ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Определение. **Предикатом** $P(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ называется функция, аргументы которой определены на некотором множестве М, $x_1, x_2, \ldots , x_n \in M$, а сама она принимает два значения: И (истина) и Л (ложь). Таким образом, предикат осуществляет отображение

$$\text{М} \to \{\text{И, Л}\}.$$

Переменные $x_1, x_2, \ldots , x_n$ называются ***предметными переменными***, а множество M – ***предметной областью***.

Предикат от n переменных называется *n-местным предикатом.* Высказывание есть 0-местный предикат.

Над предикатами можно производить обычные логические операции и получать при этом другие предикаты. Таким образом, можно говорить об ***алгебре предикатов***.

Квантор общности. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат, определенный для каждого $x \in$ М. Тогда выражение $\forall xP(x)$ является истинным высказыванием, если $P(x)$ истинно для всякого $x \in$ М и ложным в противном случае.

Символ $\forall x$ называется ***квантором общности***. Выражение $\forall xP(x)$ читается: “Для всех x имеет место $P(x)$”. В обычной речи квантору общности соответствуют слова: все, всякий, каждый, любой. Возможно отрицание квантора общности: $\neg\forall xP(x)$: “Не для всех x имеет место $P(x)$”.

Пример .

Пусть $P(x)$ – предикат “x – четное число”.

Тогда $\forall xP(x)$ есть высказывание “Всякое x – четное число" = «Все числа – четные».

Отрицание $\neg\forall xP(x)$ есть высказывание «Не всякое x – четное число» = «Не все числа – четные».

Квантор существования. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат, $x \in M$. Тогда выражение $\exists x P(x)$ является истинным высказыванием, если $P(x)$ истинно хотя бы для одного $x \in M$ и ложным в противном случае.

Символ $\exists x$ называется ***квантором существования***. Выражение $\exists x P(x)$ читается: “Существует x, для которого имеет место $P(x)$”. В обычной речи квантору существования соответствуют слова: некоторый, несколько. Возможно отрицание квантора существования: $\neg \exists x P(x)$: “Не существует x, для которого имеет место $P(x)$”.

Пример.

Пусть, $P(x)$ – предикат “x – четное число”. Тогда $\exists x P(x)$ есть высказывание “Некоторые x – четные числа” = “Существуют четные числа” .

Высказывание $\neg \exists x P(x)$ = “Неверно, что некоторые x – четные числа” = “Не существует четных чисел”.

Кванторы существования и общности называются ***двойственными кванторами.***

Буква *x*, стоящая справа от квантора, называется ***кванторной переменной*** и должна присутствовать обязательно.

Переменная, стоящая под знаком квантора, называется также ***связанной переменной***.

Несвязанная переменная называется ***свободной***.

Формулы логики предикатов. Равносильность формул

Определение. Формула логики предикатов определяется индуктивно следующим образом:

1. Любая формула логики высказываний есть формула логики предикатов.

К новым формулам логики предикатов относятся следующие выражения:

2. Предметные переменные x, y, z, ... есть формулы.
3. Предикаты $P(x)$, $Q(x, y)$, ... , а также выражения с кванторами $\forall xP(x)$, $\exists xR(x)$, $\forall x\exists yQ(x, y)$,... есть формулы.
4. Если A и B – формулы, то $\neg A$, $A \vee B$, $A \& B$, $A \Rightarrow B$, $A \sim B$ есть формулы, в которых свободные переменные формул A и B остаются свободными, а связанные переменные формул A и B остаются связанными.
5. Ничто, кроме указанного в пунктах 1 – 4, не есть формула.

Пример.

1. Следующие выражения являются формулами логики предикатов:

а) $A \,\&\, B \Rightarrow C$, где A, B, C – высказывания.

б) $\forall x \exists y Q(x, y, z) \,\&\, \forall x \exists y P(x, y, u)$.

Проанализируем последовательно это выражение.

Предикат $Q(x, y, z)$ – формула;

Выражение $\forall x \exists y Q(x, y, z)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменная z – свободная.

Предикат $P(x, y, u)$ – формула.

Выражение $\forall x \exists y P(x, y, u)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменная u – свободная.

Выражение $\forall x \exists y Q(x, y, z) \,\&\, \forall x \exists y P(x, y, u)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменные z, u – свободные.

2. Выражение $\forall x \exists y P(x, y, z) \Rightarrow Q(x, y, z)$ формулой **не** является. Действительно, выражение $\forall x \exists y P(x, y, z)$ есть формула, в которой переменные x и y связанные, а переменная z свободная. Выражение $Q(x, y, z)$ также формула, но в ней все переменные x, y, z свободные.

Определение. Формулы F и G, определенные на некотором множестве M, называются ***равносильными на этом множестве***, если при любых подстановках констант вместо переменных они принимают одинаковые значения.

Определение. Формулы, равносильные на любых множествах, будем называть просто ***равносильными***.

Переход от одних формул к равносильным им другим формулам логики предикатов может быть произведен по следующим правилам:

1. Все равносильности, имеющие место для логики высказываний, переносятся на логику предикатов.

2. Перенос квантора через отрицание.

Пусть A – формула, содержащая свободную переменную x. Тогда

$$\neg(\forall x A(x) \equiv \exists x(\neg A(x)). \qquad (2.1)$$

$$\neg(\exists x A(x)) \equiv \forall x \neg(A(x)). \qquad (2.2)$$

3. Вынос квантора за скобки.

Пусть формула $A(x)$ содержит переменную x, а формула B не содержит переменной x, и все переменные, связанные в одной формуле, связаны в другой. Тогда

$$\forall x A(x) \vee B \equiv \forall x (A(x) \vee B).$$

$$\forall x A(x) \& B \equiv \forall x (A(x) \& B).$$

$$\exists x A(x) \vee B \equiv \exists x (A(x) \vee B).$$

$$\exists x A(x) \& B \equiv \exists x (A(x) \& B).$$

4. Дистрибутивность квантора общности относительно конъюнкции **и квантора существования** относительно дизъюнкции**.**

Пусть формула B, так же, как и формула A, зависит от x. Тогда

$$\forall x A(x) \ \& \ \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \ \& \ B(x)).$$

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x)).$$

5. Перестановка одноименных кванторов.

$$\forall x \forall y A(x,y) \equiv \forall y \forall x A(x,y).$$

$$\exists x \exists y A(x,y) \equiv \exists y \exists x A(x,y).$$

Разноименные кванторы переставлять, вообще говоря, нельзя!

6. Переименование связанных переменных.

Заменяя связанную переменную формулы A другой переменной, не входящей в эту формулу, всюду: в кванторе и в области действия квантора, получим формулу, равносильную A.

Пример 2.11.

$A = \forall x F(x) \Rightarrow \exists x G(x).$

Заменяя связанную переменную x на y в первом члене импликации и на z во втором, получим равносильную формулу:

$B = \forall y F(y) \Rightarrow \exists z G(z).$

$$A \equiv B.$$

Приведенные и нормальные формулы

Определение. Формулы, в которых из логических символов имеются только символы &, V и ¬, причем символ ¬ встречается лишь перед символами предикатов, называются ***приведенными*** формулами.

Пример.

1. $\boldsymbol{A(x)\&B(x, y)}$.
2. $\boldsymbol{\forall x A(x) \lor \exists x \neg B(x, y)}$.
3. $\neg(A(x)\&B(x, y))$.
4. $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x \neg B(x, y)$.
5. $\neg(\forall x A(x) \Rightarrow \exists x \neg B(x, y))$.

Теорема. Для **каждой** формулы существует **равносильная** ей **приведенная формула**, причем множества свободных и связанных переменных этих формул совпадают.

Выражение суждения в виде формулы логики предикатов

Существуют две задачи, определяющие связь между суждениями и формулами логики предикатов:

1) выражение суждения в виде формулы логики предикатов;

2) интерпретация формулы логики предикатов.

Суждение – это мысль, в которой утверждается наличие или отсутствие свойств предметов, отношений между предметами.

Простым суждением назовем суждение, в котором нельзя выделить часть, в свою очередь являющуюся суждением. Среди простых суждений выделяют ***атрибутивные суждения*** и ***суждения об отношениях.***

Все атрибутивные суждения можно разделить на следующие типы: "a есть P", "Все S есть P", "Ни один S не есть P", "Некоторые S есть P", "Некоторые S не есть P". Эти суждения следующим образом переводятся на язык логики предикатов:

"a есть P" – $P(a)$;

"Все S есть P" – $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$;

"Ни один S не есть P" – $\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$;

"Некоторые S есть P" – $\exists x(S(x) \,\&\, P(x))$;

"Некоторые S не есть P" – $\exists x(S(x) \,\&\, \neg P(x))$.

Если кванторная переменная связана квантором общности ($\forall$), то в формуле используется знак **импликации** ($\Rightarrow$), а если кванторная переменная связана квантором существования ($\exists$), то в формуле используется знак **конъюнкции** (&).

Пример 2.17.

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

а) **Веста – собака.**

Заменим имя "Веста" символом "в" и введем предикат $P(x)$ = "x – собака". Наше суждение можно выразить формулой: P(в).

б) **Всякая логическая функция может быть задана таблицей**.

Введем предикаты $S(x)$ = "x – логическая функция"; $P(x)$ = "x может быть задана таблицей". Искомая формула: $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$.

в) **Ни один народ не хочет войны**.

Введем предикаты $S(x)$ = "x – народ"; $P(x)$ = "x хочет войны".

Наше суждение можно выразить формулой: $\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$.

г) **Некоторые журналисты были в космосе**.

Введем предикаты $S(x)$ = "x – журналист"; $P(x)$ = "x был в космосе".

Наше суждение можно выразить формулой: $\exists x(S(x) \,\&\, P(x))$.

д) **Некоторые современники динозавров не вымерли**.

Введем предикаты $S(x)$ = "x – современник динозавров"; $P(x)$ = "x вымер".

Наше суждение можно выразить формулой: $\exists x(A(x) \,\&\, \neg P(x))$.

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений: определений, теорем, необходимых и достаточных условий.

Пример.

«Для любого целого $n > 2$ не существует натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих равенству: $x^n + y^n = z^n$».

Введем предикаты: $N(x)$ = "x – натуральное число";

$M(x)$ = "$x > 2$"; $P(x, y, z, n)$ = "$x^n + y^n = z^n$".

Для любых чисел x, y, z, n условие (посылка) теоремы Ферма есть конъюнкция $N(x)\&N(y)\&N(z)\&N(n)\&M(n)$, а заключение есть $\neg P(x, y, z, n)$.

Поэтому теорема Ферма формулируется следующим образом:

$$\forall x \forall y \forall z \forall n (N(x)\&N(y)\&N(z)\&N(n)\&M(n) \Rightarrow \neg P(x, y, z, n)).$$

Если теорема имеет вид $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$, то предикат $Q(x)$ является ***следствием*** предиката $P(x)$. При этом предикат $Q(x)$ называется ***необходимым*** условием предиката $P(x)$, а предикат $P(x)$ – ***достаточным*** условием предиката $Q(x)$.

Пример.

Запишем в виде формулы логики предикатов утверждение: "Если число делится на 6, то оно делится на 3".
Введем предикаты $P(x)$ = "x делится на 6";
$Q(x)$ = "x делится на 3". Наше утверждение формулируется следующим образом:

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)).$$

Предикат $P(x)$ (делимость на 6) является достаточным условием предиката $Q(x)$ (делимость на 3).
Предикат $Q(x)$ (делимость на 3) является необходимым условием предиката $P(x)$ (делимость на 6).