Логарифмы

1) Вычислить:

$$\log_{14} 19 \cdot \log_{15} 14 \cdot \log_{16} 15 \cdot \log_{17} 16 \cdot \log_{18} 17 \cdot \log_{19} 18;$$

Решение:

$$1. \log_{14} 19 \cdot \log_{15} 14 = \frac{\log_{15} 19}{\log_{15} 14} \cdot \log_{15} 14 = \log_{15} 19;$$

$$2. \log_{15} 19 \cdot \log_{16} 15 = \frac{\log_{16} 19}{\log_{16} 15} \cdot \log_{16} 15 = \log_{16} 19;$$

$$3. \log_{16} 19 \cdot \log_{17} 16 = \frac{\log_{17} 19}{\log_{17} 16} = \log_{17} 19;$$

$$4. \log_{17} 19 \cdot \log_{18} 17 = \frac{\log_{18} 19}{\log_{18} 17} \cdot \log_{17} 18 = \log_{18} 19;$$

$$5.\log_{18}19\cdot\log_{19}18=1;$$

Ответ: 1.

2) Вычислить:

$$7^{1-\sqrt[5]{(\log_7 2)^3}}\cdot 2^{2+\sqrt[5]{(\log_2 7)^2}};$$

Решение:

$$7^{1-\sqrt[5]{(\log_7 2)^3}}\cdot 2^{2+\sqrt[5]{(\log_2 7)^2}}=$$

$$=\frac{7\cdot 4}{7^{(\log_7 2)^{\frac{2}{3}}}}\cdot 2^{(\log_2 7)^{\frac{2}{5}}}=\frac{7\cdot 4}{7^{\log_7 2\cdot\frac{1}{(\log_7 2)^{\frac{2}{5}}}}}\cdot 2^{(\log_7 2)^{\frac{2}{5}}}=\frac{7\cdot 4}{\frac{1}{2^{(\log_7 2)^{\frac{2}{5}}}}}\cdot 2^{(\log_7 2)^{\frac{2}{5}}}=28;$$

Ответ: 28.

3) Вычислить:

$$\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5};$$

Решение:

1.Замена: $\log_{30} 5 = \dfrac{1}{\log_5 30}; \qquad \log_6 5 = \dfrac{1}{\log_5 6};$

$$\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5} = (\log_5 30)^2 - \log_5 150 \cdot \log_5 6;$$

2.Найдем отдельно каждое слагаемое:

$$\log_5 30 = \log_5 5 \cdot 6 = \log_5 6 + 1;$$

$$\log_5 150 = \log_5 25\cdot 6 = \log_5 25 + \log_5 6 = 2 + \log_5 6;$$

Подстановка:

$$(1+\log_5 6)^2 - (2+\log_5 6)\cdot\log_5 6 =$$

$$= 1 + 2\log_5 6 + (\log_5 6)^2 - 2\log_5 6 - (\log_5 6)^2 = 1;$$

Ответ: 1.

4) Найти $\log_2 \dfrac{2x}{2^x}$ ***при условии:***

$$\left|\log_{\sqrt{2}} x^{\frac{x}{2}} - 2\cdot\log_2 x\right| + \left\|2-x\right| - \left|\log_2 x\right\| \le (x-2)\cdot\log_8 x^3;$$

Решение:

$$1.(x-2)\cdot\log_8 x^3=(x-2)\cdot\log_{2^3} x^3=(x-2)\cdot\log_2 x;$$

$$2.\log_{\sqrt{2}} x^{\frac{x}{2}}=\frac{x}{2}\cdot\log_{\sqrt{2}} x=x\cdot\log_2 x;$$

$$\left|x\cdot\log_2 x-2x\cdot\log_2 x\right|+\left|\left|2-x\right|-\left|\log_2 x\right|\right|\le(x-2)\cdot\log_2 x;$$

$$\left|(x-2)\cdot\log_2 x\right|+\left|\left|2-x\right|-\left|\log_2 x\right|\right|\le(x-2)\cdot\log_2 x;$$

$$1).\begin{cases}(x-2)\cdot\log_2 x=\left|(x-2)\cdot\log_2 x\right|,\\ 2-x+\log_2 x=0;\end{cases}$$

$$2).\begin{cases}(x-2)\cdot\log_2 x \geq 0,\\ 2-x+\log_2 x=0;\end{cases}$$

Получаем, что $\log_2 x = x-2;$

$$3.\log_2 \frac{2x}{2^x} = 1+\log_2 x - x = 1+x-2-x=-1;$$

Ответ: -1.

5) Известно, что $a^2+b^2=7ab.$

Доказать, что $\ln\frac{a+b}{3}=\frac{\ln a+\ln b}{2}.\quad (a>0, \mathrm{b}>0)$

Решение:

$$a^2 + b^2 - 7ab = 0;$$

$$\left(a^2 + b^2 + 2ab\right) - 9ab = 0;$$

$$\left(a + b\right)^2 = 9ab;$$

$$a + b = 3\sqrt{ab};$$

Получаем: $\ln\frac{3\sqrt{ab}}{3} = \frac{\ln ab}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln ab = \frac{1}{2}\ln ab,$

что и требовалось доказать.

6) Какое из чисел больше: $\sqrt{11}$ ***или*** $9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_8 2}$ ***?***

Вычислим: $\sqrt{11} \approx 3{,}31662;$

$$9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_8 2} = 9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)} \cdot 9^{\frac{1}{2}\log_8 2^3} = 9^{\frac{1}{2}\log_3 10-1} \cdot 3 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 9^{\frac{1}{2}\log_3 10} = \frac{1}{3} \cdot 9\log_9 10 = \frac{10}{3} \approx 3,(3);$$

Ответ: второе число больше.

Задачи для самостоятельного решения

1) Вычислить значение $3^{\frac{\lg \lg 2}{\lg 3}}$.

Ответ: $\lg 2.$

2) Вычислить значение $2005^{\frac{\lg \log_2 64}{\lg 2005}}$.

Ответ: 6.

3) Вычислить $\dfrac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \dfrac{\log_3 216}{\log_8 3}.$

Ответ: 2.

4) Вычислить $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}.$

Ответ: 2.

5) Упростить выражение

$$5^{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10+2\sqrt{21}}.$$

Ответ: 6.

6) Вычислить

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\log_{\sqrt{6}+7}\left(2\sqrt{6}+5\right).$$

Ответ: -1.

7) Известно, что $\log_a b = 7.$ ***Найти*** $\log_b\left(a^2 b\right).$

Ответ: $\dfrac{9}{7}.$

8) Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}.$ ***Найти*** $\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}.$

Ответ: $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

9) Вычислить $\log_{b^3\cdot\sqrt[7]{a^5}}\left(\frac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}}\right).$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}-21}{42+10\sqrt{3}}.$

10) Найдите $\log_{54}84,$ ***если*** $\log_7 12 = a, \log_{12} 24 = b.$

Ответ: $\frac{a+1}{a(8-5b)}.$

11) Даны числа p и q такие, что $p = \log_z y, q = \log_x y.$

Найти число $\log_{\left(\frac{xz}{y^2}\right)^3}\sqrt{xyz}.$

Ответ: 1). $\frac{p+q+pq}{6(p+q-2pq)}$, если p и q не равны нулю(p и q могут быть равны нулю только одновременно);

2). $\frac{1}{6}, p=q=0.$

12) Вычислить $\left(\log_{\frac{x}{y}} x\right)^2 + \left(\log_{\frac{y}{x}}\right)^2$, ***если*** $\log_{\frac{x}{y}} x^9 = \log_{\sqrt{y}} \frac{y}{x}.$

Ответ: $\frac{5}{9}.$

13) Известно, что для некоторой тройки чисел x, y, z(x≠y)

выражения $\log_{x^5y^2z}\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{z}$ ***и*** $\log_{x^5y^5z}\frac{\sqrt{xy}}{z}$

равны одному и тому же числу. Найти это число.

Ответ: $\frac{1}{18}$.

14) Доказать, что если числа $\log_k x, \log_m x, \log_n x \left(x \neq 1\right)$

образуют арифметическую прогрессию, то $n^2 = \left(kn\right)^{\log_k m}$.

15) Выразить $\lg 2$ ***и*** $\lg 5$ ***через произведение*** $a = \lg 2 \cdot \lg 5.$

Ответ: $\lg 2 = \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \lg 5 = \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}.$

16) Сравните числа $2005^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 2005}}$ ***и*** $\dfrac{3}{2}.$

Ответ: первое число меньше.

17) Какое из двух чисел больше $\sqrt{8}$ ***или*** $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}} 9}$ ***?***

Ответ: первое.