Лекция № 2.
Числовые характеристики выборки

Выборочное среднее. Выборочная дисперсия. Выборочное среднее квадратическое отклонение

В теории вероятностей определили числовые характеристики для случайных величин, с помощью которых можно сравнивать однотипные случайные величины. Аналогично можно определить ряд числовых характеристик и для выборки. Поскольку эти характеристики вычисляются по статистическим данным (по данным, полученным в результате наблюдений), их называют **статистическими характеристиками.**

Пусть дано статистическое распределение выборки объёма n:

x_I	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_m
n_I	n_1	n_2	n_3	n_4	…	n_m

где m – число ваиантов.

<u>Выборочным средним</u> $\overline{x_в}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки.

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i$$

Выборочное среднее можно записать и так: $\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i p_i^*$, где:

p_i^* - частость.

В случае интервального статистического ряда в качестве x_i берут середины интервалов, а $\mathbf{n}_i$ – соответствующие им частоты.

<u>Выборочной дисперсией</u> $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений выборки от выборочного среднего $\overline{x_в}$:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i \quad \textbf{или} \quad D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot p_i^*$$

Выборочное среднее квадратическое выборки определяется формулой:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}$$

Особенность $\sigma_в$ состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и данные выборки.

Если объём выборки мал ($n \leq 30$), то пользуются **исправленной выборочной дисперсией**:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в$$

Величина $S = \sqrt{S^2}$ называется **исправленным средним квадратическим отклонением**.

Выборочные начальные и центральные моменты. Асимметрия. Эксцесс.

Приведём краткий обзор характеристик, которые наряду с уже рассмотренными применяются для анализа статистических рядов и являются аналогами соответствующих числовых характеристик случайной величины.

Среднее выборочное и выборочная дисперсия являются частным случаем более общего понятия – **момента** статистического ряда.

Начальным выборочным моментом порядка называется среднее арифметическое l – х-степеней всех значений выборки:

$$\nu_l^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^l \cdot n_i \quad \text{или} \quad \nu_l^* = \sum_{i=1}^{m} x_i^l \cdot p_i^* .$$

Из определения следует , что начальный выборочный момент первого порядка:

$$\nu_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i = \overline{x_в}$$

Центральным выборочным моментом порядка l называется среднее арифметическое l-х-степеней отклонений наблюдаемых значений выборки от выборочного среднего $\overline{x_в}$.

$$\mu_l^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^l \cdot n_i \quad \text{или} \quad \mu_l^* = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^l \cdot p_i^*$$

Из определения следует, что центральный выборочный момент второго порядка :

$$\mu_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i = D_в = \sigma_в^2$$

<u>Выборочным коэффициентом асимметрии</u> называется число A_s^*, определяемое формулой: $A_s^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma_в^3}$

Выборочный коэффициент асимметрии служит для характеристики асимметрии полигона вариационного ряда. Если полигон асимметричен, то одна из его ветвей, начиная с вершины, имеет больший «спуск», чем другая.

Если $A_s^* < 0$, то более пологий «спуск» полигона наблюдается слева; если $A_s^* > 0$ - справа. В первом случае асимметрию называют **левосторонней**, а во втором – **правосторонней**.

Выборочным коэффициентом эксцесса или **коэффициентом крутости** называется число E_k^*, определяемое формулой:

$$E_k^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_в^4} - 3 .$$

Выборочный коэффициент эксцесса служит для сравнения на «крутость» выборочного распределения с нормальным распределением. Коэффициент эксцесса для случайной величины, распределённой по нормальному закону, равен 0.

Поэтому за стандартное значение выборочного эксцесса принимают $E_k^* = 0$. Если $E_k^* < 0$, то полигон имеет более пологую вершину по сравнению с нормальной кривой ; если $E_k^* > 0$, то полигон более крутой по сравнению с нормально кривой.

Вычисление числовых характеристик выборки

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i - \overline{x_в}$	$\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 n_i$	$\left(x_i - \overline{x_в}\right)^3 n_i$	$\left(x_i - \overline{x_в}\right)^4 n_i$
x_1	n_1					
□	□					
x_m	n_m					
	$\sum\limits_{i=1}^{m} n_i$	$\sum\limits_{i=1}^{m} x_i n_i$		$\sum\limits_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 n_i$	$\sum\limits_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^3 n_i$	$\sum\limits_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^4 n_i$

x_i -середина интервалов; n_i - частоты;

$\sum_{i=1}^{m} n_i = n$ - объём выборки; с помощью суммы $\sum_{i=1}^{m} x_i n_i$ находим $\overline{x_в}$

с помощью суммы $\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 n_i$ находим $D_в$ и $\sigma_в = \sqrt{D_в}$

с помощью суммы $\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^3 n_i$ находим A_s^*

С помощью суммы $\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^4 n_i$ находим E_k^*

Упрощённый способ вычисления статистических характеристик вариационных рядов

При больших значениях вариантов и соответствующих им частот вычисление выборочного среднего, дисперсии и выборочного моментов по приведённым ниже формулам приводит к громоздким вычислениям.

В этом случае условные варианты u_i, определяемые по формулам ,

$$u_i = \frac{x_i - c}{h}$$

где числа c и h выбираются произвольно. Чтобы упростить вычисления, в качестве c выбирают вариант, который имеет наибольшую частоту или находится в середине ряда. Число c называется **«ложным нулём»**. В качестве h выбирают число равное длине интервала (в случае интервального ряда) или наибольший общий делитель разностей $(x_i - c)$.

Для вычисления числовых характеристик выборки составляем таблицу

u_i	n_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$	$u_i^3 n_i$	$u_i^4 n_i$	$(u_i+1)^4 n_i$
u_1	n_1					
⊏	⊏					
u_m	n_m					
	$\sum_{i=1}^{m} n_i = n$	$\sum_{i=1}^{m} u_i n_i$	$\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i$	$\sum_{i=1}^{m} u_i^3 n_i$	$\sum_{i=1}^{m} u_i^4 n_i$	$\sum_{i=1}^{m} (u_i+1)^4 n_i$

Контроль:

$$\sum_{i=1}^{m} (u_i+1)^4 n_i = \sum_{i=1}^{m} u_i^4 n_i + 4\sum_{i=1}^{m} u_i^3 n_i + 6\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i + 4\sum_{i=1}^{m} u_i n_i + n$$

С помощью сумм, полученных в нижней строке таблицы, находим условные моменты:

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i n_i \qquad M_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i$$

$$M_3^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i^3 n_i \qquad M_4^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i^4 n_i$$

Числовые характеристики выборки вычисляем по формулам:

$$\overline{x_в} = M_1^* h + c \qquad D_в = \left(M_2^* - \left(M_1^*\right)^2 \right) \cdot h^2 \qquad \sigma_в = \sqrt{D_в}$$

$$A_s^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma_в^3} \qquad E_k^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_в^4} - 3$$

где μ_3^* и μ_4^* находим по формулам: $\mu_3^* = \left(M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2\left(M_1^*\right)^3 \right) \cdot h^3$

$$\mu_4^* = \left(M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6\left(M_1^*\right)^2 \cdot M_2^* - 3\left(M_1^*\right)^4 \right) \cdot h^4$$

Пример. **Вычислить числовые характеристики выборки, рассмотренной в примере 2.**

В качестве вариантов x_i возьмём середины интервалов.

Перейдём к условным вариантам.

Вариант, значение которого 0,04, имеет наибольшую частоту и находится в середине модального ряда. Примем его за «ложный ноль» (начало отсчёта).

Условные варианты найдём по формуле:

$$u_i = \frac{x_i - c}{h}$$, где

c = 0,04 h = 0,6

Составим расчётную таблицу:

x_i	n_i	u_i	$u_i \cdot n_i$	$u_i^2 \cdot n_i$	$u_i^3 \cdot n_i$	$u_i^4 \cdot n_i$	$(u_i+1)^4 \cdot n_i$
-1,76	2	-3	-6	18	-54	162	32
-1,16	6	-2	-12	24	-48	96	6
-0,56	11	-1	-11	11	-11	11	0
0,04	15	0	0	0	0	0	15
0,64	11	1	11	11	11	11	176
1,24	3	2	6	12	24	48	234
1,84	2	3	6	18	54	162	512
$\sum$	50		-6	94	-24	490	984

Контроль: $\sum_{i=1}^{m}(u_i+1)^4 n_i = \sum_{i=1}^{m} u_i^4 n_i + 4\sum_{i=1}^{m} u_i^3 n_i + 6\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i + 4\sum_{i=1}^{m} u_i n_i + n =$

$= 490 + 4\cdot(-24) + 6\cdot 94 + 4\cdot(-6) + 50 = 984$ $\longrightarrow$ расчёты проведены верно.

По данным таблицы находим условные моменты:

$$M_1^* = -\frac{6}{50} = -0{,}12 \qquad M_2^* = \frac{94}{50} = 1{,}88$$

$$M_3^* = -\frac{24}{50} = -0{,}48 \qquad M_4^* = \frac{490}{50} = 9{,}8$$

Находим числовые характеристики выборки:

$$\overline{x_в} = M_1^* h + c = -0{,}12\cdot 0{,}6 + 0{,}04 = -0{,}032$$

$$D_в = \left(M_2^* - \left(M_1^*\right)^2 \right) \cdot h^2 = \left(1{,}88 - (-0{,}12)^2\right) \cdot 0{,}6^2 = 0{,}6716$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{0{,}672} = 0{,}8195$$

Вычислим центральные моменты третьего и четвёртого порядка:

$$\mu_3 = \left(M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2\left(M_1^*\right)^3\right) \cdot h^3 = \left(-0{,}48 - 3 \cdot (-0{,}12) \cdot 1{,}88 + 2(-0{,}12)^3\right) \cdot 0{,}6^3 = 0{,}0418$$

$$\mu_4^* = \left(M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6\left(M_1^*\right)^2 \cdot M_2^* - 3\left(M_1^*\right)^4 \right) \cdot h^4 =$$

$$= \left(9{,}8 - 4 \cdot (-0{,}12) \cdot (-0{,}48) + 6(-0{,}12)^2 \cdot 1{,}88 - 3(-0{,}12)^4\right) \cdot 0{,}6^4 = 1{,}2127$$

Вычислим выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса:

$$A_s^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma_в^3} = \frac{0{,}0418}{0{,}8195^3} = 0{,}0759 \qquad E_k^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_в^4} - 3 = \frac{1{,}2127}{0{,}8195^4} - 3 = -0{,}3112$$