

# Линии на плоскости



**Выполнила:**

Студентка 11 группы  
по направлению подготовки:

«Организация работы с  
молодежью»

института управления ОГАУ

Андреева Татьяна

Викторовна.

# План:



- I. Астроида
- II. Кардиоида
- III. Конхоида Никомеда
- IV. Лемниската Бернулли
- V. Спираль Архимеда
- VI. Улитка Паскаля
- VII. Спираль Циклоида

# Астроида

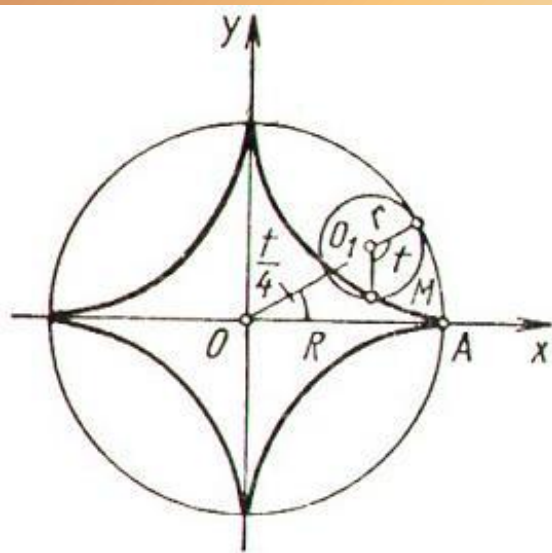


Рис. 7.2

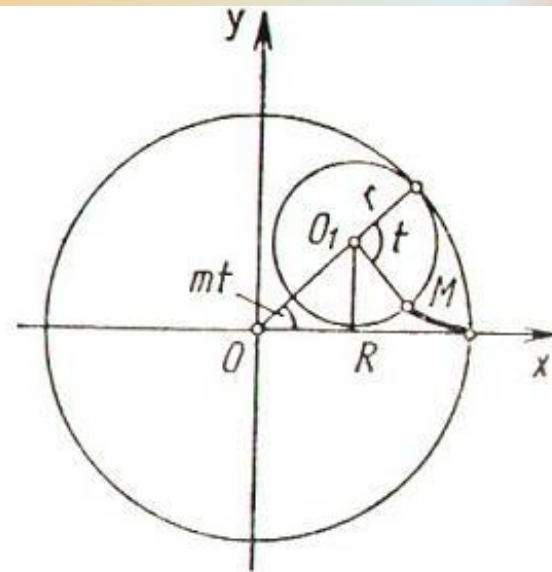


Рис. 7.3

Уравнение в декартовых координатах:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$$

Параметрические уравнения:

$$X = R \cos^3(t/4), \quad y = R \sin^3(t/4).$$

Площадь, ограниченная астроидой:

$$S = \frac{3}{8} \pi R^2.$$

Длина дуги от точки А до произвольной точки  
M(t):

$$s_t = \frac{3}{2} R \sin^2 \frac{t}{2},$$

Длина всей астроиды:  $s = 6R$ .

Радиус кривизны в произвольной точке:

$$R_x = \frac{3}{2} R \sin \frac{t}{2}$$

# Кардиоида

Уравнение в декартовых координатах:

$$x = 2r \cos t - r \cos 2t, \quad y = 2r \sin t - r \sin 2t.$$

Параметрические уравнения:  $\rho = 2r(1 - \cos \varphi)$ .

Полярное уравнение (с полюсом в точке А):

$$(x^2 + y^2 + 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2).$$

Длина дуги от точки А до произвольной точки М:

$$s_{\varphi} = 16r \sin^2(\varphi/4).$$

Длина всей кардиоиды:  $s = 16r$ .

Площадь, ограниченная кардиоидой:

$$S = 6\pi r^2.$$

Радиус кривизны в произвольной точке:

$$R_k = \frac{8}{3} r \sin \frac{\varphi}{2}.$$

# Конхоида Никомеда

Конхоида Никомеда - линия,  
полученная при увеличении или  
уменьшении каждого радиуса-вектора  
точек данной прямой  $y = a$  на одну и ту  
же величину  $l$ , т. е.

$$OM_1 = OK + l, OM_2 = OK - l \quad \forall K.$$

Уравнение в декартовых координатах:

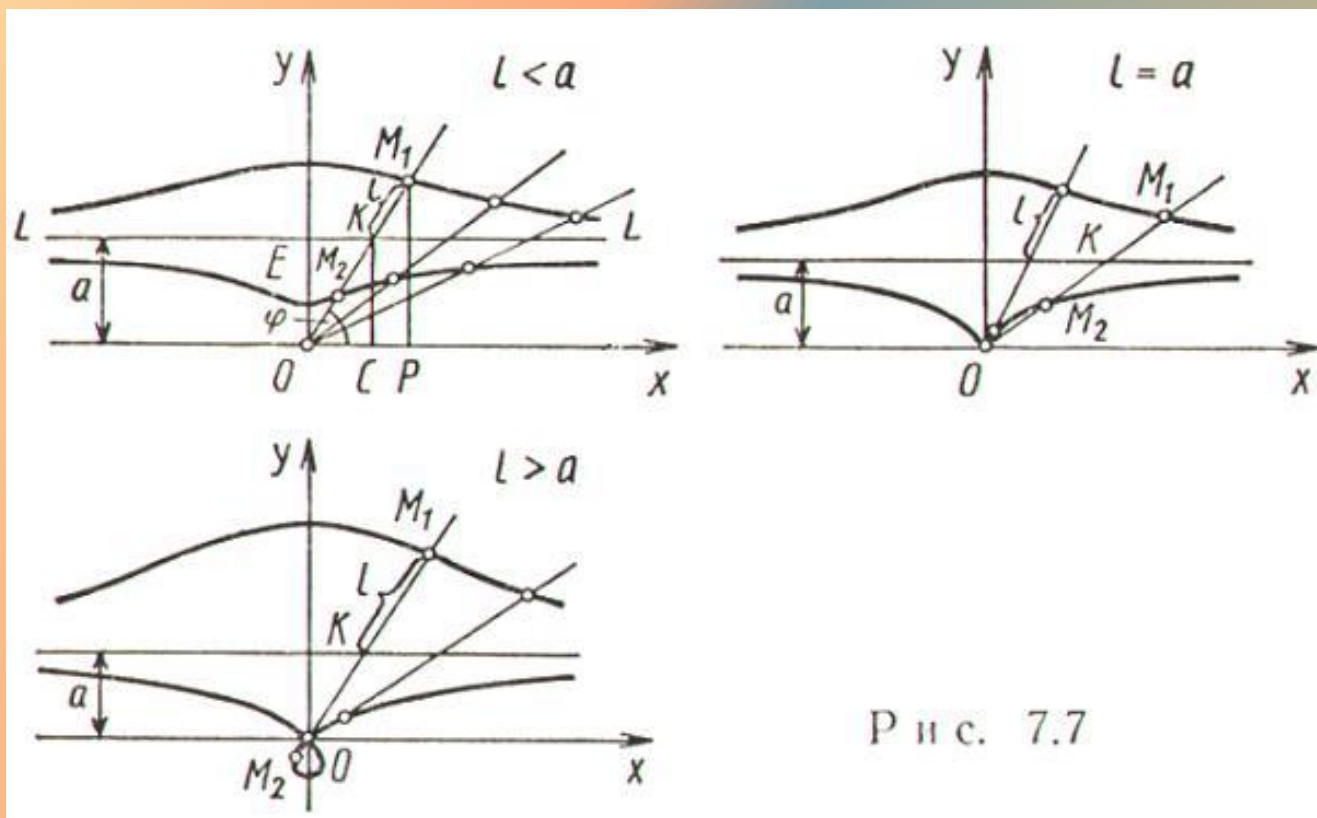
$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 - l^2 y^2 = 0.$$

Полярное уравнение:

$$\rho = \frac{a}{\sin \varphi} \pm l.$$

Асимптота:  $y = a$ .

# Конхоида Никомеда



Р и с. 7.7

# Лемниската Бернулли

Уравнение в декартовых координатах:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Радиус кривизны:

$$R = \rho / (3 \cos 2\varphi).$$

Полярное уравнение:

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Длина дуги лемнискаты между точками, для которых и

$$\varphi_1 = 0$$

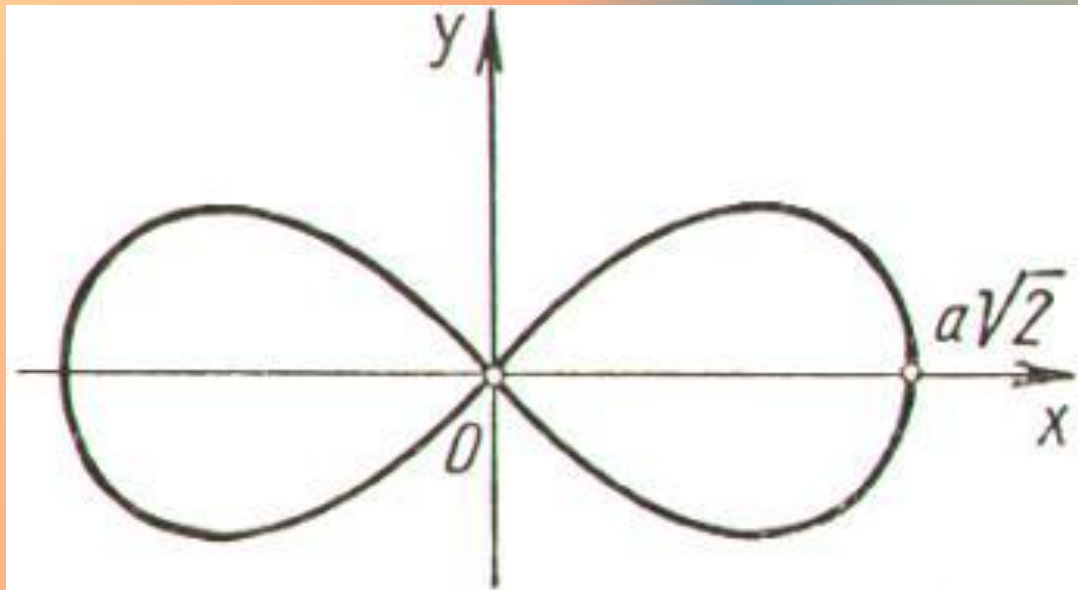
(эллиптический интервал первого рода).

Площадь сектора между осью и радиусом-вектором, соответствующим углу

$$S_\varphi = a^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \varphi}}$$



# Лемниската Бернулли



Р и с. 7.8

# Спираль Архимеда

$$(\rho = a\varphi)$$

Длина дуги между точками

$$M_1(\rho_1; \varphi_1)$$

и

$$M_2(\rho_2; \varphi_2):$$

$$s = \frac{a}{2} \left[ \varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}) \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Площадь сектора, ограниченного дугой спирали Архимеда и двумя радиусами-векторами и , соответствующими углам

$$\varphi_1$$

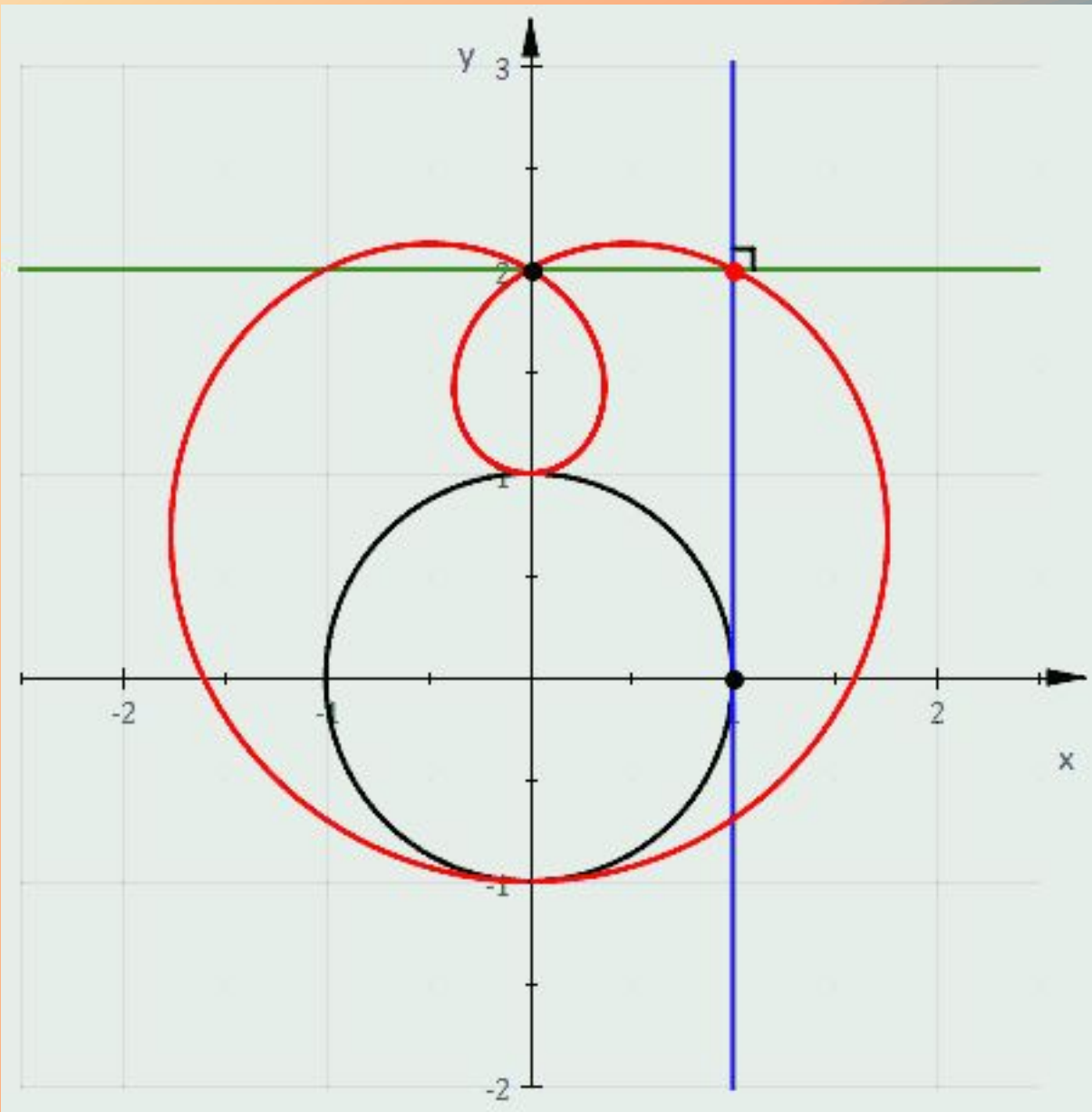
и

$$\varphi_2 :$$

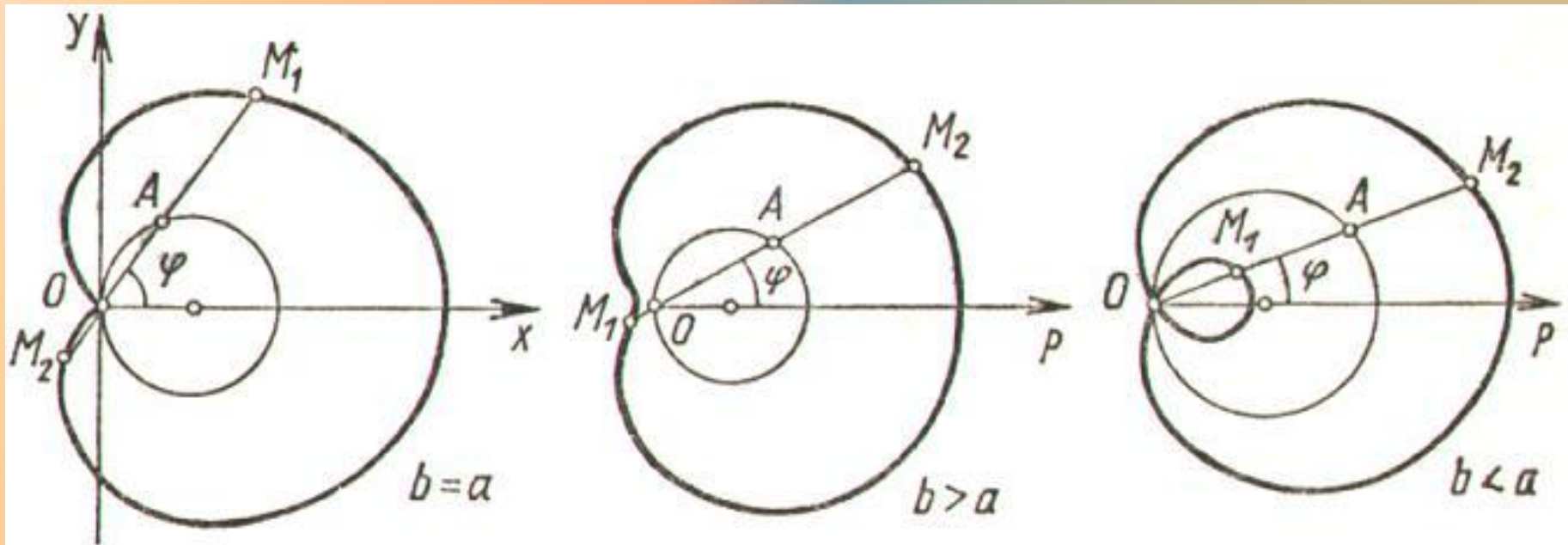
$$S = (\rho_2^3 - \rho_1^3) / (6a).$$

Площадь, ограниченная полярной осью и n-м витком спирали:

$$S_n = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 (n^3 - (n-1)^3).$$



# Улитка Паскаля



Р и с. 7.13

На произвольном луче OA от точки A

пересечения его с окружностью

$$\rho = 2a \cos \varphi$$

по обе стороны откладываются отрезки

$$AM_1 = AM_2 = l = 2b.$$

Улитка Паскаля - множество точек  $M_i$ .

Уравнение в декартовых координатах:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Уравнение в полярных координатах:

$$\rho = 2a \cos \varphi \pm l.$$

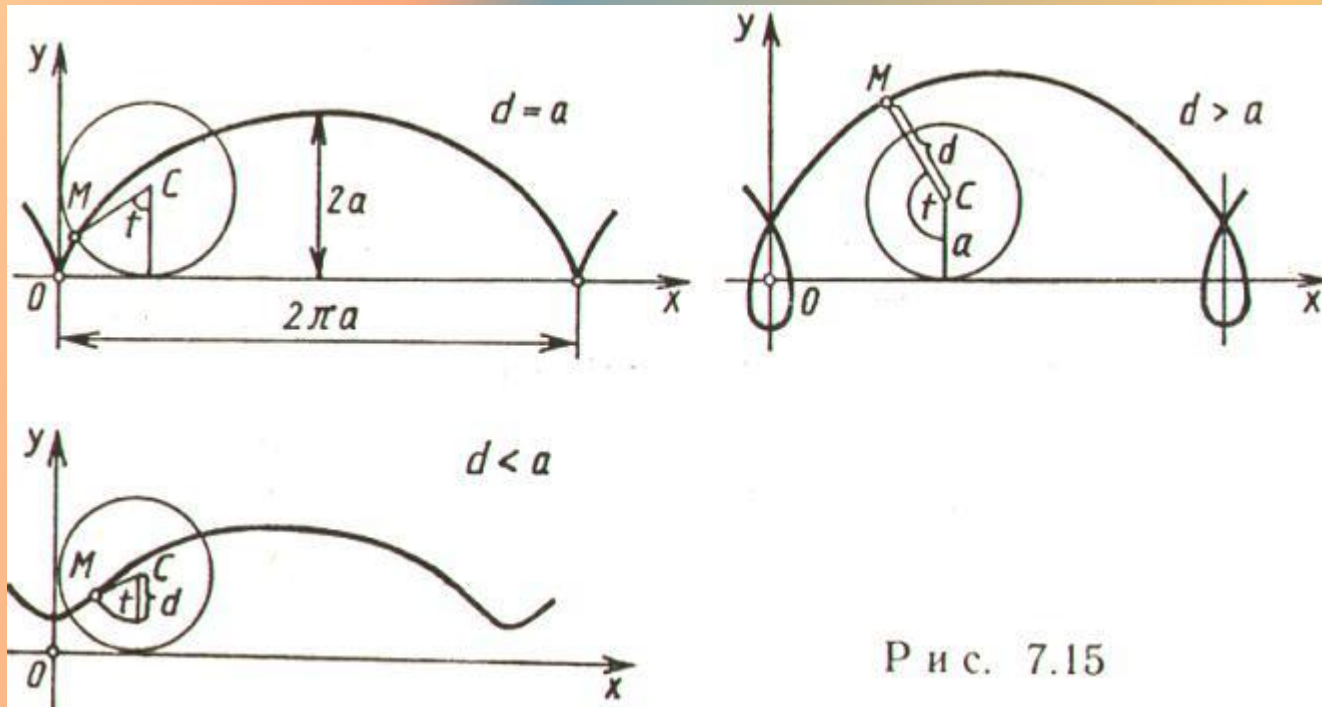
Площадь, ограниченная улиткой (для случая  $l > 2a$ ):

$$S = \pi(2a^2 + l^2).$$

При  $l = 2a$  получается кардиоида.

# Спираль Циклоида

Циклоида - линия, которую описывает точка  $M$ , расположенная на расстоянии  $d$  от центра круга радиуса  $a$ , катящегося без скольжения по прямой. Если  $d = a$ , циклоида называется обыкновенной,  $d > a$ , - удлинненной,  $d < a$ , - укороченной.



Р и с. 7.15

# Обыкновенная циклоида

Параметрические уравнения:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Уравнение в декартовых координатах:

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Длина дуги циклоиды от исходной точки ( $t = 0$ ) до произвольной точки  $M(t)$ :

$$s_t = 8a \sin^2(t/4).$$

Длина одной арки циклоиды:  $s = 8a$ .

Площадь, ограниченная одной аркой циклоиды и ее базисом:

$$S = 3\pi a^2.$$

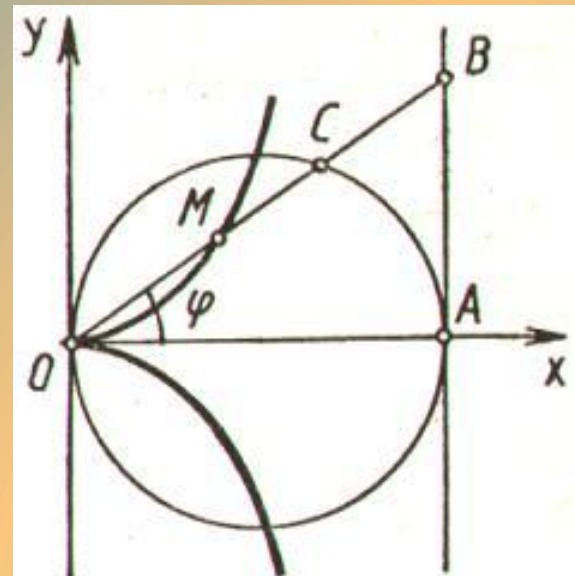
Радиус кривизны в произвольной точке:

$$R = 4a \sin(t/2).$$

## *Удлиненная (укороченная) циклоида*

Параметрические уравнения:  $x = at - b \sin t$ ,  $y = a - b \cos t$ .

## *Циссоида Диоклеса*



Р и с. 7.16



Спасибо за внимание

