

# Логические основы компьютеров

1. Логические выражения и операции
2. Диаграммы
3. Преобразование логических выражений
4. Синтез логических выражений
5. Логические элементы компьютера

# Логические основы компьютеров

## Тема 1. Логические выражения и операции

# Булева алгебра

---

**Двоичное кодирование** – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

**Задача** – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

**Джордж Буль** разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).



**Почему «логика»?**

Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

# Логические высказывания

---

**Логическое высказывание** – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

## Высказывание или нет?

- Сейчас идет дождь.
- Жирафы летят на север.
- История – интересный предмет.
- У квадрата – 10 сторон и все разные.
- Красиво!
- В городе N живут 2 миллиона человек.
- Который час?

# Обозначение высказываний

**A** – Сейчас идет дождь. }  
**B** – Форточка открыта. }

простые высказывания  
(элементарные)



**Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).**

**Составные высказывания** строятся из простых с помощью логических связок (операций) «**и**», «**или**», «**не**», «**если ... то**», «**тогда и только тогда**» и др.

**A и B** Сейчас идет дождь и открыта форточка.

**A или не B** Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

**если A, то B** Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

**не A и B** Сейчас нет дождя и форточка открыта.

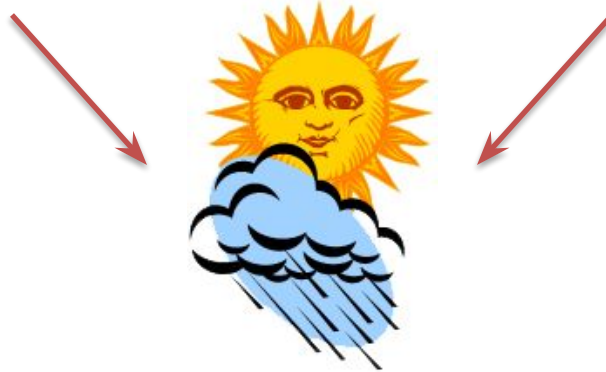
**A тогда и только тогда, когда B** Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

# Логические операции

# ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ

А – «Сегодня светит солнце»

В – «Сегодня идет дождь»



«Сегодня светит солнце **И** идет дождь»

Логическое умножение (конъюнкция) образуется соединением двух (или более) высказываний в одно с помощью союза «И».

# ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ (КОНЪЮНКЦИЯ)

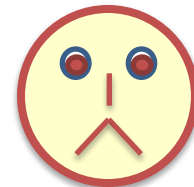
Обозначение:  $\&$ ,  $\wedge$ ,  $*$ .

Союз в естественном языке: **и**.

**A И B; A  $\wedge$  B; A&B; A AND B;**

**A·B**

$A \wedge B$ , – «Сегодня светит солнце и идет дождь»



## Таблица истинности

A	B	$A \wedge B$	Смысл высказываний A и B для указанных значений		$A \wedge B$
0	1	0	Солнца нет	Дождь идет	Ложь
1	0	0	Солнце светит	Дождя нет	Ложь
0	0	0	Солнца нет	Дождя нет	Ложь
1	1	1	Солнце светит	Дождь идет	Истина

Конъюнкция двух высказываний **истинна** тогда и только тогда, когда **оба высказывания истинны**, и **ложна**, когда **хотя бы одно из высказываний ложно**.



# ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ

А – На стоянке находится  
«Мерседес»



В – На стоянке находится  
«Жигули»



«На стоянка находятся «Мерседес» **ИЛИ** «Жигули»

Логическое сложение (дизъюнкция) образуется соединением двух (или более) высказываний в одно с помощью союза «**или**».

# ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ (ДИЗЪЮНКЦИЯ)

Обозначение: +,  $\vee$ .

Союз в естественном языке: или.

**A ИЛИ B;  $A \vee B$ ; A | B; A OR B;**  
**A+B**

$A \vee B$  – На стоянке находится «Мерседес» или «Жигули»



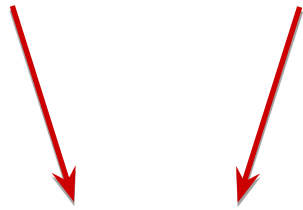
Таблица истинности

A	B	$A \vee B$	Смысл высказываний A и B для указанных значений		$A \vee B$
0	1	1	«Мерседеса» нет	«Жигули» есть	Истина
1	0	1	«Мерседес» есть	«Жигулей» нет	Истина
0	0	0	«Мерседеса» нет	«Жигулей» нет	Ложь
1	1	1	«Мерседес» есть	«Жигули» есть	Истина

Дизъюнкция двух высказываний **ложна** тогда и только тогда, когда **оба высказывания ложны**, и **истинна**, когда **хотя бы одно из высказываний истинно**.

# ЗАПОМНИ!

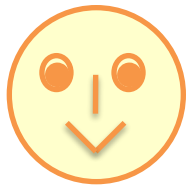
ДИЗЪЮНКЦИЯ



ИЛИ



V



ДИЗ – галочка вниз

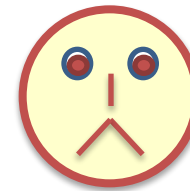
КОНЪЮНКЦИЯ



И



Л



КОН – как крыша он

# ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ

А – «Сегодня светит солнце»



В – «Сегодня не светит солнце»



А – «У данного компьютера жидкокристаллический монитор»



В – «Неверно, что у данного компьютера жидкокристаллический монитор»



Логическое отрицание (инверсия) образуется из высказывания с помощью добавления частицы «не» к сказуемому или использования оборота речи «неверно, что...».

# ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ (ИНВЕРСИЯ)

Обозначение:  $\neg$ .

Союз в естественном языке: **не; неверно, что...**

$A$  – «Сегодня светит солнце»

$\neg A$  –  $\bar{A}$  «Неверно, что сегодня светит солнце» или «Сегодня не светит солнце»

## Таблица истинности

$A$	$\neg A$	Смысл высказывания $A$	Значение высказывания: «Сегодня не светит солнце»
0	1	<b>Солнца нет</b>	<b>Истина</b>
1	0	<b>Солнце есть</b>	<b>Ложь</b>

Инверсия высказывания **истинна, если высказывание ложно, и ложна, когда высказывание истинно.**

# ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ

Обозначение: →.

Союз в естественном языке: **если..., то....**

Если на улице, то асфальт мокрый.

Если хорошо горит красный свет на светофоре, то стою и жду зеленый.

Если прямо пойдешь, то коня потеряешь.

Если коровы летают, то дважды два – пять.



**Логическое следование (импликация)** образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи **«если..., то....»**.

# ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ (ИМПЛИКАЦИЯ)

A – «На улице дождь»

B – «Асфальт мокрый»

$A \rightarrow B \quad A \Rightarrow B = \neg A \vee B$  «Если на улице дождь, то асфальт мокрый»

## Таблица истинности

A	B	$A \rightarrow B$	Смысл высказываний A и B для указанных значений		$A \rightarrow B$
0	1	1	Дождя нет	Асфальт мокрый	Истина
1	0	0	Дождь идет	Асфальт сухой	Ложь
0	0	1	Дождя нет	Асфальт сухой	Истина
1	1	1	Дождь идет	Асфальт мокрый	Истина

Импликация двух высказываний **ложна** тогда и только тогда, когда **из истинного высказывания следует ложное.**

# ЛОГИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО

Обозначение:  $=$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\sim$ .

Союз в естественном языке: **тогда и только тогда, когда...**

Число  $A$  – четное, тогда и только тогда, когда  
число  $A$  делится нацело на 2.

Прямоугольник является квадратом тогда и только тогда,  
когда все его стороны равны.

**Логическое равенство (эквивалентность)** образуется соединением двух высказываний в одно при помощи оборота речи «... тогда и только тогда, когда...».



# ЛОГИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО (ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ)

A – «Число A - четное»

B – «Число A кратно 2»

$A \leftrightarrow B$  – «Число A – четное, тогда и только тогда, когда число A кратно 2»

Таблица истинности

A	B	$A \leftrightarrow B$	Смысл высказываний A и B для указанных значений		$A \leftrightarrow B$
0	1	0	Число нечетное	Число кратно 2	Ложь
1	0	0	Число четное	Число не кратно 2	Ложь
0	0	1	Число нечетное	Число не кратно 2	Истина
1	1	1	Дождь идет	Число кратно 2	Истина

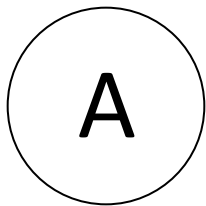
Эквивалентность двух высказываний  
истинна тогда и только тогда, когда  
оба высказывания истинны или оба ложны.

# Логические основы компьютеров

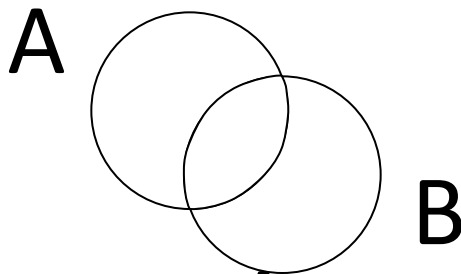
## Тема 2. Диаграммы

# Диаграммы Вена (круги Эйлера)

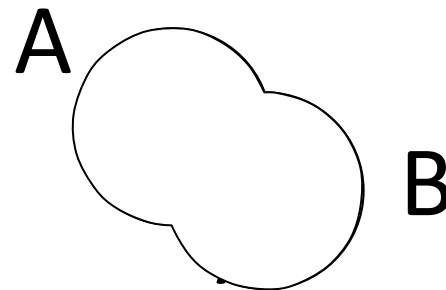
---



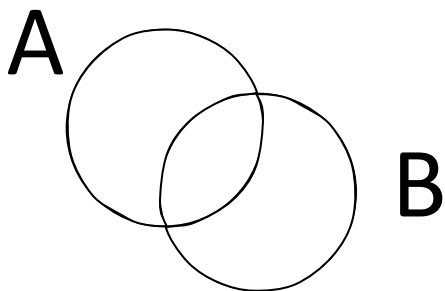
$\bar{A}$



$A \cdot B$



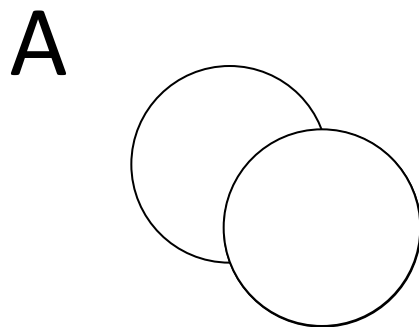
$+ B$



$A$

$\oplus$

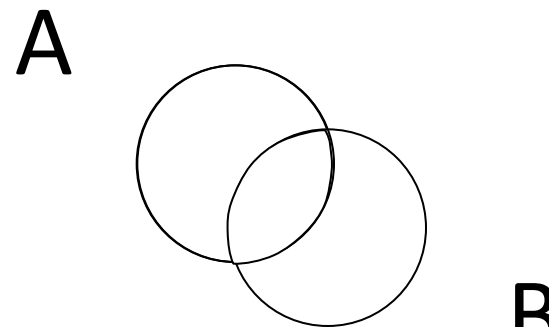
$B$



$\dots$

$\rightarrow$

$B$



$A$

$\leftrightarrow$

$B$

# Логические основы компьютеров

## Тема 3. Преобразование логических выражений

# Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

# Упрощение логических выражений

---

**Шаг 1.** Заменить операции  $\rightarrow$  и  $\leftrightarrow$  на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

**Шаг 2.** Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \quad \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B \quad \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

**Шаг 3.** Используя законы логики, упрощать выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

## Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении:

1. инверсия
2. конъюнкция
3. дизъюнкция
4. импликация
5. эквивалентность

Операции одного приоритета выполняются слева направо. Для изменения порядка действий используются скобки.

**Например:** дана формула  $A \vee B \rightarrow C \wedge D \leftrightarrow \neg A$

**Порядок вычисления:**

$\neg A$  - инверсия

$C \wedge D$  - конъюнкция

$A \vee B$  - дизъюнкция

$A \vee B \rightarrow C \wedge D$  - импликация

$A \vee B \rightarrow C \wedge D \leftrightarrow \neg A$  - эквивалентность

# Упрощение логических выражений

$$Q = M \cdot X \cdot \bar{H} + \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H} = (M + \bar{M}) \cdot X \cdot \bar{H} = X \cdot \bar{H}$$

$$X = (B \rightarrow A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (A \rightarrow C)$$

раскрыли  $\rightarrow$

$$= (\bar{B} + A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (\bar{A} + C)$$

формула де Моргана

$$= (\bar{B} + A) \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

распределительный

$$= (\bar{B} \cdot \bar{A} + A \cdot \bar{A}) \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

исключения третьего

$$= \bar{B} \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

повторения

$$= \bar{B} \cdot \bar{A} \cdot (\bar{A} + C)$$

поглощения

$$= \bar{B} \cdot \bar{A}$$



# Логические основы компьютеров

## Тема 4. Синтез логических выражений

## Пример задания:

Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению  $A \wedge \neg(\neg B \vee C)$ .

1)  $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$     2)  $A \vee \neg B \vee \neg C$     3)  $A \wedge B \wedge \neg C$     4)  $A \wedge \neg B \wedge C$

## Решение (использование законов де Моргана):

перепишем заданное выражение и ответы в других обозначениях:

заданное выражение

$$\overline{A + B + C}$$

$$A + \overline{B} + \overline{C}$$

$$A \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$A \cdot \overline{B} \cdot C$$

ответы: 1)

2)

3)

4)

посмотрев на заданное выражение, видим инверсию (операцию «НЕ») для сложного выражения в скобках, которую раскрываем по формуле де Моргана,

$$\overline{\overline{B}} = B$$

а затем используем закон двойного отрицания по которому :

$$A \cdot B \cdot C = A \cdot \overline{\overline{B}} \cdot C$$

или  $A \wedge B \wedge \neg C$

таким образом, правильный ответ – 3 .

# задани

Я:

1. Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению

$$\neg(A \vee \neg B) \vee \neg(A \vee B) \vee A \wedge B$$

1)  $\neg B \wedge A$  2)  $A \wedge B \vee \neg B$  3)  $A \wedge B \vee \neg A$  4)  $\neg A$

2. Какое логическое выражение эквивалентно выражению  $A \wedge \neg(\neg B \wedge \neg C)$ ?

1)  $A \wedge B \wedge C$  2)  $A \vee B \vee \neg C$  3)  $A \wedge (B \vee C)$  4)  $(A \vee \neg B) \wedge \neg C$

3. Какое логическое выражение эквивалентно выражению

$$\neg(A \vee B) \wedge \neg C?$$

1)  $(A \vee B) \wedge \neg C$  2)  $(A \wedge B) \wedge C$  3)  $(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg C$  4)  $(A \vee B)$

$\wedge C$

4. Какое логическое выражение эквивалентно выражению

$$\neg(A \vee \neg B) \wedge \neg C?$$

1)  $A \vee B \wedge C$  2)  $\neg(A \wedge B) \wedge C$  3)  $\neg(A \vee C) \vee B$  4)  $\neg(A \vee C) \wedge$

$B$

5. Какое логическое выражение эквивалентно выражению

$$\neg(\neg A \wedge B) \wedge \neg C?$$

1)  $(A \wedge B) \wedge \neg C$  2)  $(A \vee B) \vee C$  3)  $(A \wedge \neg B) \vee \neg C$  4)  $(A \vee \neg B)$

# задани

**Я:**

1. Для какого имени истинно высказывание:

$\neg$  (Первая буква имени гласная  $\rightarrow$  Четвертая буква имени согласная)?

1. ЕЛЕНА    2) ВАДИМ    3) АНТОН    4) ФЕДОР

2. Для какого символического выражения неверно высказывание:

*Первая буква гласная  $\rightarrow \neg$  (Третья буква согласная)?*

1.1) abedc    2) becde    3) babas    4) abcab

3. Для какого имени истинно высказывание:

$\neg$  (Первая буква имени согласная  $\rightarrow$  Третья буква имени гласная)?

1. ЮЛИЯ    2) ПЕТР    3) АЛЕКСЕЙ    4) КСЕНИЯ

4. Для какого символического выражения верно высказывание:

$\neg$  (Первая буква согласная)  $\wedge \neg$  (Вторая буква гласная)?

1. abcde    2) bcade    3) babas    4) cabab

5. Для какого имени истинно высказывание:

*(Вторая буква гласная  $\rightarrow$  Первая буква гласная)  $\wedge$  Последняя буква согласная?*

1) ИРИНА    2) МАКСИМ    3) МАРИЯ    4) СТЕПАН

### Пример задания:

Для какого из указанных значений  $X$  истинно высказывание

$$\neg ((x > 2) \rightarrow (x > 3)) ?$$

- 1) 1      2) 2   3) 3   4) 4

### Решение:

1. определим порядок действий: сначала вычисляются результаты отношений в скобках, затем выполняется импликация (поскольку есть «большие» скобки), затем – отрицание (операция «НЕ») для выражения в больших скобках
2. выполняем операции для всех приведенных возможных ответов (1 обозначает истинное условие, 0 – ложное); сначала определяем результаты сравнения в двух внутренних скобках:
3. по таблице истинности операции «импликация» находим третий столбец (значение выражения в больших скобках), применив операцию «импликация» к значениям второго и третьего столбцов (в каждой строке):
4. значение выражения равно инверсии третьего столбца (меняем 1 на 0 и наоборот):
5. **таким образом, ответ – 3.**

$x$	$x > 2$	$x > 3$	$(x > 2) \rightarrow (x > 3)$	$\neg ((x > 2) \rightarrow (x > 3))$
1	0	0	1	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1
4	1	1	1	0

## задания:

1. Для какого из указанных значений числа  $X$  истинно высказывание  $((X < 5) \rightarrow (X < 3)) \wedge ((X < 2) \rightarrow (X < 1))$   
1) 1    2) 2    3) 3    4) 4
2. Для какого числа  $X$  истинно высказывание  $((X > 3) \vee (X < 3)) \rightarrow (X < 1)$   
1) 1    2) 2    3) 3    4) 4
3. Для какого числа  $X$  истинно высказывание  $X > 1 \wedge ((X < 5) \rightarrow (X < 3))$   
1) 1    2) 2    3) 3    4) 4
4. Для какого из значений числа  $Z$  высказывание  $((Z > 2) \vee (Z > 4)) \rightarrow (Z > 3)$  будет ложным?  
1) 1    2) 2    3) 3    4) 4
5. Для какого из значений числа  $Y$  высказывание  $(Y < 5) \wedge ((Y > 1) \rightarrow (Y > 5))$  будет истинным?  
1) 1    2) 2    3) 3    4) 4

## Пример задания:

Составьте таблицу истинности для логической функции

$$X = (A \leftrightarrow B) \vee \neg(A \rightarrow (B \vee C))$$

в которой столбец значений аргумента  $A$  представляет собой двоичную запись числа 27, столбец значений аргумента  $B$  – числа 77, столбец значений аргумента  $C$  – числа 120. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции  $X$  в десятичную систему счисления.

## Решение

•запишем уравнение, используя более простые обозначения операций:  $X = (A \leftrightarrow B) + \overline{(A \rightarrow (B + C))}$

•это выражение с тремя переменными, поэтому в таблице истинности будет  $2^3=8$  строчек; следовательно, двоичная запись чисел, по которым строятся столбцы таблицы  $A$ ,  $B$  и  $C$ , должна состоять из 8 цифр

•переведем числа 27, 77 и 120 в двоичную систему, сразу дополняя запись до 8 знаков нулями в начале чисел

$$27 = 00011011_2 \quad 77 = 01001101_2 \quad 120 = 01111000_2$$

•теперь можно составить таблицу истинности (см. рисунок справа), в которой строки переставлены в сравнении с традиционным порядком: зеленым фоном выделена двоичная запись числа 27 (биты записываются сверху вниз), синим – запись числа 77 и розовым – запись числа 120:

•вряд ли вы сможете сразу написать значения функции  $X$  для каждой комбинации, поэтому удобно добавить в таблицу Дополнительные столбцы для расчета промежуточных результатов (см. таблицу ниже)

A	B	C	X
0	0	0	
0	1	1	
0	0	1	
1	0	1	
1	1	1	
0	1	0	
1	0	0	
1	1	0	

заполняем столбцы  
таблицы:

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$B + C$	$A \rightarrow (B + C)$	$\overline{A \rightarrow (B + C)}$	X
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1

значение  $A \leftrightarrow B$  равно 1 только в тех строчках, где  $A = B$

значение  $B + C$  равно 1 только в тех строчках, где  $B = 1$  или  $C = 1$

значение  $A \rightarrow (B + C)$  равно 0 только в тех строчках, где  $A = 1$  и  $B + C = 0$

значение  $\overline{A \rightarrow (B + C)}$  это инверсия предыдущего столбца (0 заменяется на 1, а 1—на 0)

результат X (последний столбец) – это логическая сумма двух столбцов, выделенных фиолетовым фоном

- чтобы получить ответ, выписываем биты из столбца X сверху вниз:  $X = 10101011_2$
- переводим это число в десятичную систему:  $10101011_2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 171$
- таким образом, правильный ответ – 171.



## задания:

1. Составьте таблицу истинности для логической функции

$$X = (A \rightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow \neg(B \vee A))$$

в которой столбец значений аргумента  $A$  представляет собой двоичную запись числа 226, столбец значений аргумента  $B$  – числа 154, столбец значений аргумента  $C$  – числа 75. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции  $X$  в десятичную систему счисления.

2. Составьте таблицу истинности для логической функции

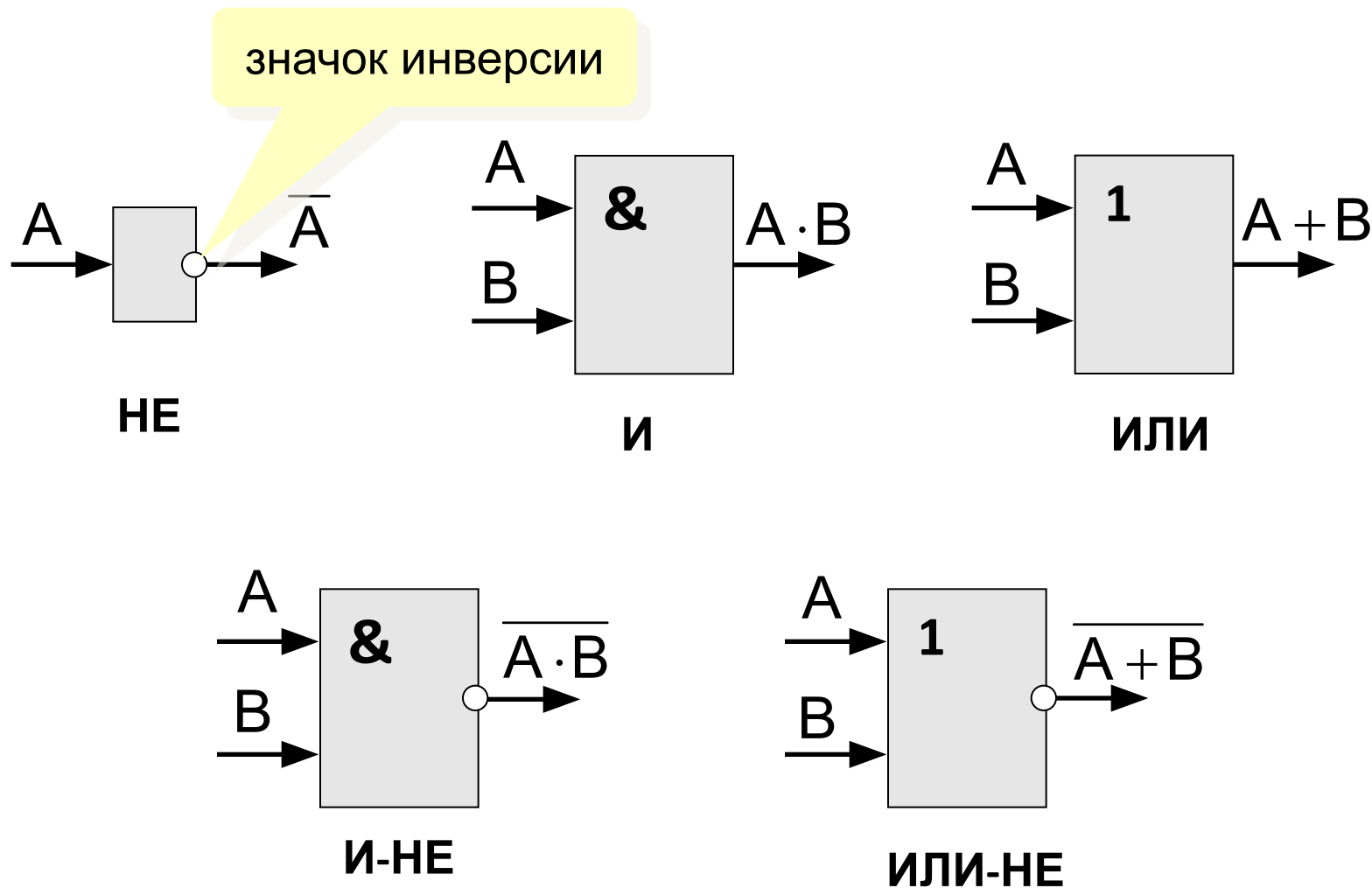
$$X = \neg(A \rightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow \neg(C \rightarrow A))$$

в которой столбец значений аргумента  $A$  представляет собой двоичную запись числа 216, столбец значений аргумента  $B$  – числа 30, столбец значений аргумента  $C$  – числа 170. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции  $X$  в десятичную систему счисления.

# Логические основы компьютеров

## Тема 5. Логические элементы компьютера

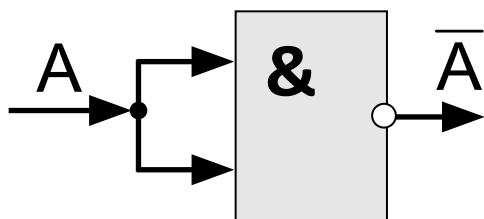
# Логические элементы компьютера



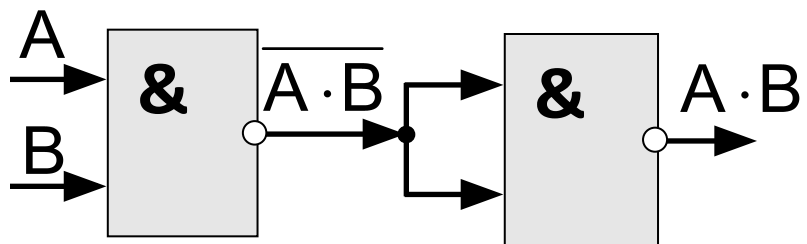
# Логические элементы компьютера

Любое логическое выражение можно реализовать на элементах **И-НЕ** или **ИЛИ-НЕ**.

**НЕ:**  $\bar{A} = \bar{A} + \bar{A} = \overline{A \cdot A}$

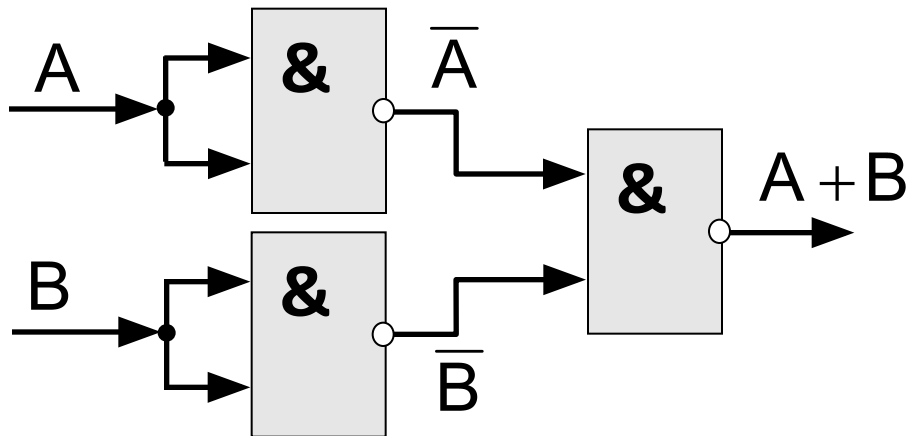


**И:**  $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$



**ИЛИ:**

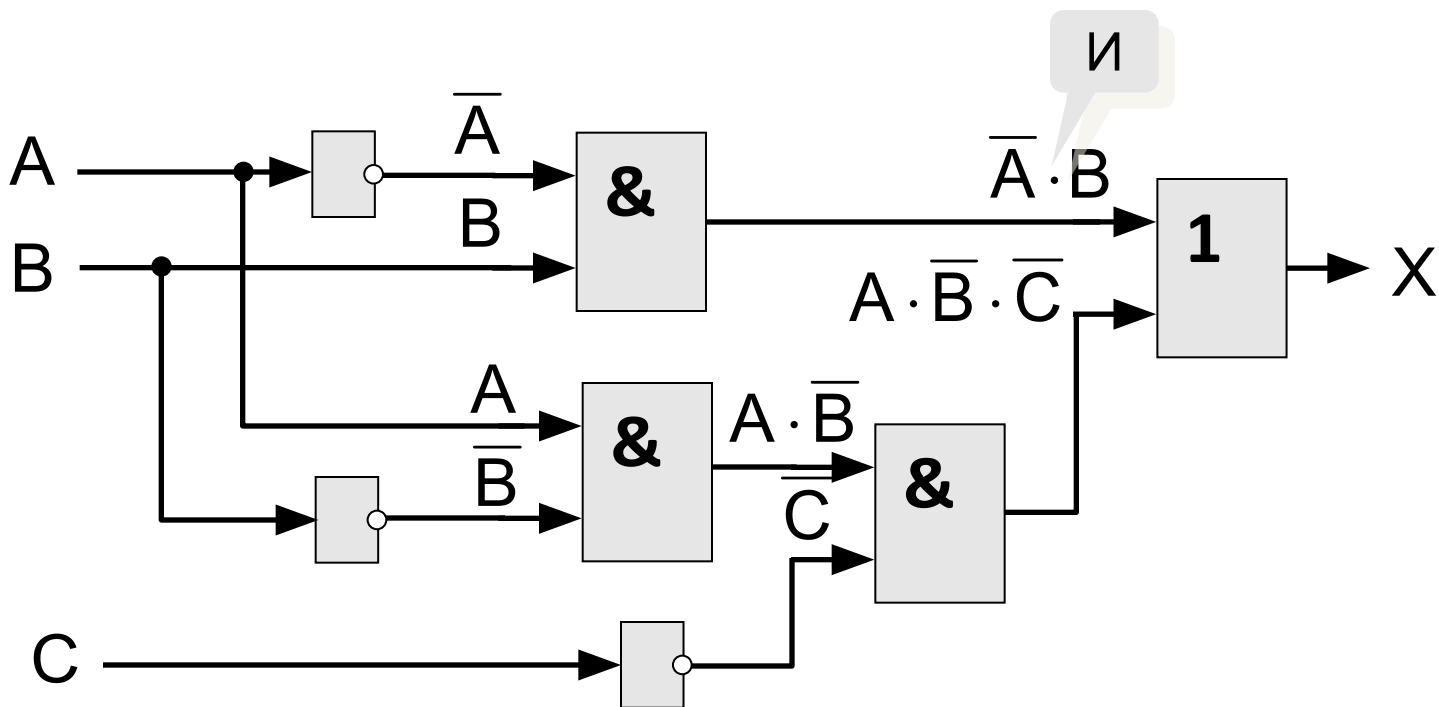
$A + B = \overline{\overline{A \cdot B}}$



# Составление схем

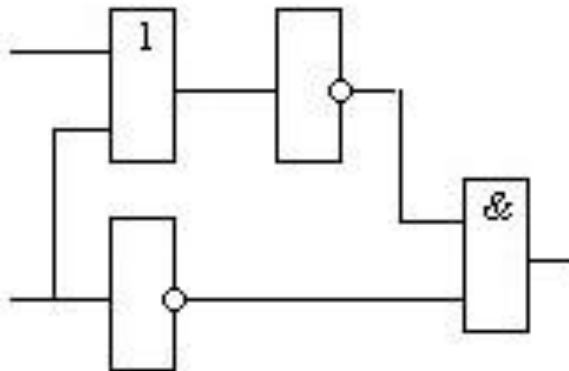
последняя операция - ИЛИ

$$X = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$



# задания

**Я:** 1. Составить логическую функцию по функциональной схеме и определить сигнал на выходе, если  $A=1$ ,  $B=0$ :



2. Составить логическую функцию по функциональной схеме и определить сигнал на выходе, если  $A=1$ ,  $B=1$ :

