(r1); E(r2); E(rn)$ — ожидаемая доходность соответственно первого, второго и n -го активов;
- $\theta1; \theta2; \theta n$ — удельный вес в портфеле первого, второго и n -го активов.

ОЖИДАЕМАЯ ДОХОДНОСТЬ ПОРТФЕЛЯ

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n E(r_i) \theta_i$$

$$\theta_i = \frac{P_i}{P_p}$$

Пример

- **Пример.**
- Портфель состоит из двух активов А и В. $E(R_A) = 15\%$, $E(r_B) = 10\%$.
- Стоимость актива А — 300 тыс. руб., актива В — 700 тыс. руб. Необходимо определить ожидаемую доходность портфеля.

Доходность акции с учетом вероятности

Доходность (%)	Вероятность (%)
10	30
13	30
18	20
24	20

$$10\% \cdot 0,3 + 13\% \cdot 0,3 + 18\% \cdot 0,2 + 24\% \cdot 0,2 = 15\%$$

Запишем формулу определения ожидаемой доходности актива в общем виде:

$$E(r) = \sum_{i=1}^n E(r_i) \pi_i$$

- где: $E(r)$ — ожидаемая доходность актива;
- $E(r_i)$ — ожидаемая доходность актива в i -м случае;
- π_i — вероятность получения доходности в i -м случае.

ОЖИДАЕМЫЙ РИСК АКТИВА

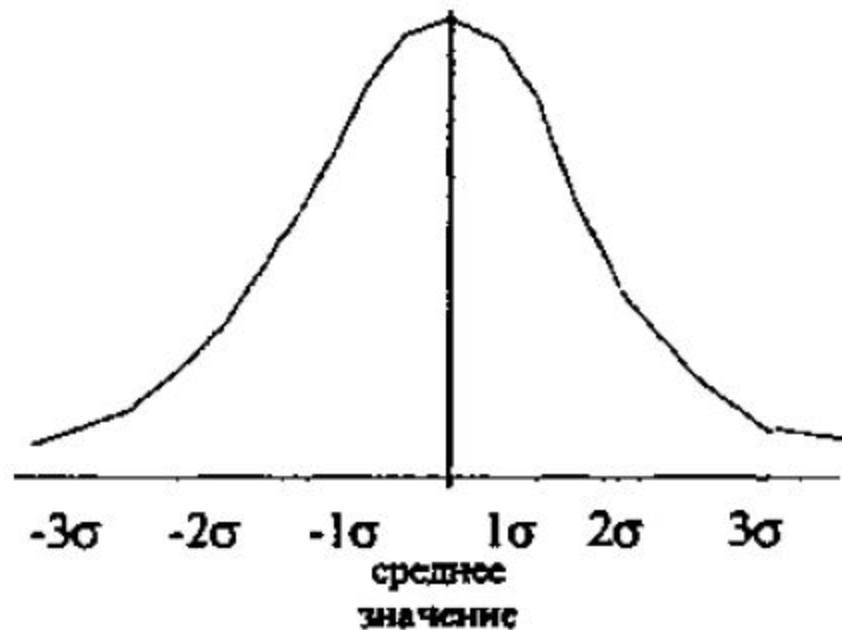
- Определяется при помощи дисперсии и стандартного отклонения (волатильность).

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n-1}$$

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{n}$$

- r — доходность актива;

- Доходность актива в том или ином году — это случайная величина. Массовые случайные процессы подчиняются закону нормального распределения.



Например

- Два актива имеют одинаковую ожидаемую доходность, которая равна 50%. Однако стандартное отклонение первого актива составляет 5%, а второго — 10%.
- Это говорит о том, что второй актив рискованнее первого, так как существует 68, 3% вероятности, что через год доходность первого актива может составить от 45% до 55%, а второго — от 40% до 60% и т. д.

ОЖИДАЕМЫЙ РИСК ПОРТФЕЛЯ

- Ожидаемый риск портфеля представляет собой сочетание стандартных отклонений (дисперсий) входящих в него активов.
- В отличие от ожидаемой доходности портфеля его риск не является обязательно средневзвешенной величиной стандартных отклонений (дисперсий) доходностей активов.

- Риск портфеля зависит от того, в каком направлении изменяются доходности входящих в него активов при изменении конъюнктуры рынка и в какой степени.
- Для этого используют такие показатели как ковариация и коэффициент корреляции.

$$Cov_{A,B} = \frac{\sum (r_{Ai} - \bar{r}_A)(r_{Bi} - \bar{r}_B)}{n-1}$$

Пример

Год	Доходность А	Доходность В
1	0,1	0,12
2	0,16	0,18
3	0,14	0,14
4	0,17	0,15

$$\bar{r}_A = \frac{0,1 + 0,16 + 0,14 + 0,17}{4} = 0,1425$$

$$\bar{r}_B = \frac{0,12 + 0,18 + 0,14 + 0,15}{4} = 0,1475$$

Бумага А	Бумага В
$0,1 - 0,1425 = -0,0425$	$0,12 - 0,1475 = -0,0275$
$0,16 - 0,1425 = 0,0175$	$0,18 - 0,1475 = 0,0325$
$0,14 - 0,1425 = -0,0025$	$0,14 - 0,1475 = -0,0075$
$0,17 - 0,1425 = 0,0275$	$0,15 - 0,1475 = 0,0025$

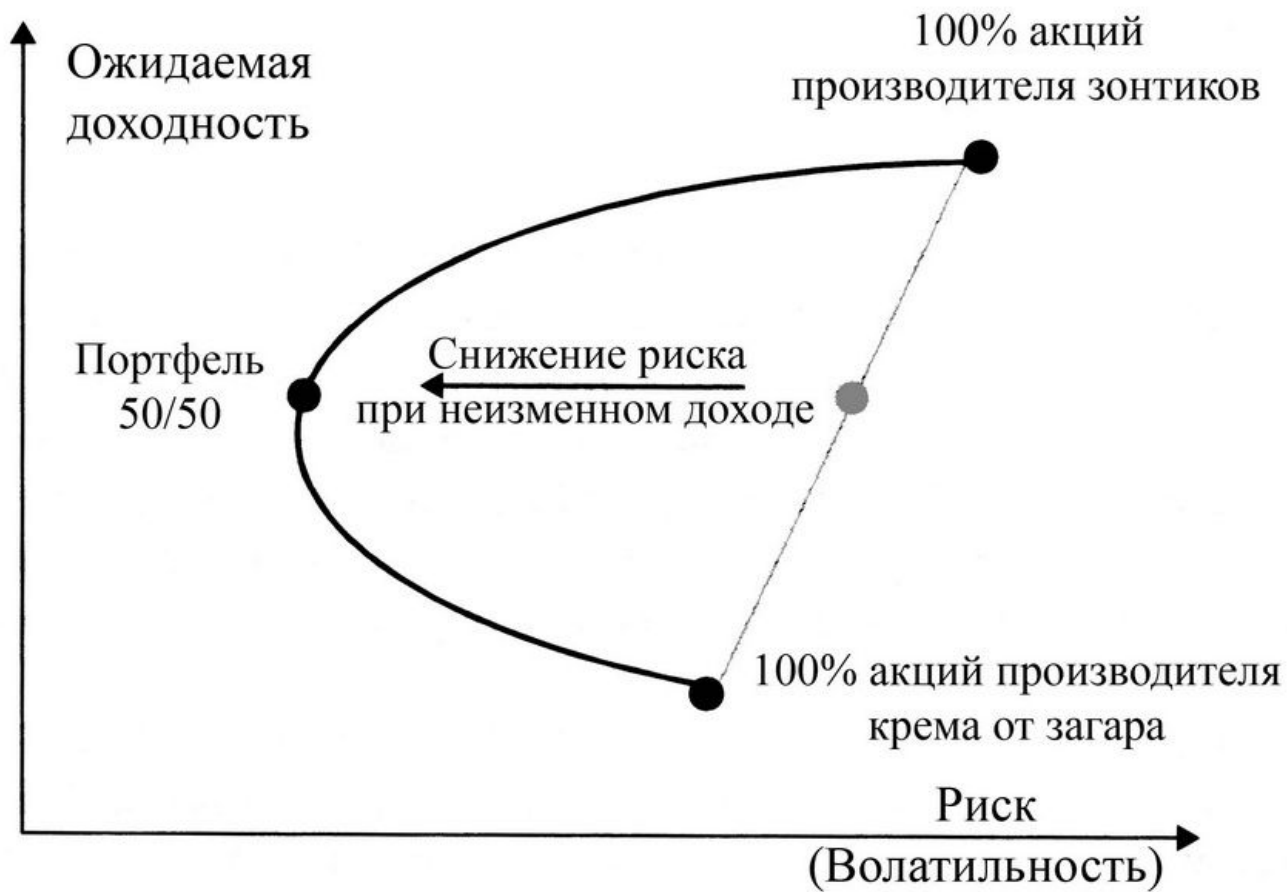
Бумага А	Бумага В
-0,0425	• -0,0275 = 0,0011686
0,175	• 0,0325 = 0,0005688
-0,0025	• -0,0075 = 0,0000186
0,0275	• 0,0025 = 0,0018248
	сумма = 0,0018248

$$Cov_{A,B} = \frac{0,0018248}{4} = 0,0004562$$

Пример

- Рассмотрим упрощенную экономическую систему, в которой на бирже продаются акции только двух компаний: производителя солнцезащитного крема и производителя ЗОНТИКОВ.

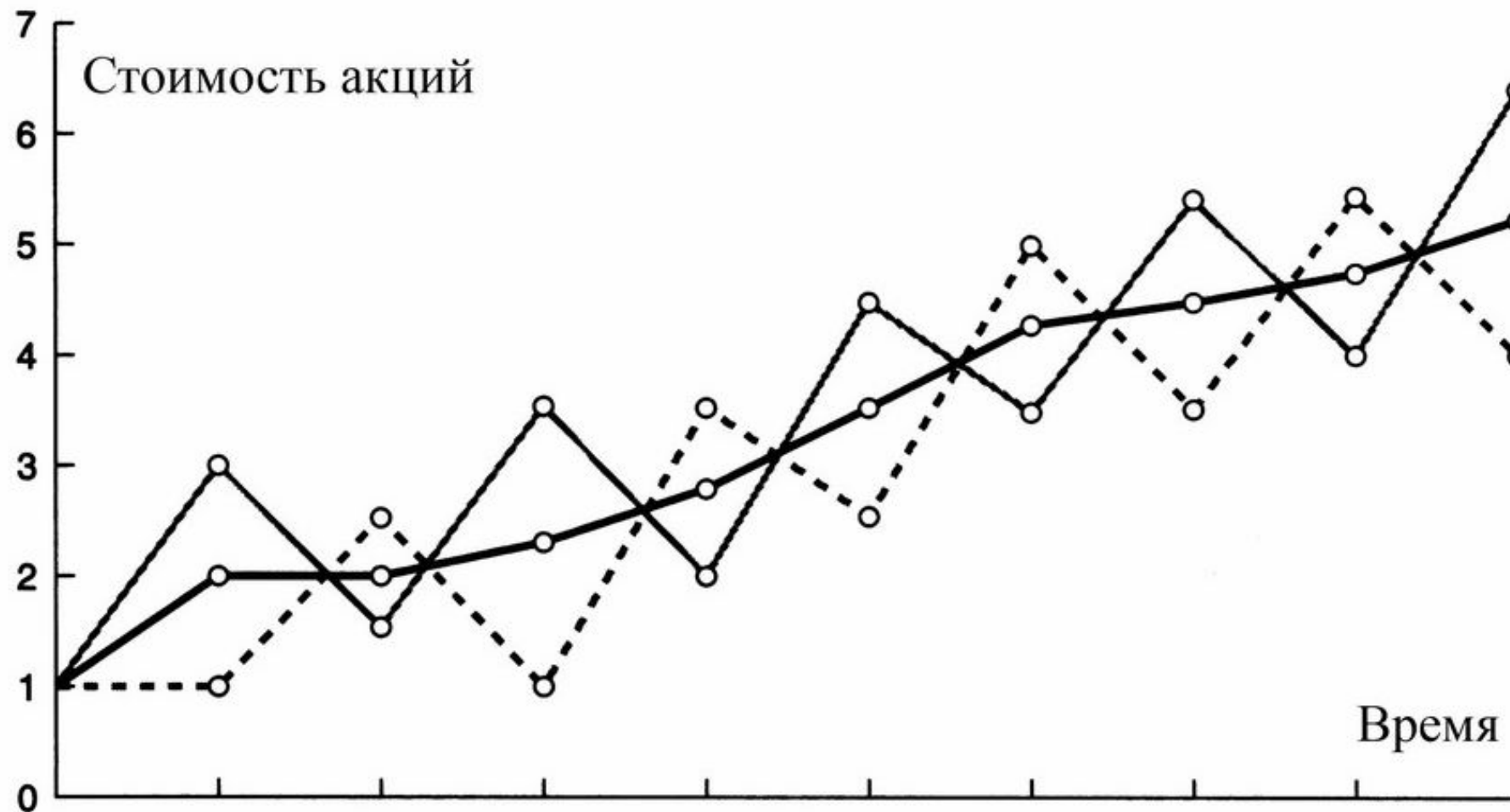
Пример



Теория Марковица

- Ожидаемый доход портфеля, который поровну распределен между акциями двух компаний, равен среднему значению доходов входящих в него акций.
- Волатильность портфеля значительно меньше средней волатильности двух акций и значительно меньше волатильности составляющих портфеля.

Пример. Продолжение



- Акции производителя зонтиков
- - - Акции производителя солнцезащитного крема
- Портфель, состоящий из равного количества обеих акций

Практическое применение теории Марковица

Формирование инвестиционного портфеля на основе

- доли активов в общем портфеле;
- ожидаемой доходности каждого из активов портфеля;
- волатильности активов портфеля;
- коэффициента корреляции между активами портфеля.

РИСК ПОРТФЕЛЯ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ ДВУХ АКТИВОВ

$$\sigma_P^2 = \theta_A^2 \sigma_A^2 + \theta_B^2 \sigma_B^2 + 2\theta_A \theta_B \text{Cov}_{A,B}$$

- где: σ_P^2 — риск(дисперсия) портфеля;
- θ_A — уд. вес актива А в портфеле;
- θ_B — уд. вес актива В в портфеле;
- $\text{Cov}_{A,B}$ — ковариация доходности активов А и В.

Пример.

- Определить риск портфеля, состоящего из бумаг А и В, если $\theta_A = 0,3$; $\theta_B = 0,7$; $\sigma_A^2 = 0,0007188$; $\sigma_B^2 = 0,0004688$; $\text{COVA}, B = 0,0004562$.

$$\sigma_P^2 = 0,3 \cdot 0,0007188 + 0,7 \cdot 0,0004688 + 2 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,0004562 = 0,000468$$
$$\sigma_P = 0,021633 \text{ или } 2,163\%$$

Риск портфеля, состоящего из двух активов с корреляцией доходности +1

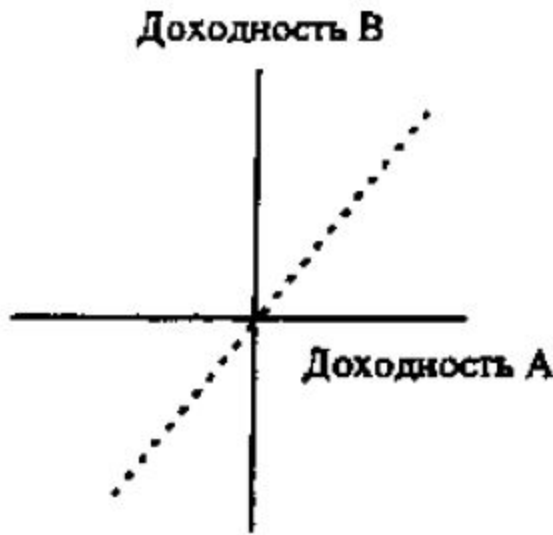


Рис. 35. Корреляция доходности + 1.

Рис. 36. Корреляция доходности + 1.

$$\sigma_P^2 = \theta_A^2 \sigma_A^2 + \theta_B^2 \sigma_B^2 + 2\theta_A \theta_B \text{Corr}_{A,B} = (\theta_A \sigma_A + \theta_B \sigma_B)^2$$

ИЛИ

$$\sigma_P = \theta_A \sigma_A + \theta_B \sigma_B$$

- Таким образом, если доходности активов имеют корреляцию +1, то риск портфеля — это средневзвешенный риск входящих в него активов.

Риск портфеля, состоящего из двух активов с корреляцией доходности -1

$$\sigma_P^2 = \theta_A^2 \sigma_A^2 + \theta_B^2 \sigma_B^2 - 2\theta_A \theta_B \text{Corr}_{A,B} = (\theta_A \sigma_A - \theta_B \sigma_B)^2$$

$$\sigma_P = \theta_A \sigma_A - \theta_B \sigma_B$$

Варианты портфелей, состоящих из активов, с корреляцией -1

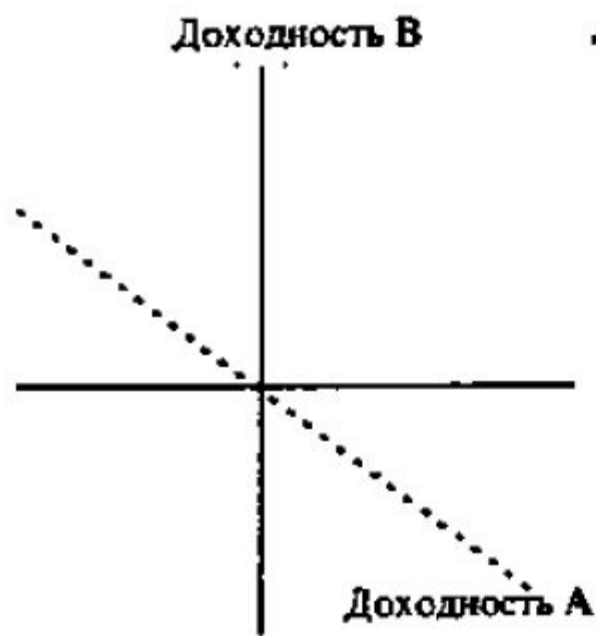


Рис. 38. Корреляция доходности -1.

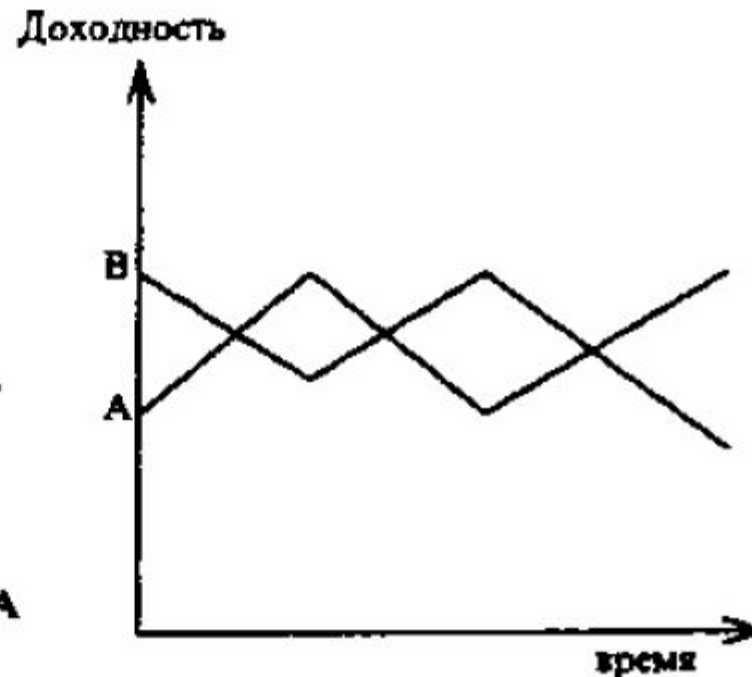
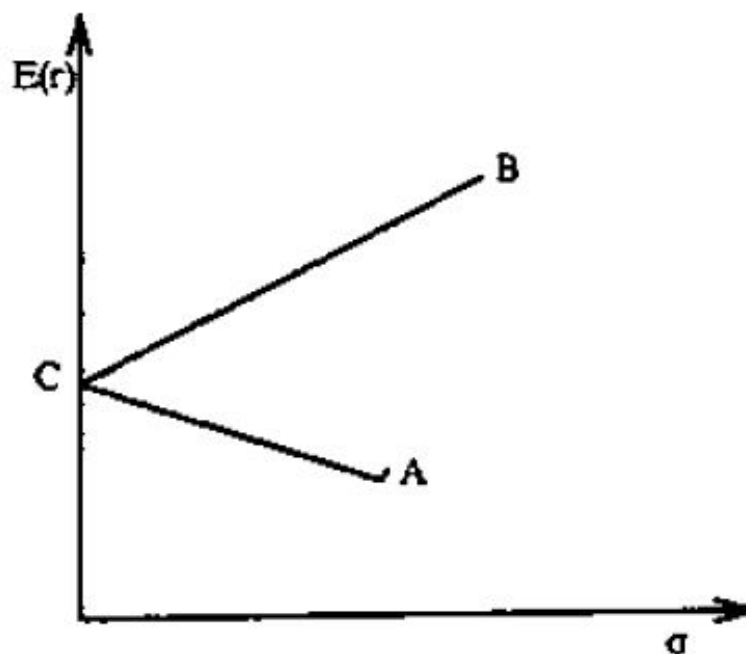


Рис. 39. Корреляция доходности -1.

Варианты портфелей, состоящих из активов, с корреляцией -1



$$\sigma_P = \theta_A \sigma_A + \theta_B \sigma_B = 0$$

$$\theta_A = 1 - \theta_B$$

$$(1 - \theta_B) \sigma_A - \theta_B \sigma_B = 0$$

$$\theta_B = \frac{\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B}$$

$$\theta_A = 1 - \frac{\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B} = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$$

Пример

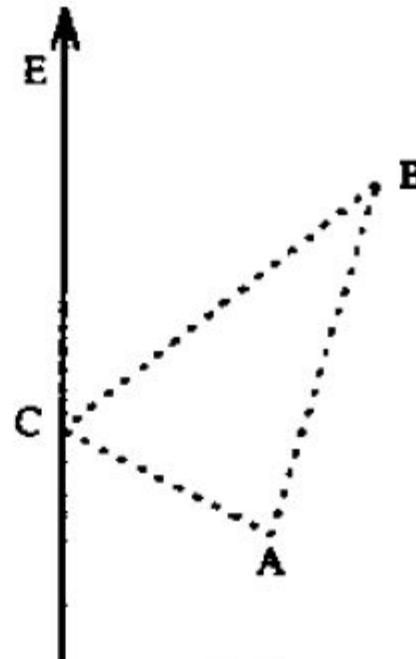
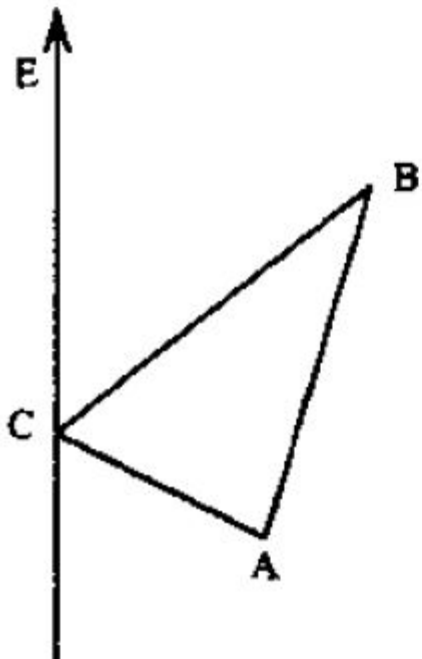
- $\sigma_A = 0,0268$; $\sigma_B = 0,0350$.

$$\theta_B = \frac{0,0268}{0,0268 + 0,0350} = 0,4337$$

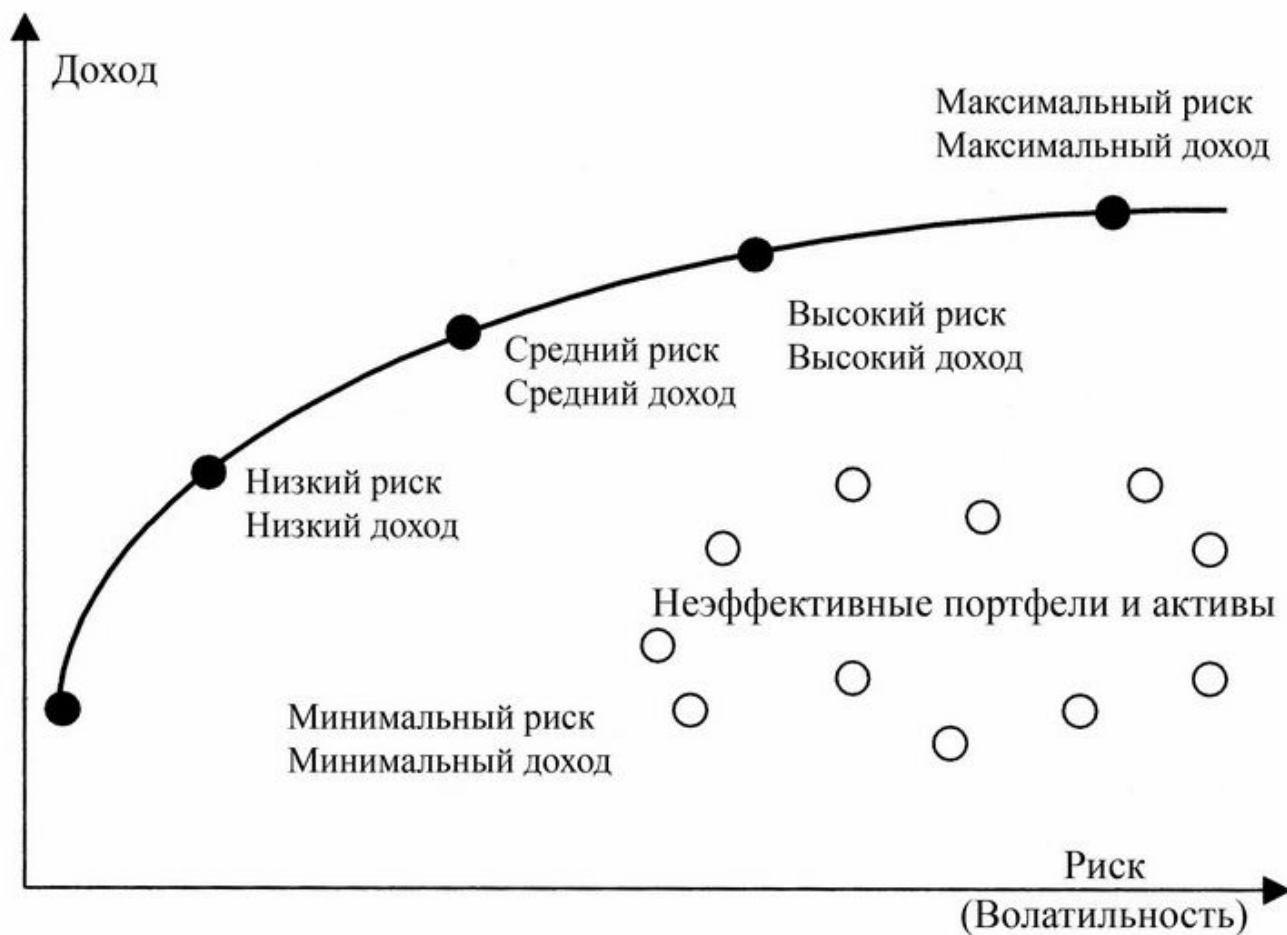
$$\theta_A = 1 - 0,4337 = 0,5663$$

Доминирующий портфель

- Корреляция между доходностями двух финансовых инструментов в портфеле может изменяться от -1 до $+1$.



Эффективная граница



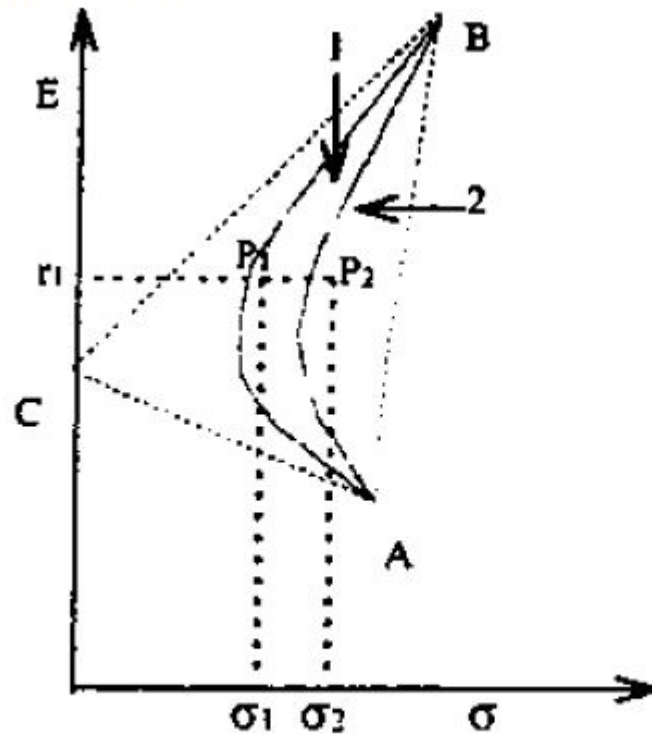
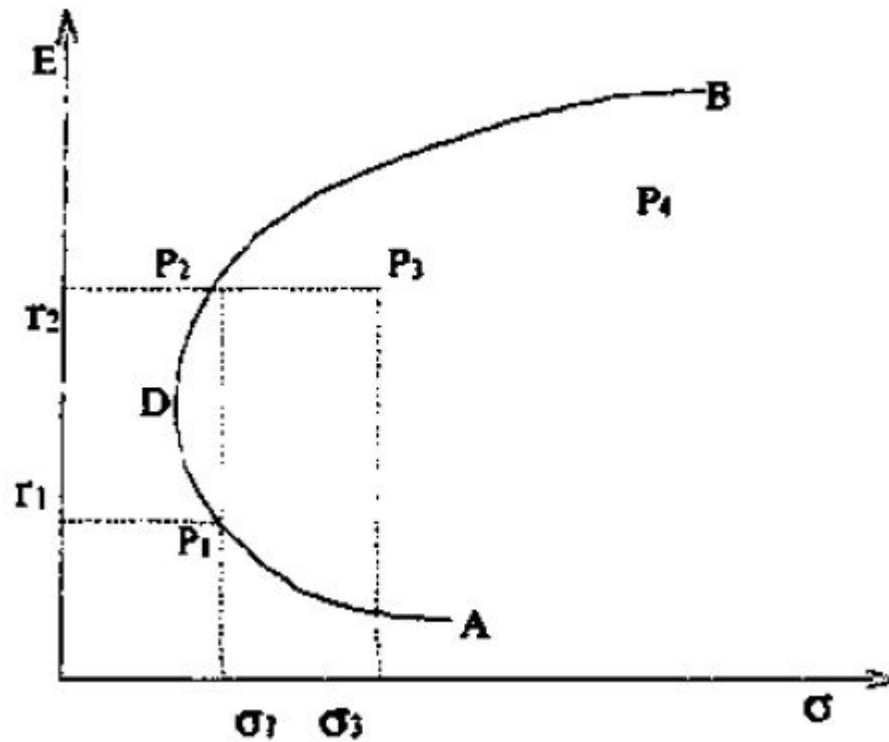


Рис. 43. Варианты портфелей из двух активов с различной степенью корреляции доходности.

- Чем меньше корреляция между доходностью активов, тем более выпуклой будет график. На рис. 43 линия 1 представляет меньшую
- корреляцию доходности активов А и В по сравнению с линией 2



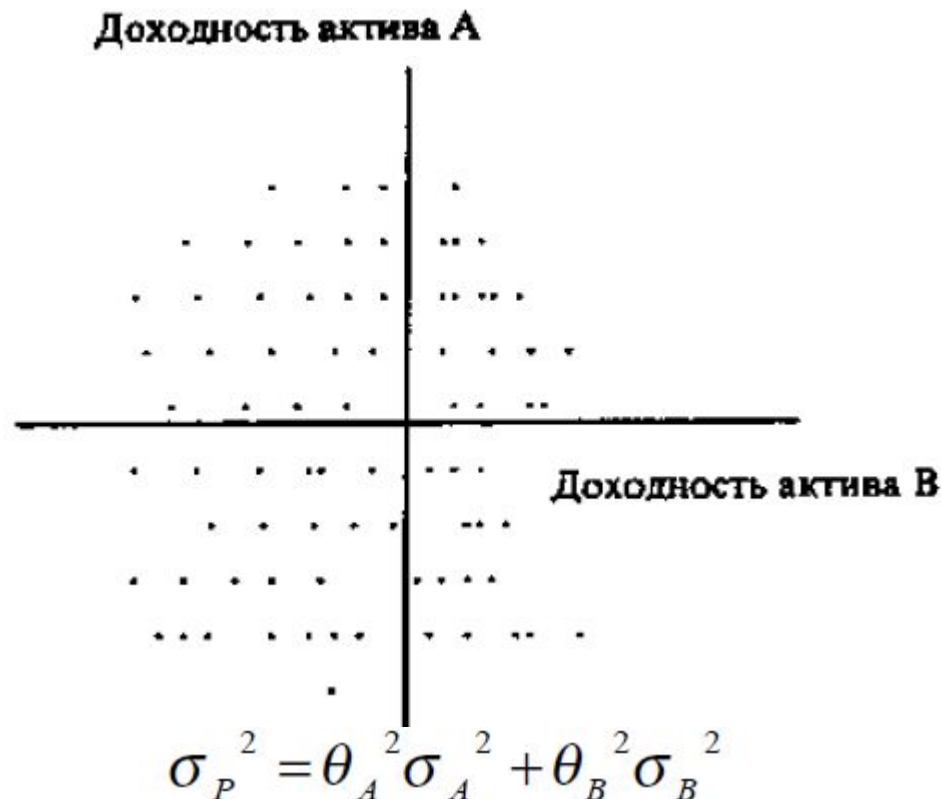
- Однако рациональный инвестор остановит свой выбор только на верхней части данной кривой, а именно, отрезке DB, поскольку на нем расположены портфели, которые приносят более высокий уровень ожидаемой доходности при том же риске по сравнению с портфелями на участке DA.

- Если инвестор формирует портфель из двух активов, А и В, как показано, то в точке D он может получить для сочетания данных активов портфель с наименьшим уровнем риска. Чтобы его сформировать, необходимо найти удельные веса в портфеле активов
- А и В.

$$\theta_A = \frac{\sigma_B^2 - Cov_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2Cov_{A,B}}$$

$$\theta_B = \frac{\sigma_A^2 - Cov_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2Cov_{A,B}}$$

Риск портфеля, состоящего из двух активов с некоррелируемыми доходностями



Пример. Рассчитать риск портфеля

$\sigma_A = \sigma_B = 0,2$; $\theta_A = \theta_B = 0,5$. Риск портфеля равен:

$$\sigma_P^2 = (0,5)^2 (0,2)^2 + (0,5)^2 (0,2)^2 = 0,02$$

$$\sigma_P = \sqrt{0,02} = 0,141 \text{ или } 14,1\%$$

Общие выводы

- 1) Если в портфель объединяются активы с корреляцией $+1$, то достигается только усреднение, а не уменьшение риска;
- 2) Если в портфель объединяются активы с корреляцией меньше, чем $+1$, то его риск уменьшается. Уменьшение риска портфеля достигается при сохранении неизменного значения ожидаемой доходности

Общие выводы

- 3) Чем меньше корреляция доходности активов, тем меньше риск портфеля;
- 4) Если в портфель объединяются активы с корреляцией -1 , то можно сформировать портфель без риска;
- 5) При формировании портфеля необходимо стремиться объединить в него активы с наименьшей корреляцией.

- Спасибо за внимание!