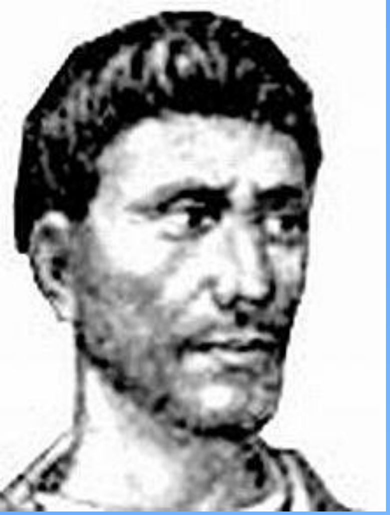
КОПИЯ .ЕСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ .

Линейно-Диофантово уравнение

$$ax + by = c$$
$$a \epsilon Z, b \epsilon Z, c \epsilon Z$$

Выполнил:
Ученик 9В2 класса
Лицея 1511 при НИЯУ МИФИ
Рогозин Руслан



Диофант.

Диофант был последним великим математиком античности . Вместе с тем он был одним из создателей новой алгебры, основывающейся не на геометрии , а на арифметике.

О подробностях его жизни практически ничего не известно. Но в Палатинской антологии содержится эпиграмма-задача, из которой можно сделать вывод, что Диофант прожил 84 года.

Основное произведение Диофанта — *Арифметика* в 13 книгах. К сожалению, сохранились только 6 первых книг из 13.

На результаты, полученные Диофантом, впоследствии опирались Ферма, Эйлер, Гаусс и др.

Решение уравнений.

Общее решение

$$\begin{cases} x = x_0 + bn \\ y = y_0 - an \end{cases} \qquad n \in Z$$

Алгоритм Евклида.

Алгоритм для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел. Пусть a и b — целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел

$$a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \cdots > r_n$$

определена тем, что каждое — это остаток от деления предыдущего числа на последующее, а предпоследнее делится на последнее нацело, то есть

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1 \\ b &= r_1 q_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3 \\ r_{k-2} &= r_{k-1} q_{k-1} + r_k \\ r_{n-1} &= r_n q_n \end{aligned}$$

Тогда НОД(*a*,*b*), наибольший общий делитель a и , b равен r_n, последнему ненулевому члену этой последовательности.

Например НОД(19,12)

19=12+7

12=7+5

7=5+2

5=2*2+1

2=1*2

Нод равен 1

Решим уравнение

$19x+12y=1$

Используем алгоритм Евклида.

Выразим НОД 19 и 12

1=5-2*2=(12-7)-(7-5)*2=(12-(19-12))-((19-12)-5)*2=(12-(19-12))-((19-12)-(12-7))*2=

(12-(19-12))-((19-12)-(12-(12-(19-12))))*2=12*2-19-(19-12-(12*2-19))*2=

12*2-19-(19-12-12*2+19)*2=12*2-19-(2*19-3*12)*2=12*8-5*19

Получаем решение этого уравнения

$X=-5-12n$

$y=8+19n$

Но решать через алгоритм Евклида довольно сложно и неудобно . Ведь легко можно ошибиться .

	1	0	19
1(частное от деления)	0	1	12
1	1	-1	7(остаток)
1	-1	2	5
2	2	-3	2
	-5	8	1

Очевидно , что данная таблица вытекает из алгоритма Евклида . Она ,можно сказать, упрощенная запись.

Правила при решении уравнений.

1. Если с не делится на НОД(a,b), то уравнение не имеет решений.
2. Если с делится на НОД(a,b) , то прежде всего следует упростить это уравнение , разделив его обе части на (a,b).
3. Чтобы найти решение уравнения при взаимно простых a и b нужно сначала найти решения у $ax + by = 1$, а потом умножить на c.

Примеры решений уравнений.

Решить :

1. $3x+5y=13$

$3x+5y=1$

НОД(3,5)

$5=3+2$

$3=2+1$

$2=1*2$

НОД равен1 .Все числа- взаимно простые.

Решаем уравнение $3x+5y=1$

	x	y	c
	0	1	5
1	1	0	3
1	-1	1	2
	2	-1	1

$X=2+5n$

$Y=-1-3n$

Решение начального уравнения $x=26+5n$

$y=-13-3n$

2.Один из коэффициентов меньше нуля.

$11x-8y=3$

Все числа взаимно простые.

Замена $y=-z$

$11x+8z=3$

$11x+8z=1$

	x	z	c
	1	0	11
1	0	1	8
2	1	-1	3
1	-2	3	2
	3	-4	1

$z=-12-11n$

$x=9+8n$

Используя равенство $y=-z$ получаем

$x=9+8n$

$y=12+11n$

Цепные дроби.

Обратимся к алгоритму Евклида. Из равенств вытекает следующее:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b}$$, но $$\frac{r_1}{b} = \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$$ $$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1}$$ значит $$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \frac{r_1}{r_2}}}$$

Продолжим этот процесс до тех пор , пока не придем к знаменате q_0 . Теперь обыкновенная выглядит следу

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{+\cfrac{1}{q_n}}}}$$

Из-за громоздкой записи применяют компактную запи $[q_0; q_1; q_2; \dots; q_n]$

Если оборвать дробь на знаменате q_k ,то ,обращая её в обыкновенную дробь, получи к подходящую дробь . Рассмотрим это на следующем примере:

$$\frac{40}{31} = 1 + \frac{9}{31} = 1 + \frac{1}{\frac{31}{9}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \frac{4}{9}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{9}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = [1;3;2;4]$$

n=3 . Отбросим $\frac{1}{4}$ и обратим в обыкновенную

$$1 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 1 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7}$$

Заметим, что $|9*31-7*40|=1$ следовательно 7 и -9 являются решением уравнения $40x+31y=1$.

Числитель и знаменатель k подходящей дроби являются решением линейно-Диофантовых уравнений.

Примеры решений уравнений

19x

$$\frac{19}{12}=1+\frac{7}{12}=1+\frac{1}{\frac{12}{7}}=1+\frac{1}{1+\frac{5}{7}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{5}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{5}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{5}{2}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$$

$$[1;1;1;2;2]$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}=1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

Получаем решение этого уравнения

$X=-5-12n$

$y=8+19n$

Некоторые методы для решения уравнений.

1. $63x - 100y = 90$

Уменьшим 90 в 6 раз , получим

63x-100y=15

63*5=315

100*3=300

Получим $\begin{cases} x = 30 + 100t \\ y = 18 + 63t \end{cases}$

2. $24x + 19y = 826$

Разделим 826 на 19 с остатком   826=19*43+9

Перепишем уравнение $24x + 19 * (y - 43) = 9$

z=y-43

24x+19z=9

x=36-19t

z=-45+24t

К подстановкам

$$\begin{cases} x = 36 - 19t \\ y = -2 + 24t \end{cases}$$

Задачи.

1.

- Тринадцать пиратов добыли некоторое количество золотых монет . Они пытались разделить их поровну, но оказалось, что остается 8 штук . Когда они снова стали делить монет , после того как два пирата упали за борт и были съедены акулами, оказалось, что остается 3 монеты. Потом в перестрелке погибли ещё 3 пирата, но , когда 8 пиратов стали делить монеты , оказалось, что остается 5 штук. Сколько было монет?

Решение.

Х-общее количество монет

Когда было 13 пиратов : k – количество монет на одного пирата, тогда

$13k + 8 = x$

Когда осталось 11 пиратов : y – количество монет на одного пирата , тогда

$11y + 3 = x$

Приравнивая ,получаем $13k + 8 = 11y + 3$

$11y - 13k = 5$

$11y - 13k = 1$

$$\frac{13}{11} = 1 + \frac{2}{11} = 1 + \frac{1}{\frac{11}{2}} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}$$

Значение k подходящей дроби :

$$1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\begin{cases} y = 30 + 13t \\ k = 25 + 11t \end{cases}$$

X= 30*11+3=333

Ответ: минимальное количество 333 штук .

2.Крестьянка несла на базар корзину яиц . Неосторожный всадник, обгоняя женщину, задел корзину, и все яйца разбились . Желая возместить ущерб. Он спросил у крестьянки про количество яиц . Она ответила, что не знает. Но когда она раскладывала их по 2, по 3, по 4, по 5, по6 , то каждый раз оставалось одно яйцо лишним , а когда она их разложила по 7 , лишних не осталось. Сколько было яиц в корзине?

Решение.

Решайте !!!

•

Ответ: наименьшее количество 301.

3.

Найти все натуральные числа в пределах от 1 до 100000, делящиеся на 73 и оканчивающиеся на 001.

Решение.

Каждое число имеет вид 73 x при некотором натуральном x, оно может быть представлено в виде 1000y+1

Имеем $73x = 1000y + 1$

$73x + 1000z = 1$

z=-y

	x	z	c
	0	1	1000
13	1	0	73
1	-13	-1	51
2	14	2	22
3	-41	3	7
	137	-10	1

- $\begin{cases} x = 137 + 1000t \\ y = 1 + 37t \end{cases}$

Числа имеют вид :

73x=73*(137+1000t)=10001+73000t

Это должно удовлетворять :

$1 \leq 10001 + 73000t \leq 100000$

При t=0   10001 , при t=1   83001

Другие t не удовлетворяют условию, поэтому искомые числа 10001 и 830001.

Ответ:10001 и 83001.