# Линии на плоскости

**Выполнила:**

Студентка 11 группы

по направлению подготовки:

«Организация работы с молодежью»

института управления ОГАУ

Андреева Татьяна Викторовна.

# План:

I. Астроида
II. Кардиоида
III. Конхоида Никомеда
IV. Лемниската Бернулли
V. Спираль Архимеда
VI. Улитка Паскаля
VII. Спираль Циклоида

# Астроида

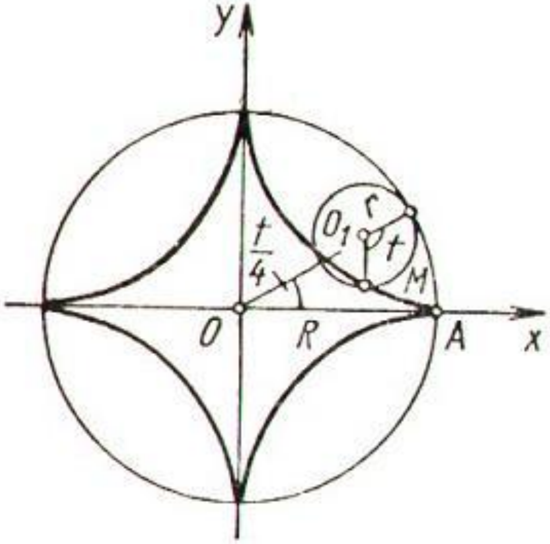



Рис. 7.2

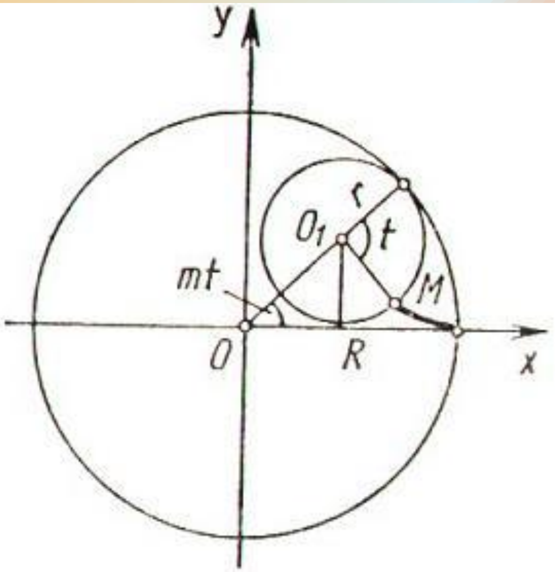



Рис. 7.3

Уравнение в декартовых координатах:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$

Параметрические уравнения:

$$X = R\cos^3(t/4), \quad y = R\sin^3(t/4).$$

Площадь, ограниченная астроидой:

$$S = \frac{3}{8}\pi R^2.$$

Длина дуги от точки А до произвольной точки M(t):

$$s_t = \frac{3}{2} R \sin^2 \frac{t}{2},$$

Длина всей астроиды: s = 6R.

Радиус кривизны в произвольной точке: $R_k = \frac{3}{2} R \sin \frac{t}{2}$

# Кардиоида

Уравнение в декартовых координатах:

$$x = 2r\cos t - r\cos 2t, \quad y = 2r\sin t - r\sin 2t.$$

Параметрические уравнения: $\rho = 2r(1-\cos\varphi).$

Полярное уравнение (с полюсом в точке А):

$$\left(x^2 + y^2 + 2rx\right)^2 = 4r^2\left(x^2 + y^2\right).$$

Длина дуги от точки А до произвольной точки М:

$$s_\varphi = 16r\sin^2(\varphi/4).$$

Длина всей кардиоиды: s = 16r.

Площадь, ограниченная кардиоидой: $S = 6\pi r^2.$

Радиус кривизны в произвольной точке: $R_k = \frac{8}{3}r\sin\frac{\varphi}{2}.$

# Конхоида Никомеда

Конхоида Никомеда - линия, полученная при увеличении или уменьшении каждого радиуса-вектора точек данной прямой y = a на одну и ту же величину l, т. е.

$$OM_1 = OK + l,\ OM_2 = OK - l \quad \forall K.$$

Уравнение в декартовых координатах:

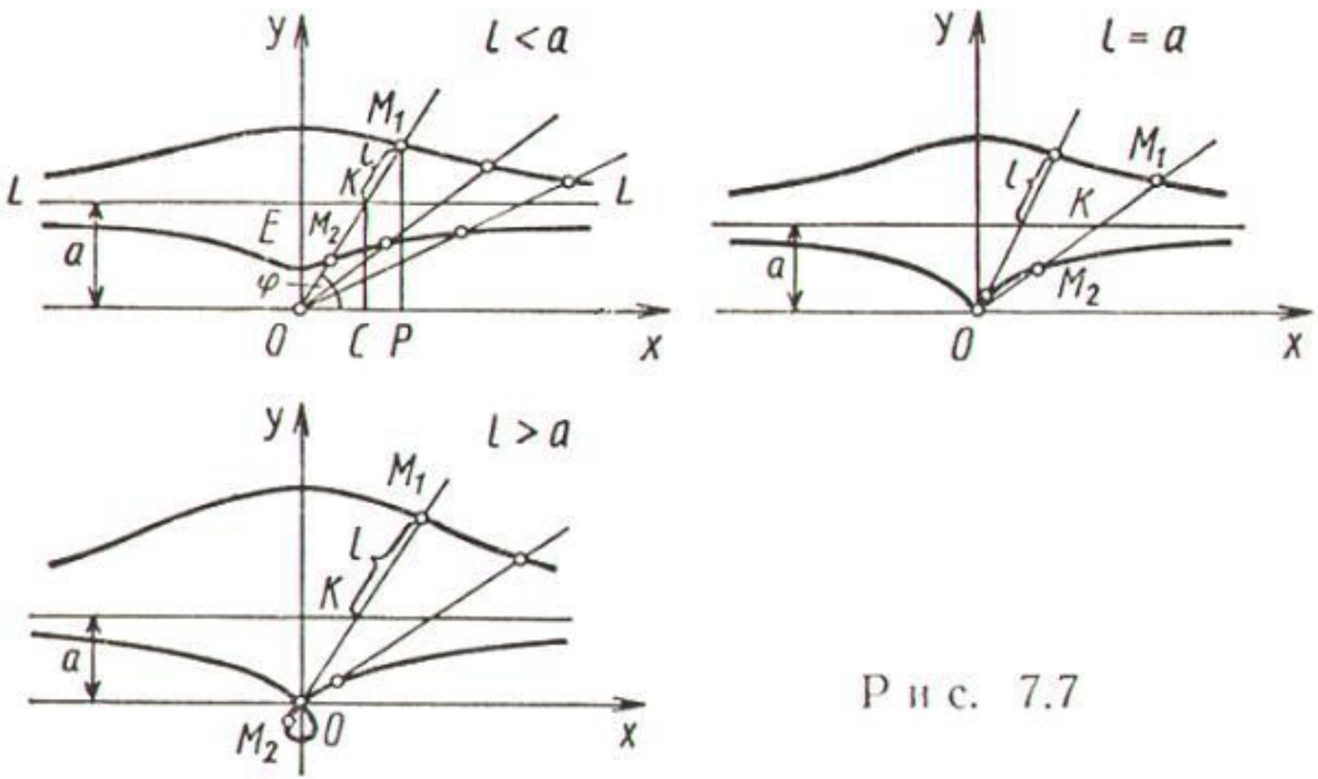
$$\left(x^2 + y^2\right)\left(y - a\right)^2 - l^2 y^2 = 0.$$

Полярное уравнение:

$$\rho = \frac{a}{\sin\varphi} \pm l.$$

Асимптота: y = a.

# Конхоида Никомеда




Р и с. 7.7

# Лемниската Бернулли

Уравнение в декартовых координатах:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0.$$

Радиус кривизны:

$$R=\rho/(3\cos 2\varphi).$$

Полярное уравнение: $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi.$

Длина дуги лемнискаты между точками, для которых и

$$\varphi_1=0$$

(эллиптический интервал первого рода).

Площадь сектора между осью и радиусом-вектором, соответствующим углу

$$s_\varphi=a\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}$$

# Лемниската Бернулли

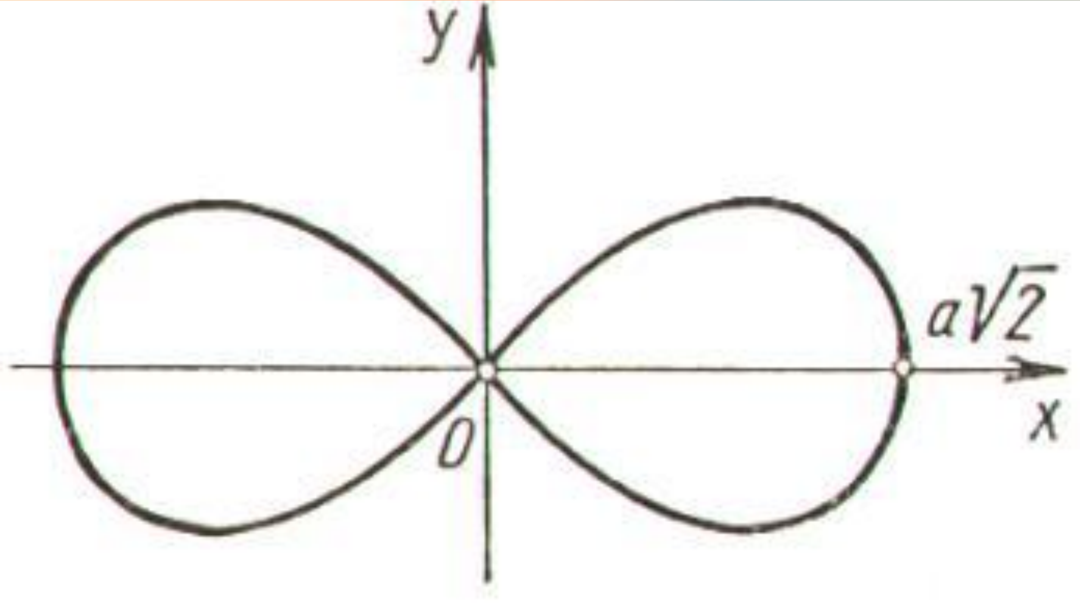



Рис. 7.8

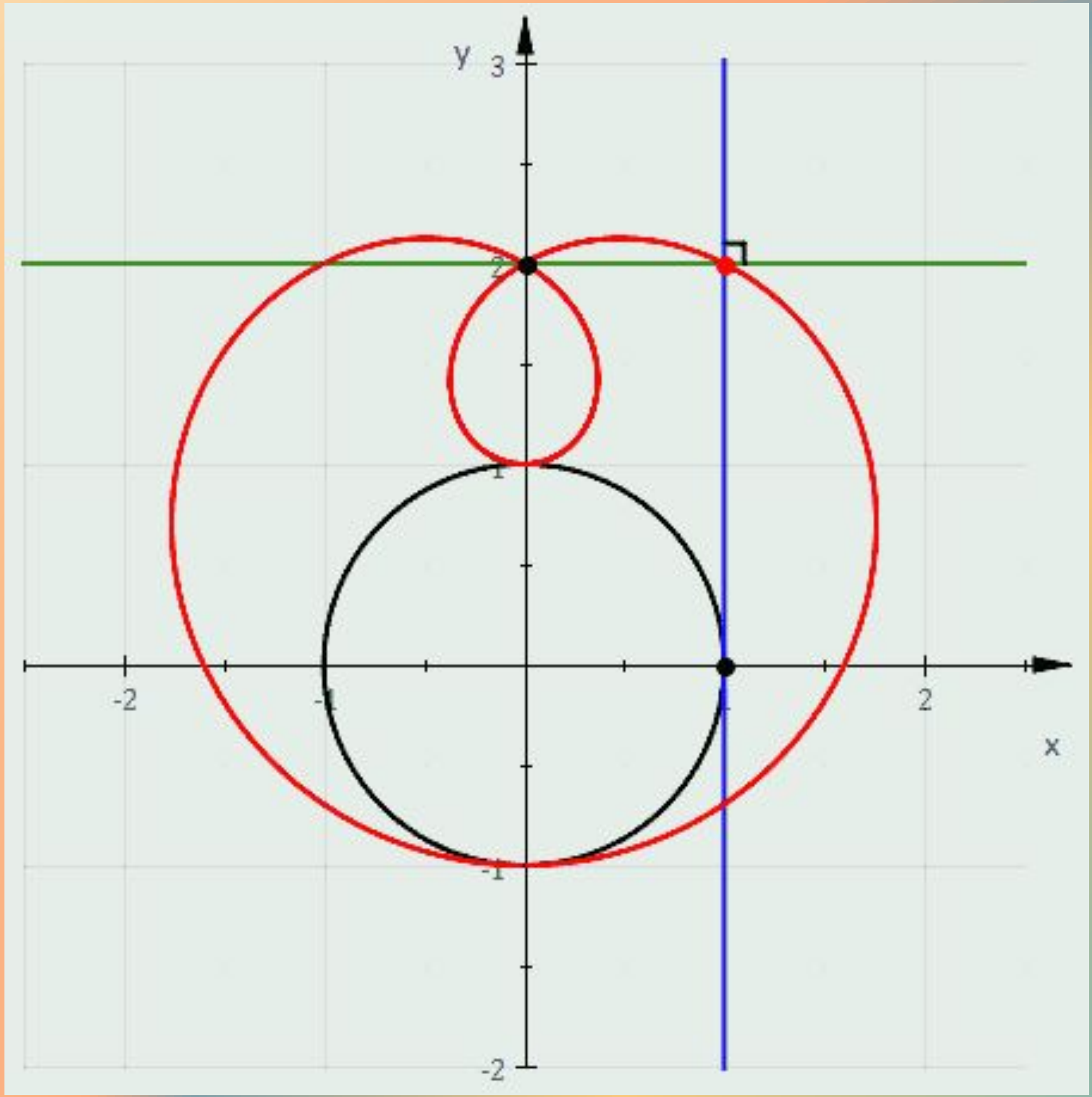
# Спираль Архимеда $(\rho = a\varphi)$

Длина дуги между точками $M_1(\rho_1;\ \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2;\ \varphi_2)$:

$$s = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Площадь сектора, ограниченного дугой спирали Архимеда и двумя радиусами-векторами и , соответствующими углам $\varphi_1$ и $\varphi_2$ : $S = \left(\rho_2^3 - \rho_1^3\right)/(6a)$.

Площадь, ограниченная полярной осью и n-м витком спирали: $S_n = \frac{4}{3}\pi^3 a^2\left(n^3 - (n-1)^3\right)$.



y
3
2
1
-1
-2
-2
-1
2
x

# Улитка Паскаля

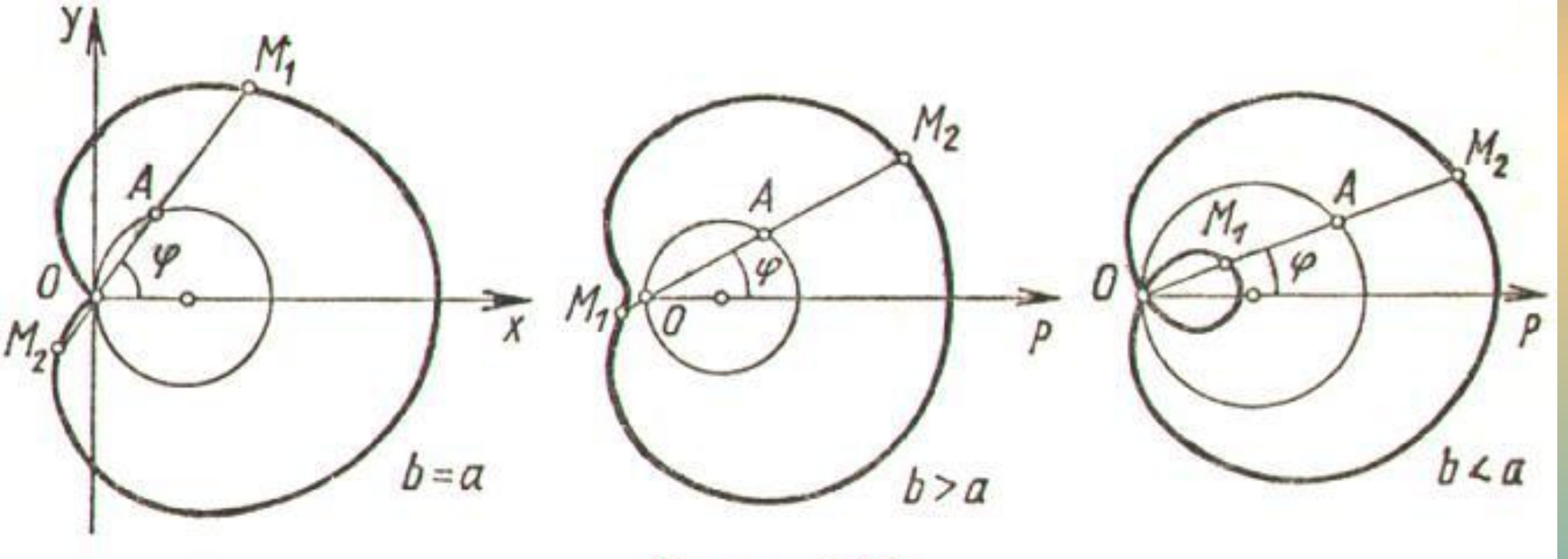



Рис. 7.13

На произвольном луче ОА от точки А

пересечения его с окружностью $\rho = 2a\cos\varphi$

по обе стороны откладываются отрезки $AM_1 = AM_2 = l = 2b.$

Улитка Паскаля - множество точек Mi.

Уравнение в декартовых координатах:

$$\left(x^2 + y^2 - 2ax\right)^2 - l^2\left(x^2 + y^2\right) = 0.$$

Уравнение в полярных координатах: $\rho = 2a\cos\varphi \pm l.$

Площадь, ограниченная улиткой (для случая l > 2a):

$$S = \pi\left(2a^2 + l^2\right).$$

При l = 2a получается кардиоида.

# Спираль Циклоида

Циклоида - линия, которую описывает точка М, расположенная на расстоянии d от центра круга радиуса a, катящегося без скольжения по прямой. Если d = a, циклоида называется обыкновенной, d > a, - удлиненной, d < a, - укороченной.

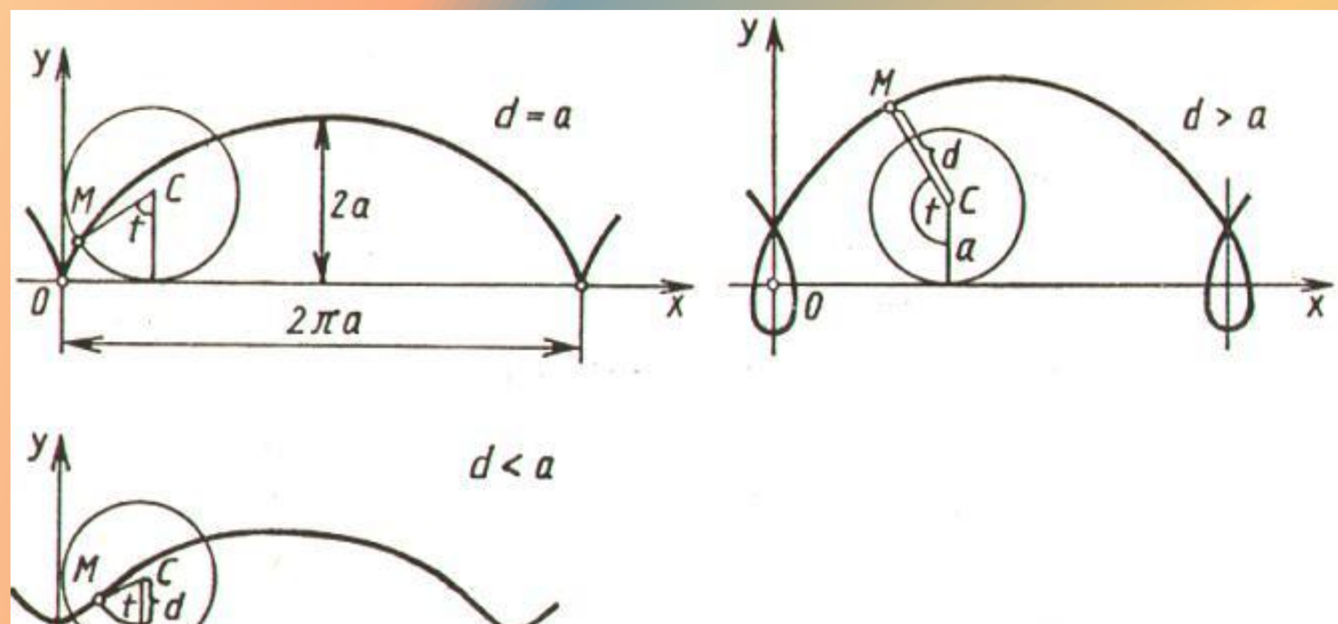



Рис. 7.15

# *Обыкновенная циклоида*

Параметрические уравнения:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Уравнение в декартовых координатах:

$$x = a \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Длина дуги циклоиды от исходной точки (t = 0) до произвольной точки M (t):

$$s_t = 8a \sin^2(t/4).$$

Длина одной арки циклоиды: s = 8a.

Площадь, ограниченная одной аркой циклоиды и ее базисом:

$$S = 3\pi a^2.$$

Радиус кривизны в произвольной точке:

$$R = 4a \sin(t/2).$$

# *Удлиненная (укороченная) циклоида*

Параметрические уравнения: x = at - в sin t, y = a - в cos t.

## *Циссоида Диоклеса*

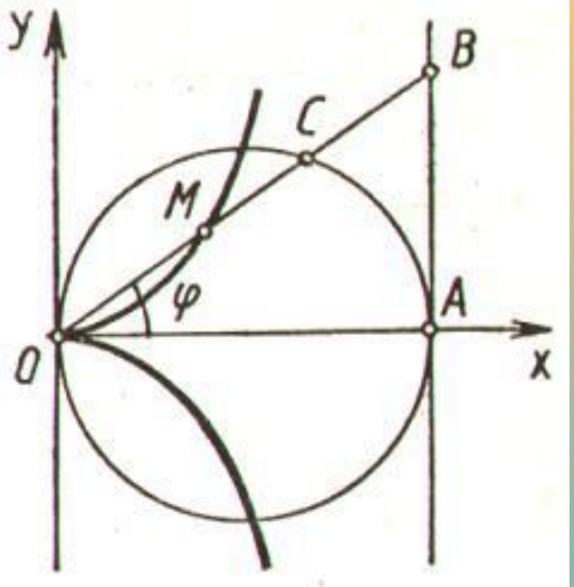



Рис. 7.16

# Спасибо за внимание