

# Лекция

## Использование производственных функций в прогнозировании

1. Сущность производственных функций
2. Методика построения эконометрических моделей с использованием производственных функций
3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL

# 1. Сущность производственных функций

**Производственная функция** – экономико-математическое уравнение, связывающее переменные величины затрат (ресурсов) с величинами продукции (результатами производства). Они используются для отражения в модели взаимосвязи между производственными факторами и результатами производства, при анализе планирования и прогнозирования. Связь, проявляющаяся при большом числе наблюдений в виде определенной зависимости между средним значением результативного признака и признаками-факторами, называется *корреляционной*. Функция, отображающая корреляционную связь между признаками, называется *уравнением регрессии*.

# 1. Сущность производственных функций

Задачей построения и анализа производственных функций является исследование количественной меры влияния производственных факторов на конечные результаты. Общая форма записи производственной функции:

$y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_i$  – факторы производства (объемы ресурсов: стоимость основных фондов, дозы внесения удобрений, обеспеченность трудовыми ресурсами и т.д.);  $y$  – прогнозный результат производства (стоимость валовой продукции, величина прибыли, урожайность, продуктивность скота и т.д.).

# 1. Сущность производственных функций

Производственные функции могут быть однофакторными и многофакторными, а по форме линейными и нелинейными. В качестве производственных функций выступают уравнения регрессии разных видов:

Уравнение прямой:  $y_x = a_0 + a_1x$

Уравнение гиперболы:

$$y_x = a_0 + a_1/x$$

# Сущность производственных функций

## Уравнение параболы второго порядка

$$y_x = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \dots + a_kx_k$$

Показательное уравнение:

Степенное уравнение:  $y_x = a_0x^{a_1}$

$$y_x = a_0a_1^x$$

## **2. Методика построения эконометрических моделей с использованием производственных функций**

В процессе построения и анализа производственных функций определяется аналитическое выражение (форма) связи и дается количественная оценка тесноты связи между результативным и факторными признаками. При его проведении решаются следующие задачи:

## **2. Методика построения эконометрических моделей с использованием производственных функций**

В процессе построения и анализа производственных функций определяется аналитическое выражение (форма) связи и дается количественная оценка тесноты связи между результативным и факторными признаками. При его проведении решаются следующие задачи:

## **2. Методика построения эконометрических моделей с использованием производственных функций**

- определение формы и направления связи, ее количественное выражение в виде уравнения регрессии;
- характеристика тесноты связи;
- определение значимости, существенности выборочных характеристик тесноты корреляционной связи;
- прогноз значений результативного признака.



## **2. Методика построения эконометрических моделей с использованием производственных функций**

Построение производственных функций состоит из нескольких этапов:

- предварительный теоретический (качественный) анализ;
- построение эконометрической модели, ее оценка и анализ;
- расчет показателей тесноты связи;
- прогноз значений результативного признака.

## 2. Методика построения эконометрических моделей с использованием производственных функций

На первом этапе формулируется задача исследования, выявляются причинно-следственные связи между признаками, отбираются факторы, оказывающие влияние на результирующий признак, предварительно устанавливается форма и направление связи между признаками.

Отбор факторов для уравнения регрессии является основным содержанием первого этапа.

При отборе факторов к ним предъявляется ряд требований:

- 1) они должны быть количественно измерены;
- 2) должны быть независимы друг от друга;
- 3) не должны косвенно дублировать друг друга или являться частью других факторов.

## **2. Методика построения эконометрических моделей с использованием производственных функций**

На **втором этапе** производится выбор типа аналитической функции, отражающей связь результативного признака с факторным, и построение корреляционной модели (уравнения регрессии). Тип функции выбирается на основе сочетания теоретического анализа и изучения исходных данных.

## **2. Методика построения эконометрических моделей с использованием производственных функций**

Теоретический анализ включает в себя обоснование характера связей между теми или иными признаками, а также рассматривает опыт предыдущих исследований. Анализ эмпирических данных ведется путем построения группировок, параллельных рядов, эмпирических линий регрессии и корреляционных полей. В результате устанавливается направление и форма связи. Соответственно найденной форме связи строятся уравнения регрессии.

## **2. Методика построения эконометрических моделей с использованием производственных функций**

К статистической совокупности, на основе которой исследуется производственная функция, также предъявляются требования:

- она должна быть однородной;
- должна содержать достаточное число единиц (не менее чем в пять раз превышать число факторов);
- должна иметь нормальное распределение по исследуемому результативному признаку.

# 3. Методика решения

## эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL

Рассмотрим построение производственной функции на примере производительности труда.

Производительность труда зависит от множества факторов, которые можно разделить на две группы:

- 1) природно-климатические, биологические и агроотехнические, от которых зависит уровень урожайности и продуктивности;
- 2) организационно-технические, которые, кроме того, определяют величину затрат труда.

# 3. Методика решения

## эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL

Для измерения влияния факторов на результативный показатель - производительность труда воспользуемся многофакторной производственной функцией:  $y_x = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$  где  $y_x$  – теоретические значения результативного показателя - производительности труда (выработка на одного работника);  $a_0, a_1, a_2, a_3$  – параметры уравнения, которые необходимо определить;  $x_1, x_2, x_3$  – факторы производства (фондовооружённость, энерговооружённость и среднегодовая оплата труда одного работника соответственно).

### **3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL**

Так как согласно требованию к статистической совокупности число наблюдений должно превышать число факторных признаков не менее чем в 5 раз, то возьмём совокупность из 16 хозяйств юго-восточной природно-экономической зоны Саратовской области (Озинский, Новоузенский, Питерский и др. районы). На основе годовой бухгалтерской и статистической отчётности получены следующие данные (таблица 1).



**Таблица 1 - Исходная информация для корреляционно-регрессионного анализа  
производительности труда (2010 г.)**

Хозяйства Юго-восточной зоны Саратовской области	Выработка на 1 работника, тыс. руб. $y$	Фондовоору- жённость, тыс. руб. $x_1$	Энерговоору- жённость, л.с. $x_2$	Среднегодовая оплата труда 1 работника, тыс. руб. $x_3$
1	652,6	1263,97	161,7	68,1
2	173,2	445,2	104,5	34,1
3	119,6	209,3	80,6	23,5
4	140,6	593,6	73,5	30,3
5	280,1	444,0	68,0	66,0
6	199,1	318,3	85,7	42,4
7	382,1	630,0	99,7	44,5
8	117,0	196,0	25,1	37,8
9	353,4	463,6	65,2	87,1
10	122,5	294,4	41,8	48,8
11	422,2	937,6	105,2	38,3
12	394,7	234,8	27,8	49,5
13	302,5	516,6	68,3	95,4
14	147,2	662,8	66,7	76,5
15	107,2	221,5	49,6	35,4
16	72,5	437,6	43,5	57,6

### **3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL**

С помощью табличного процессора Excel рассчитаем параметры уравнения регрессии и коэффициент корреляции. Для этого воспользуемся Пакетом анализа. В меню Данные выберем опцию Анализ данных. Щелкнув левой кнопкой мыши по этому пункту, откроем инструмент Регрессия. Щелкаем по кнопке ОК, на экране появляется диалоговое окно Регрессия. В поле Входной интервал  $Y$  вводим значения результативного показателя, в поле Входной интервал  $X$  вводим значения факторных признаков. Щелкаем по кнопке ОК.

### **3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL**

На рабочем листе появляются результаты вычисления параметров уравнения регрессии, коэффициента корреляции и другие показатели, позволяющие определить значимость коэффициента корреляции и параметров уравнения регрессии. Результаты решения корреляционной модели приведены в таблице 2.

## Результаты решения корреляционной модели производительности труда

ВЫВОД ИТОГОВ								
<i>Регрессионная статистика</i>								
Множественн ый R	0,761628							
R-квадрат	0,580077							
Нормированн ый R-квадрат	0,475096							
Стандартная ошибка	115,0634							
Наблюдения	16							
Дисперсион- ный анализ								
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>			
Регрессия	3	219468,1	73156,05	5,52555	0,012854			
Остаток	12	158875,1	13239,59					
Итого	15	378343,3						
	<i>Коэффициент ы</i>	<i>Стандартн ая ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>	<i>Нижние 95,0%</i>	<i>Верхние 95,0%</i>
У-пересечение	-55,0509	107,254	-0,51328	0,617077	-288,737	178,6355	-288,737	178,6355
Переменная X 1	0,235088	0,199655	1,177471	0,261833	-0,19992	0,670099	-0,19992	0,670099
Переменная X 2	1,34501	1,59486	0,84334	0,415533	-2,12989	4,819912	-2,12989	4,819912
Переменная X 3	1,733328	1,600329	1,083107	0,300044	-1,75349	5,220144	-1,75349	5,220144

### 3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL

На основе решения построим корреляционную модель:  $y_x = -55,1 + 0,24x_1 + 1,35x_2 + 1,73x_3$ .

Коэффициент регрессии  $a_1 = 0,24$  показывает, что с увеличением фондовооруженности на 1 тыс. руб./чел. среднегодовая выработка на 1 работника повышается на 0,24 тыс. руб., коэффициент регрессии  $a_2 = 1,35$  – с увеличением энерговооруженности на 1 л.с./чел. выработка возрастает на 1,35 тыс. руб., коэффициент регрессии  $a_3 = 1,73$  – с повышением среднегодовой оплаты труда 1 работника на 1 тыс. руб. производительность труда возрастает на 1,73 тыс. руб.

### **3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL**

Так как факторные признаки измеряются в разных единицах измерения, то сравнить степень влияния факторных признаков на результативный показатель не представляется возможным.

Чтобы получить сравниваемые показатели степени влияния каждого фактора на производительность труда, на основе коэффициентов регрессии вычислим коэффициенты эластичности по формуле:

$$\mathcal{E}_i = a_i \frac{\overline{x_i}}{\overline{y}}$$

где  $a_i$  - коэффициенты регрессии,  $\overline{x_i}$  - средние значения факторных признаков,

$\overline{y}$  - среднее значение результативного показателя.

Коэффициенты эластичности показывают, на сколько процентов изменяется результативный показатель при изменении факторного на 1%.

### 3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL

Рассчитаем коэффициенты эластичности:

$$\varepsilon_1 = 0,24 * 491,83 / 249,16 = 0,47$$

$$\varepsilon_2 = 1,35 * 72,93 / 249,16 = 0,40$$

$$\varepsilon_3 = 1,73 * 52,21 / 249,16 = 0,36$$

Коэффициенты эластичности свидетельствуют о том, что наибольшее влияние на производительность труда оказывает фондовооружённость: при её увеличении на 1% производительность труда повышается на 0,47%. На втором месте стоит энерговооружённость, на третьем - оплата труда.



### **3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL**

Множественный коэффициент корреляции  $R=0,76$  говорит о тесной связи между выбранными признаками ( $R>/0,7/$ ). На основе коэффициента детерминации ( $R^2=0,58$ ) можно сделать вывод, что 58% вариации результативного признака – среднегодовой выработки на 1 среднесписочного работника вызвано воздействием выбранных факторных признаков.

### 3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL

Определим значимость уравнения регрессии по критерию Фишера. В таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора найдём критическое значение F-критерия: при уровне значимости  $\alpha=0,05$  и числах степеней свободы  $k_1=n-m=16-3=13$   $k_2=m-1=3-1=2$   $F_{кр} = 3,81$ , расчётное значение  $F_{расч} = 7,4986$ . Так как  $F_{расч} > F_{кр}$ , то делаем вывод о значимости найденного уравнения регрессии.

### 3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL

Значимость коэффициента корреляции определим с помощью t-критерия Стьюдента. Для этого вычислим ошибку коэффициента корреляции по формуле:

$$\mu_r = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n-2}}$$

где  $n$  – число наблюдений (число хозяйств).

Рассчитаем критерий Стьюдента:

$$t_{\text{расч}} = \frac{r}{\mu_r} = \frac{0.76}{0.113} = 6.73$$

### 3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL

В таблице критических точек распределения Стьюдента при уровне значимости  $\alpha=0,05$  и числе степеней свободы  $n-2=16-2=14$  найдём критическое значение t-критерия  $t_{кр}=2,1448$ . Так как расчётное значение критерия  $6,73$  больше критического  $2,1448$ , делаем вывод о значимости коэффициента корреляции.

### 3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL

Подставим в многофакторную корреляционную модель значения факторных признаков анализируемого предприятия:

$$y_x = -55,1 + 0,24 * 1263,97 + 1,35 * 161,7 + 1,73 * 68,1 = 584,4 \text{ тыс. руб.}$$

### **3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL**

Таким образом, хозяйство использует производственные факторы лучше, чем в среднем по району, так как его производительность, рассчитанная по уравнению регрессии меньше фактической (652,6).

### 3. Методика решения эконометрических моделей с использованием производственных функций в MS EXCEL

Если подставить в модель прогнозные значения факторных признаков, то получим прогнозное значение изучаемого показателя. Например, в 2014 г. фондовооружённость, энерговооружённость и среднегодовая оплата труда получают следующие значения: 950 тыс. руб., 110 л. с., 80 тыс. руб. Тогда производительность труда составит:

$$y_x = -55,1 + 0,24 * 950 + 1,35 * 110 + 1,73 * 80 = 514,9$$

тыс. руб.