Логические основы компьютеров

Логические основы компьютеров

Тема 1. Логические выражения и операции

Булева алгебра

Двоичное кодирование – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

Задача – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

Джордж Буль разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).

Почему «логика»?

Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

Логические высказывания

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

- Сейчас идет дождь.
- Жирафы летят на север.
- История – интересный предмет.
- У квадрата – 10 сторон и все разные.
- Красиво!
- В городе N живут 2 миллиона человек.
- Который час?

Обозначение высказываний

A – Сейчас идет дождь.

B – Форточка открыта.

простые высказывания (элементарные)

! **Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).**

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «**и**», «**или**», «**не**», «**если … то**», «**тогда и только тогда**» и др.

A и B	Сейчас идет дождь и открыта форточка.
A или не B	Сейчас идет дождь или форточка закрыта.
если A, то B	Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.
не A и B	Сейчас нет дождя и форточка открыта.
A тогда и только тогда, когда B	Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Логические операции

ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ

A – «Сегодня светит солнце»

B – «Сегодня идет дождь»

«Сегодня светит солнце **и** идет дождь»

Логическое умножение (конъюнкция) образуется соединением двух (или более) высказываний в одно с помощью союза «и».

ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ (КОНЪЮНКЦИЯ)

Обозначение: &, ^, *.

Союз в естественном языке: и.

А И В; А∧В; А&В; A AND B; А·В

А ^ В,– «Сегодня светит солнце и идет дождь»

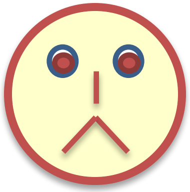


Таблица истинности

А	В	А ^ В	Смысл высказываний А и В для указанных значений		А ^ В
0	**1**	**0**	**Солнца нет**	**Дождь идет**	**Ложь**
1	**0**	**0**	**Солнце светит**	**Дождя нет**	**Ложь**
0	**0**	**0**	**Солнца нет**	**Дождя нет**	**Ложь**
1	**1**	**1**	**Солнце светит**	**Дождь идет**	**Истина**

Конъюнкция двух высказываний истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны, и ложна, когда хотя бы одно из высказываний ложно.

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ

А – На стоянке находится «Мерседес»

В – На стоянке находится «Жигули»

«На стоянка находятся «Мерседес» **или** «Жигули»

Логическое сложение (дизъюнкция) образуется соединением двух (или более) высказываний в одно с помощью союза «или».

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ (ДИЗЪЮНКЦИЯ)

Обозначение: +, V.

Союз в естественном языке: или.

А ИЛИ В; А ⋁ В; А | В; A OR B; А+В

A V B – На стоянке находится «Мерседес» или «Жигули»

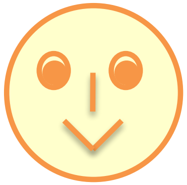


Таблица истинности

А	В	A V B
0	1	1
1	0	1
0	0	0
1	1	1

Смысл высказываний А и В для указанных значений		A V B
«Мерседеса» нет	«Жигули» есть	Истина
«Мерседес» есть	«Жигулей» нет	Истина
«Мерседеса» нет	«Жигулей» нет	Ложь
«Мерседес» есть	«Жигули» есть	Истина

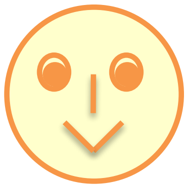
Дизъюнкция двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны, и истинна, когда хотя бы одно из высказываний истинно.

ЗАПОМНИ!

дИзъюнкцИя

или

$\vee$

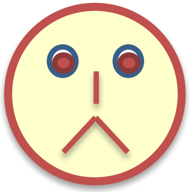


ДИЗ – галочка вниз

конъюнкцИя

и

$\wedge$



КОН – как крыша он

ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ

А – «Сегодня светит солнце»

В – «Сегодня не светит солнце»

А – «У данного компьютера жидкокристаллический монитор»

В – «Неверно, что у данного компьютера жидкокристаллический монитор»

Логическое отрицание (инверсия) образуется из высказывания с помощью добавления частицы «не» к сказуемому или использования оборота речи «неверно, что…».

ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ (ИНВЕРСИЯ)

Обозначение: ¬.

Союз в естественном языке: не; неверно, что…

А – «Сегодня светит солнце»

¬ А – $\overline{A}$ «Неверно, что сегодня светит солнце» или «Сегодня не светит солнце»

Таблица истинности

А	¬ А	Смысл высказывания А	Значение высказывания: «Сегодня не светит солнце»
0	**1**	**Солнца нет**	**Истина**
1	**0**	**Солнце есть**	**Ложь**

Инверсия высказывания истинна, если высказывание ложно, и ложна, когда высказывание истинно.

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ

Обозначение: →.

Союз в естественном языке: если…, то….

Если на улице, то асфальт мокрый.

Если хорошо горит красный свет на светофоре, то стою и жду зеленый.

Если прямо пойдешь, то коня потеряешь.

Если коровы летают, то дважды два – пять.

Логическое следование (импликация) образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «если…, то…».

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ (ИМПЛИКАЦИЯ)

А – «На улице дождь»
В – «Асфальт мокрый»

$A \to B$ $A \Rightarrow B = \neg A \vee B = \overline{A} + B$ «Если на улице дождь, то асфальт мокрый»

Таблица истинности

A	B	**A → B**	Смысл высказываний А и В для указанных значений		**A → B**
0	**1**	**1**	**Дождя нет**	**Асфальт мокрый**	**Истина**
1	**0**	**0**	**Дождь идет**	**Асфальт сухой**	**Ложь**
0	**0**	**1**	**Дождя нет**	**Асфальт сухой**	**Истина**
1	**1**	**1**	**Дождь идет**	**Асфальт мокрый**	**Истина**

Импликация двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда из истинного высказывания следует ложное.

ЛОГИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО

Обозначение: =, ↔, ~.

Союз в естественном языке: тогда и только тогда, когда….

Число А – четное, тогда и только тогда, когда число А делится нацело на 2.

Прямоугольник является квадратом тогда и только тогда, когда все его стороны равны.

Логическое равенство (эквивалентность) образуется соединением двух высказываний в одно при помощи оборота речи «… тогда и только тогда, когда…».

ЛОГИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО (ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ)

А – «Число А - четное»
В – «Число А кратно 2»

А ↔ В – «Число А – четное, тогда и только тогда, когда число А кратно 2»

Таблица истинности

А	В	**А ↔ В**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
0	**0**	**1**
1	**1**	**1**

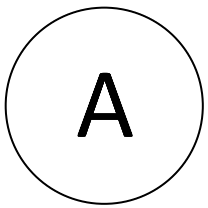
Смысл высказываний А и В для указанных значений		**А ↔ В**
Число нечетное	**Число кратно 2**	**Ложь**
Число четное	**Число не кратно 2**	**Ложь**
Число нечетное	**Число не кратно 2**	**Истина**
Дождь идет	**Число кратно 2**	**Истина**

Эквивалентность двух высказываний
истинна тогда и только тогда, когда
оба высказывания истинны или оба ложны.

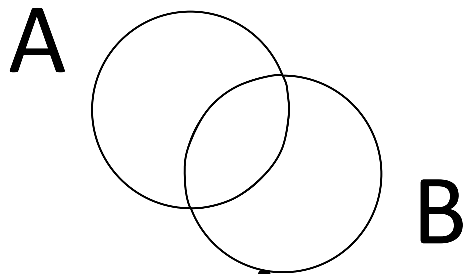
Логические основы компьютеров

Тема 2. Диаграммы

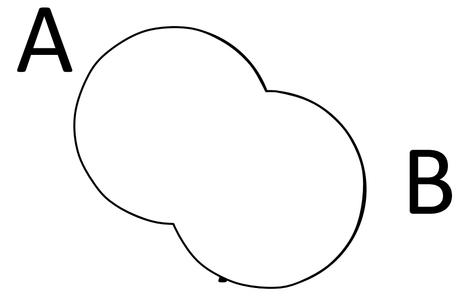
Диаграммы Вена (круги Эйлера)



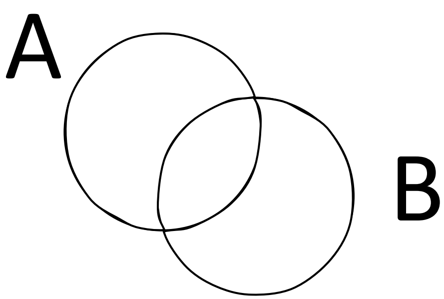
$\overline{A}$



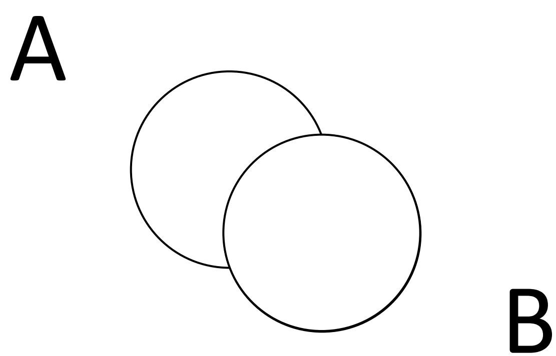
$A \cdot B$



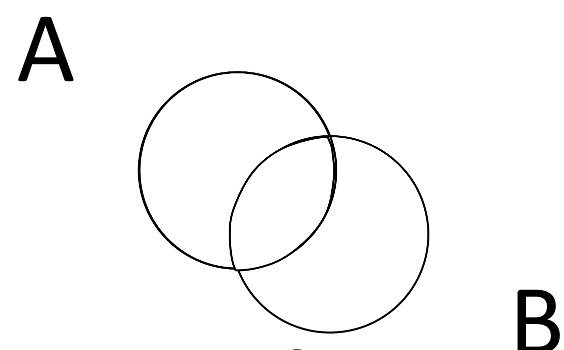
$A + B$



$A \oplus B$



$A \rightarrow B$



$A \leftrightarrow B$

Логические основы компьютеров

Тема 3. Преобразование логических выражений

Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0,\ \ A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A,\ \ A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Упрощение логических выражений

Шаг 1. Заменить операции →↔ на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \to B = \overline{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Шаг 2. Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

$$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Шаг 3. Используя законы логики, упрощать выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении:

1. инверсия
2. конъюнкция
3. дизъюнкция
4. импликация
5. эквивалентность

Операции одного приоритета выполняются слева направо. Для изменения порядка действий используются скобки.

Например: дана формула $A \lor B \to C \land D \leftrightarrow \neg A$

Порядок вычисления:

$\neg A$ - инверсия

$C \land D$ - конъюнкция

$A \lor B$ - дизъюнкция

$A \lor B \to C \land D$ - импликация

$A \lor B \to C \land D \leftrightarrow \neg A$ - эквивалентность

Упрощение логических выражений

$$Q = M \cdot X \cdot \overline{H} + \overline{M} \cdot X \cdot \overline{H} = (M + \overline{M}) \cdot X \cdot \overline{H} = X \cdot \overline{H}$$

$$X = (B \to A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (A \to C)$$

раскрыли →

$$= (\overline{B} + A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (\overline{A} + C)$$

формула де Моргана

$$= (\overline{B} + A) \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{A} + C)$$

распределительный

$$= (\overline{B} \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{A}) \cdot \overline{B} \cdot (\overline{A} + C)$$

исключения третьего

$$= \overline{B} \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{A} + C)$$

повторения

$$= \overline{B} \cdot \overline{A} \cdot (\overline{A} + C)$$

поглощения

$$= \overline{B} \cdot \overline{A}$$

Логические основы компьютеров

Тема 4. Синтез логических выражений

Пример задания:

Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению **A ∧ ¬(¬B ∨ C)**.

1) ¬A ∨ ¬B ∨ ¬C   2) A ∨ ¬B ∨ ¬C   3) A ∧ B ∧ ¬C   4) A ∧ ¬B ∧ C

Решение (использование законов де Моргана):

перепишем заданное выражение и ответы в других обозначениях:

заданное выражение $A\cdot\overline{(\overline{B}+C)}$

ответы: 1) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ 2) $A+\overline{B}+\overline{C}$ 3) $A\cdot B\cdot\overline{C}$ 4) $A\cdot\overline{B}\cdot C$

посмотрев на заданное выражение, видим инверсию (операцию «НЕ») для сложного выражения в скобках, которую раскрываем по формуле де Моргана,

$$A\cdot\overline{(\overline{B}+C)} = A\cdot\overline{\overline{B}}\cdot\overline{C}$$

а затем используем закон двойного отрицания по которому : $\overline{\overline{B}} = B$

$$A\cdot\overline{\overline{B}}\cdot\overline{C} = A\cdot B\cdot\overline{C}$$

или A ∧ B ∧ ¬C

таким образом, правильный ответ – 3 .

задания:

1. Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению

¬(A ∨ ¬B) ∨ ¬(A ∨ B) ∨ A ∧ B

1) ¬B ∧ A **2)** A ∧ B ∨ ¬B **3)** A ∧ B ∨ ¬A **4)** ¬A

2. Какое логическое выражение эквивалентно выражению

A ∧ ¬(¬B ∧ ¬C)?

1) A ∧ B ∧ C **2)** A ∨ B ∨ ¬C **3)** A ∧ (B ∨ C) **4)** (A ∨ ¬B) ∧ ¬C

3. Какое логическое выражение эквивалентно выражению

¬(A ∨ B) ∧ ¬C?

1) (A ∨ B) ∧ ¬C **2)** (A ∧ B) ∧ C **3)** (¬A ∧ ¬B) ∧ ¬C **4)** (A ∨ B) ∧ C

4. Какое логическое выражение эквивалентно выражению

¬(A ∨ ¬B) ∧ ¬C?

1) A ∨ B ∧ C **2)** ¬(A ∧ B) ∧ C **3)** ¬(A ∨ C) ∨ B **4)** ¬(A ∨ C) ∧ B

5. Какое логическое выражение эквивалентно выражению

¬(¬A ∧ B) ∧ ¬C?

1) (A ∧ B) ∧ ¬C **2)** (A ∨ B) ∨ C **3)** (A ∧ ¬B) ∨ ¬C **4)** (A ∨ ¬B)

задания:

1.Для какого имени истинно высказывание:

¬ (*Первая буква имени гласная* → *Четвертая буква имени согласная*)?

1.ЕЛЕНА 2) ВАДИМ 3) АНТОН 4) ФЕДОР

2.Для какого символьного выражения неверно высказывание:

Первая буква гласная → ¬ (*Третья буква согласная*)?

1.1)abedc 2)becde 3) babas 4) abcab

3. Для какого имени истинно высказывание:

¬ (*Первая буква имени согласная* → *Третья буква имени гласная*)?

1.ЮЛИЯ2) ПЕТР3) АЛЕКСЕЙ 4) КСЕНИЯ

4. Для какого символьного выражения верно высказывание:

¬ (*Первая буква согласная*) ∧ ¬ (*Вторая буква гласная*)?

1.abcde 2) bcade 3) babas 4) cabab

5. Для какого имени истинно высказывание:

(*Вторая буква гласная* → *Первая буква гласная*) ∧ *Последняя буква согласная*?

1) ИРИНА 2) МАКСИМ 3) МАРИЯ 4) СТЕПАН

Пример задания:

Для какого из указанных значений X истинно высказывание

¬ ((X > 2) → (X > 3)) ?

1) 1 **2)** 2 **3)** 3 **4)** 4

Решение:

1. определим порядок действий: сначала вычисляются результаты отношений в скобках, затем выполняется импликация (поскольку есть «большие» скобки), затем – отрицание (операция «НЕ») для выражения в больших скобках
2. выполняем операции для всех приведенных возможных ответов (1 обозначает истинное условие, 0 – ложное); сначала определяем результаты сравнения в двух внутренних скобках:
3. по таблице истинности операции «импликация» находим третий столбец (значение выражения в больших скобках), применив операцию «импликация» к значениям второго и третьего столбцов (в каждой строке):
4. значение выражения равно инверсии третьего столбца (меняем 1 на 0 и наоборот):
5. **таким образом, ответ – 3.**

X	X > 2	X > 3	(X > 2) → (X > 3)	¬ ((X > 2) → (X > 3))
1	0	0	1	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1
4	1	1	1	0

задания:

1. Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание
$((X < 5) \to (X < 3)) \wedge ((X < 2) \to (X < 1))$
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. Для какого числа X истинно высказывание **$((X > 3) \vee (X < 3)) \to (X < 1)$**
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

3. Для какого числа X истинно высказывание **$X > 1 \wedge ((X < 5) \to (X < 3))$**
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

4. Для какого из значений числа Z высказывание **$((Z > 2) \vee (Z > 4)) \to (Z > 3)$** будет ложным?
1)1 2) 2 3) 3 4) 4

5. Для какого из значений числа Y высказывание **$(Y < 5) \wedge ((Y > 1) \to (Y > 5))$** будет истинным?
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Пример задания:

Составьте таблицу истинности для логической функции

X = (A ↔ B) ∨ ¬(A → (B ∨ C))

в которой столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа 27, столбец значений аргумента B – числа 77, столбец значений аргумента C – числа 120. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции X в десятичную систему счисления.

Решение

- запишем уравнение, используя более простые обозначения операций: $X = (A \leftrightarrow B) + \overline{(A \to (B + C))}$
- это выражение с тремя переменными, поэтому в таблице истинности будет 2^3=8 строчек; следовательно, двоичная запись чисел, по которым строятся столбцы таблицы A, B и C, должна состоять из 8 цифр
- переведем числа 27, 77 и 120 в двоичную систему, сразу дополняя запись до 8 знаков нулями в начале чисел
  $27 = 00011011_2$ $77 = 01001101_2$ $120 = 01111000_2$
- теперь можно составить таблицу истинности (см. рисунок справа), в которой строки переставлены в сравнении с традиционным порядком: зеленым фоном выделена двоичная записи числа 27 (биты записываются сверху вниз), синим – запись числа 77 и розовым – запись числа 120:
- вряд ли вы сможете сразу написать значения функции X для каждой комбинации, поэтому удобно добавить в таблицу Дополнительные столбцы для расчета промежуточных результатов (см. таблицу ниже)

A	B	C	X
0	0	0	
0	1	1	
0	0	1	
1	0	1	
1	1	1	
0	1	0	
1	0	0	
1	1	0	

заполняем столбцы таблицы:

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$B + C$	$A \to (B+C)$	$\overline{A \to (B+C)}$	X
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0		1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1

значение $A \leftrightarrow B$ равно 1 только в тех строчках, где A = B

значение $B + C$ равно 1 только в тех строчках, где B = 1 или C = 1

значение $A \to (B+C)$ равно 0 только в тех строчках, где A = 1 и B + C = 0

значение $\overline{A \to (B+C)}$ это инверсия предыдущего столбца (0 заменяется на 1, а 1–на 0)

результат X (последний столбец) – это логическая сумма двух столбцов, выделенных фиолетовым фоном

- чтобы получить ответ, выписываем биты из столбца X сверху вниз: $X = 10101011_2$
- переводим это число в десятичную систему: $10101011_2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 171$
- таким образом, правильный ответ – 171.

задания:

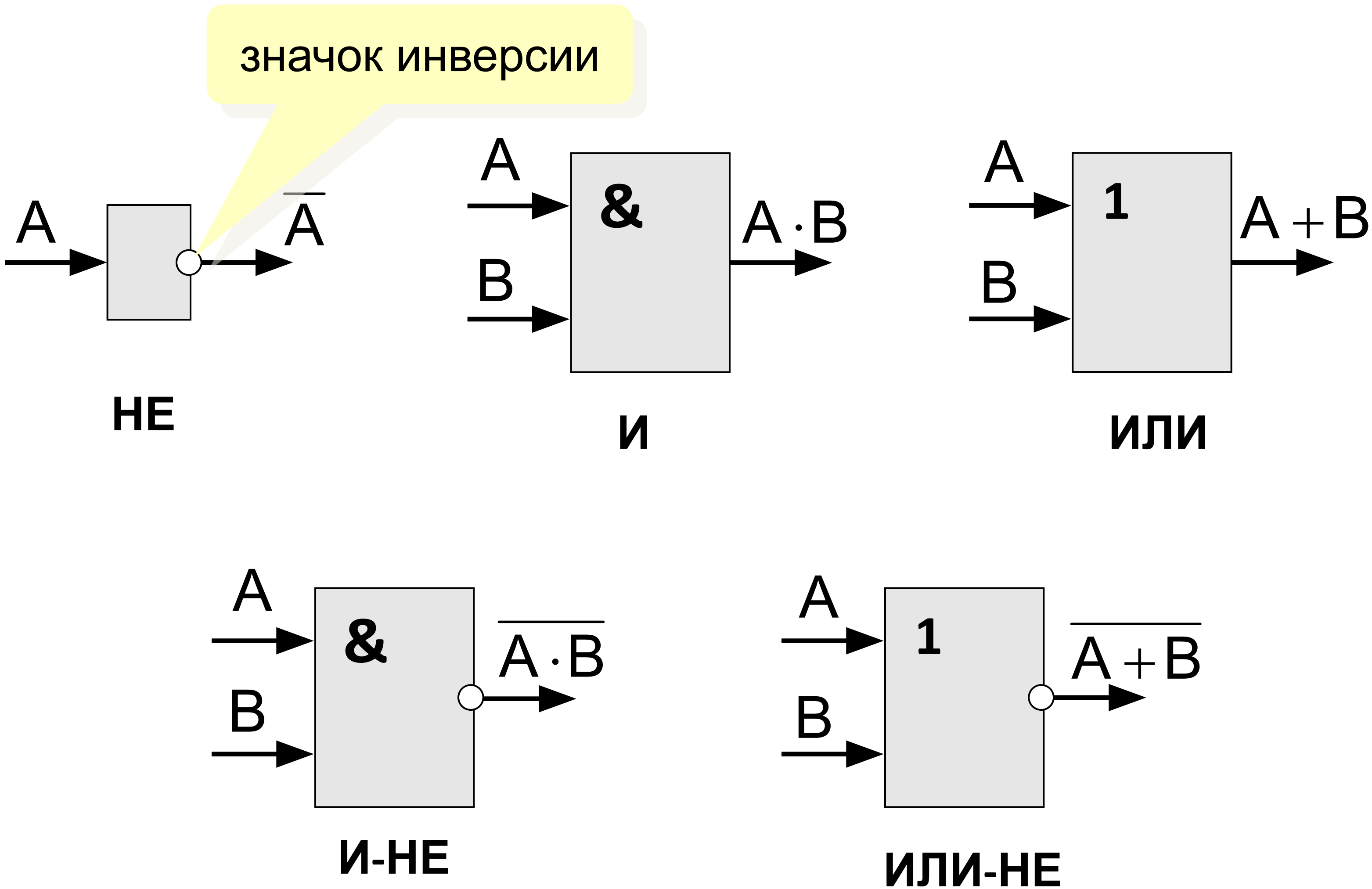
1. Составьте таблицу истинности для логической функции
$X = (A \rightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow \neg(B \vee A))$
в которой столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа 226, столбец значений аргумента B – числа 154, столбец значений аргумента C – числа 75. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции X в десятичную систему счисления.

2. Составьте таблицу истинности для логической функции
$X = \neg(A \rightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow \neg(C \rightarrow A))$
в которой столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа 216, столбец значений аргумента B – числа 30, столбец значений аргумента C – числа 170. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции X в десятичную систему счисления.

Логические основы компьютеров

Тема 5. Логические элементы компьютера

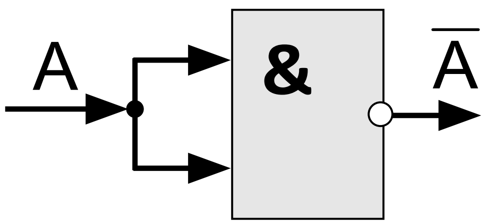
Логические элементы компьютера



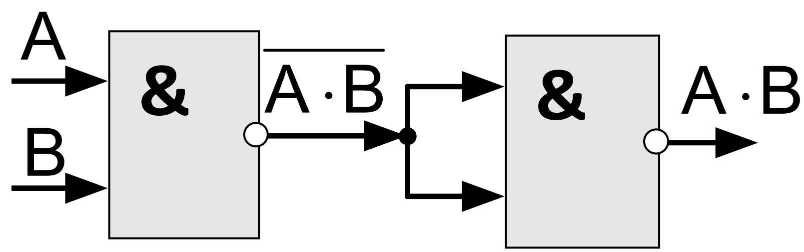
Логические элементы компьютера

Любое логическое выражение можно реализовать на элементах **И-НЕ** или **ИЛИ-НЕ.**

НЕ: $\overline{A} = \overline{A} + \overline{A} = \overline{A \cdot A}$

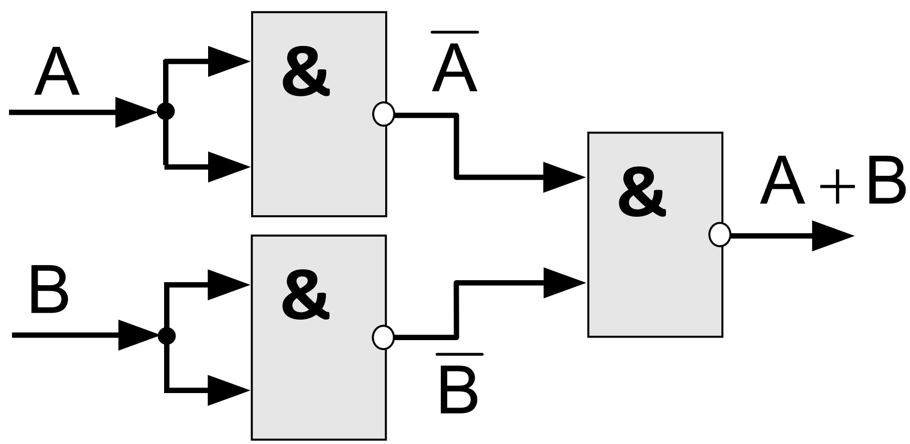


И: $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$



ИЛИ:

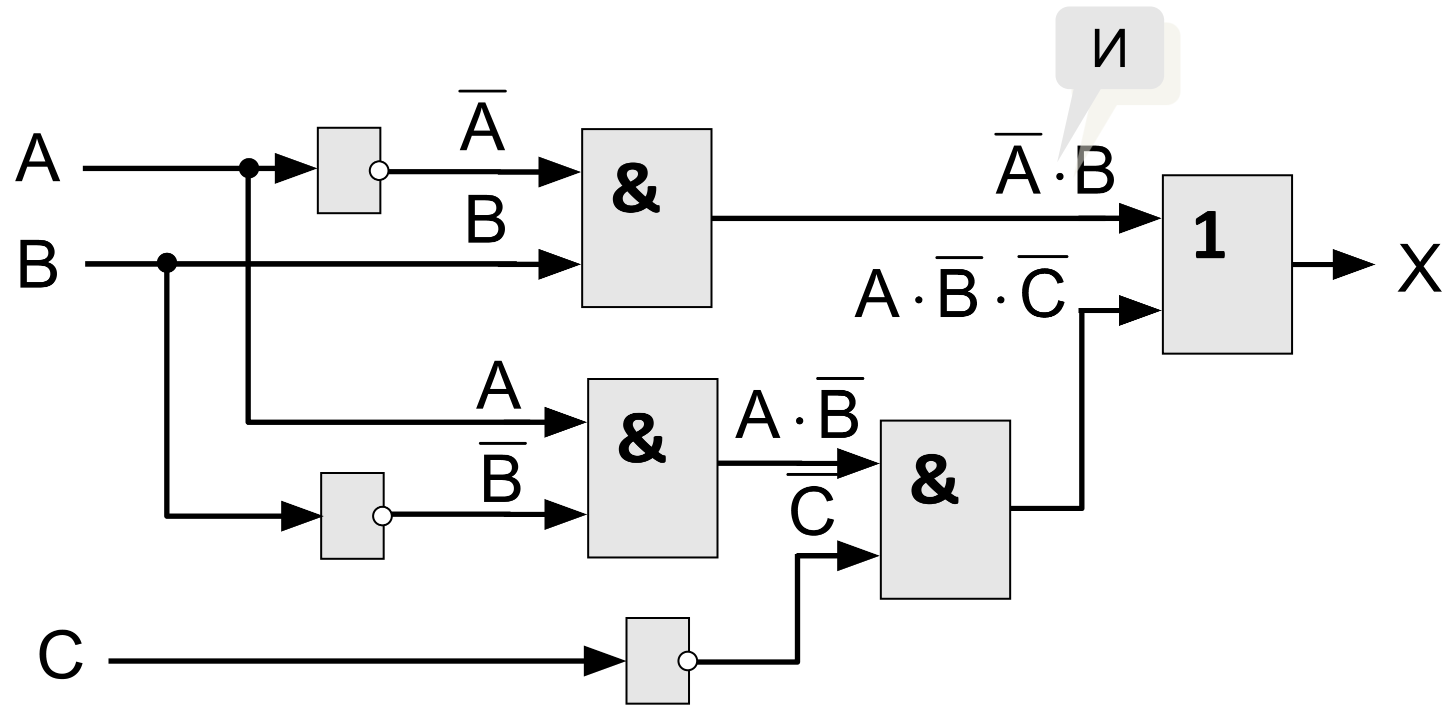
$A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$



Составление схем

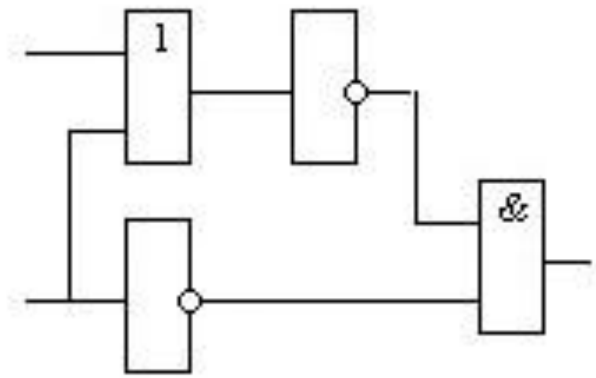
последняя операция - ИЛИ

$$X = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$



задания:

1. Составить логическую функцию по функциональной схеме и определить сигнал на выходе, если A=1, B=0:



2. Составить логическую функцию по функциональной схеме и определить сигнал на выходе, если A=1, B=1: