

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Определение. Предикатом $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция, аргументы которой определены на некотором множестве M , $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$, а сама она принимает два значения: И (истина) и Л (ложь). Таким образом, предикат осуществляет отображение

$$M \rightarrow \{И, Л\}.$$

Переменные x_1, x_2, \dots, x_n называются *предметными переменными*, а множество M – *предметной областью*.

Предикат от n переменных называется *n -местным предикатом*.
Высказывание есть 0-местный предикат.

Над предикатами можно производить обычные логические операции и получать при этом другие предикаты. Таким образом, можно говорить об *алгебре предикатов*.

Квантор общности. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат, определенный для каждого $x \in M$. Тогда выражение $\forall xP(x)$ является истинным высказыванием, если $P(x)$ истинно для всякого $x \in M$ и ложным в противном случае.

Символ $\forall x$ называется *квантором общности*. Выражение $\forall xP(x)$ читается: “Для всех x имеет место $P(x)$ ”. В обычной речи квантору общности соответствуют слова: все, всякий, каждый, любой. Возможно отрицание квантора общности: $\neg \forall xP(x)$: “Не для всех x имеет место $P(x)$ ”.

Пример .

Пусть $P(x)$ – предикат “ x – четное число”.

Тогда $\forall xP(x)$ есть высказывание “Всякое x – четное число” = «Все числа – четные».

Отрицание $\neg \forall xP(x)$ есть высказывание «Не всякое x – четное число» = «Не все числа – четные».

Квантор существования. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат, $x \in M$. Тогда выражение $\exists xP(x)$ является истинным высказыванием, если $P(x)$ истинно хотя бы для одного $x \in M$ и ложным в противном случае.

Символ $\exists x$ называется **квантором существования**. Выражение $\exists xP(x)$ читается: “Существует x , для которого имеет место $P(x)$ ”. В обычной речи квантору существования соответствуют слова: некоторый, несколько. Возможно отрицание квантора существования: $\neg \exists xP(x)$: “Не существует x , для которого имеет место $P(x)$ ”.

Пример.

Пусть, $P(x)$ – предикат “ x – четное число”. Тогда $\exists xP(x)$ есть высказывание “Некоторые x – четные числа” = “Существуют четные числа” .

Высказывание $\neg \exists xP(x)$ = “Неверно, что некоторые x – четные числа” = “Не существует четных чисел”.

Кванторы существования и общности называются *двойственными кванторами*.

Буква x , стоящая справа от квантора, называется *кванторной переменной* и должна присутствовать обязательно.

Переменная, стоящая под знаком квантора, называется также *связанной переменной*.

Несвязанная переменная называется *свободной*.

Формулы логики предикатов. Равносильность формул

Определение. Формула логики предикатов определяется индуктивно следующим образом:

1. Любая формула логики высказываний есть формула логики предикатов.

К новым формулам логики предикатов относятся следующие выражения:

2. Предметные переменные x, y, z, \dots есть формулы.

3. Предикаты $P(x), Q(x, y), \dots$, а также выражения с кванторами $\forall xP(x), \exists xR(x), \forall x \exists yQ(x, y), \dots$ есть формулы.

4. Если A и B – формулы, то $\neg A, A \vee B, A \& B, A \Rightarrow B, A \sim B$ есть формулы, в которых свободные переменные формул A и B остаются свободными, а связанные переменные формул A и B остаются связанными.

5. Ничто, кроме указанного в пунктах 1 – 4, не есть формула.

Пример.

1. Следующие выражения являются формулами логики предикатов:

а) $A \& B \Rightarrow C$, где A, B, C – высказывания.

б) $\forall x \exists y Q(x, y, z) \& \forall x \exists y P(x, y, u)$.

Проанализируем последовательно это выражение.

Предикат $Q(x, y, z)$ – формула;

Выражение $\forall x \exists y Q(x, y, z)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменная z – свободная.

Предикат $P(x, y, u)$ – формула.

Выражение $\forall x \exists y P(x, y, u)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменная u – свободная.

Выражение $\forall x \exists y Q(x, y, z) \& \forall x \exists y P(x, y, u)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменные z, u – свободные.

2. Выражение $\forall x \exists y P(x, y, z) \Rightarrow Q(x, y, z)$ формулой **не** является. Действительно, выражение $\forall x \exists y P(x, y, z)$ есть формула, в которой переменные x и y связанные, а переменная z свободная. Выражение $Q(x, y, z)$ также формула, но в ней все переменные x, y, z свободные.

Определение. Формулы F и G , определенные на некотором множестве M , называются **равносильными на этом множестве**, если при любых подстановках констант вместо переменных они принимают одинаковые значения.

Определение. Формулы, равносильные на любых множествах, будем называть просто **равносильными**.

Переход от одних формул к равносильным им другим формулам логики предикатов может быть произведен по следующим правилам:

1. Все равносильности, имеющие место для логики высказываний, переносятся на логику предикатов.

2. Перенос квантора через отрицание.

Пусть A – формула, содержащая свободную переменную x . Тогда

$$\neg(\forall x A(x)) \equiv \exists x(\neg A(x)). \quad (2.1)$$

$$\neg(\exists x A(x)) \equiv \forall x \neg(A(x)). \quad (2.2)$$

3. Вынос квантора за скобки.

Пусть формула $A(x)$ содержит переменную x , а формула B не содержит переменной x , и все переменные, связанные в одной формуле, связаны в другой. Тогда

$$\forall x A(x) \vee B \equiv \forall x (A(x) \vee B).$$

$$\forall x A(x) \& B \equiv \forall x (A(x) \& B).$$

$$\exists x A(x) \vee B \equiv \exists x (A(x) \vee B).$$

$$\exists x A(x) \& B \equiv \exists x (A(x) \& B).$$

4. Дистрибутивность квантора общности относительно конъюнкции и квантора существования относительно дизъюнкции.

Пусть формула B , так же, как и формула A , зависит от x . Тогда

$$\forall x A(x) \& \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \& B(x)).$$

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x)).$$

5. Перестановка одноименных кванторов.

$$\forall x \forall y A(x,y) \equiv \forall y \forall x A(x,y).$$

$$\exists x \exists y A(x,y) \equiv \exists y \exists x A(x,y).$$

Разноименные кванторы переставлять, вообще говоря, нельзя!

6. Переименование связанных переменных.

Заменяя связанную переменную формулы A другой переменной, не входящей в эту формулу, всюду: в кванторе и в области действия квантора, получим формулу, равносильную A .

Пример 2.11.

$$A = \forall x F(x) \Rightarrow \exists x G(x).$$

Заменяя связанную переменную x на y в первом члене импликации и на z во втором, получим равносильную формулу:

$$B = \forall y F(y) \Rightarrow \exists z G(z).$$

$$A \equiv B.$$

Приведенные и нормальные формулы

Определение. Формулы, в которых из логических символов имеются только символы $\&$, \forall и \neg , причем символ \neg встречается лишь перед символами предикатов, называются *приведенными* формулами.

Пример.

1. $A(x)\&B(x, y)$.
2. $\forall xA(x) \vee \exists x\neg B(x, y)$.
3. $\neg(A(x)\&B(x, y))$.
4. $\forall xA(x) \Rightarrow \exists x\neg B(x, y)$.
5. $\neg(\forall xA(x) \Rightarrow \exists x\neg B(x, y))$.

Теорема. Для каждой формулы существует **равносильная ей приведенная формула**, причем множества свободных и связанных переменных этих формул совпадают.

Выражение суждения в виде формулы логики предикатов

Существуют две задачи, определяющие связь между суждениями и формулами логики предикатов:

- 1) выражение суждения в виде формулы логики предикатов;
- 2) интерпретация формулы логики предикатов.

Суждение – это мысль, в которой утверждается наличие или отсутствие свойств предметов, отношений между предметами.

Простым суждением назовем суждение, в котором нельзя выделить часть, в свою очередь являющуюся суждением. Среди простых суждений выделяют **атрибутивные суждения** и **суждения об отношениях**.

Все атрибутивные суждения можно разделить на следующие типы:

" a есть P ", "Все S есть P ", "Ни один S не есть P ", "Некоторые S есть P ", "Некоторые S не есть P ". Эти суждения следующим образом переводятся на язык логики предикатов:

" a есть P " – $P(a)$;

"Все S есть P " – $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$;

"Ни один S не есть P " – $\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$;

"Некоторые S есть P " – $\exists x(S(x) \& P(x))$;

"Некоторые S не есть P " – $\exists x(S(x) \& \neg P(x))$.

Если кванторная переменная связана квантором общности (\forall), то в формуле используется знак **импликации** (\Rightarrow), а если кванторная переменная связана квантором существования (\exists), то в формуле используется знак **конъюнкции** ($\&$).

Пример 2.17.

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

а) **Веста – собака.**

Заменим имя "Веста" символом "в" и введем предикат $P(x) = "x - собака"$. Наше суждение можно выразить формулой: $P(v)$.

б) **Всякая логическая функция может быть задана таблицей.**

Введем предикаты $S(x) = "x - логическая функция"$; $P(x) = "x может быть задана таблицей"$. Искомая формула: $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$.

в) **Ни один народ не хочет войны.**

Введем предикаты $S(x) = "x - народ"$; $P(x) = "x хочет войны"$.

Наше суждение можно выразить формулой: $\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$.

г) **Некоторые журналисты были в космосе.**

Введем предикаты $S(x) = "x - журналист"$; $P(x) = "x был в космосе"$.

Наше суждение можно выразить формулой: $\exists x(S(x) \& P(x))$.

д) **Некоторые современники динозавров не вымерли.**

Введем предикаты $S(x) = "x - современник динозавров"$; $P(x) = "x вымер"$.

Наше суждение можно выразить формулой: $\exists x(A(x) \& \neg P(x))$.

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений: определений, теорем, необходимых и достаточных условий.

Пример.

«Для любого целого $n > 2$ не существует натуральных чисел x, y, z , удовлетворяющих равенству: $x^n + y^n = z^n$ ».

Введем предикаты: $N(x) = "x - \text{натуральное число}";$

$M(x) = "x > 2";$ $P(x, y, z, n) = "x^n + y^n = z^n"$.

Для любых чисел x, y, z, n условие (посылка) теоремы Ферма есть конъюнкция $N(x) \& N(y) \& N(z) \& N(n) \& M(n)$, а заключение есть $\neg P(x, y, z, n)$.

Поэтому теорема Ферма формулируется следующим образом:

$$\forall x \forall y \forall z \forall n (N(x) \& N(y) \& N(z) \& N(n) \& M(n) \Rightarrow \neg P(x, y, z, n)).$$

Если теорема имеет вид $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$, то предикат $Q(x)$ является *следствием* предиката $P(x)$. При этом предикат $Q(x)$ называется *необходимым* условием предиката $P(x)$, а предикат $P(x)$ – *достаточным* условием предиката $Q(x)$.

Пример.

Запишем в виде формулы логики предикатов утверждение:
"Если число делится на 6, то оно делится на 3".

Введем предикаты $P(x) =$ "x делится на 6";

$Q(x) =$ "x делится на 3". Наше утверждение формулируется следующим образом:

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)).$$

Предикат $P(x)$ (делимость на 6) является достаточным условием предиката $Q(x)$ (делимость на 3).

Предикат $Q(x)$ (делимость на 3) является необходимым условием предиката $P(x)$ (делимость на 6).