ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ. ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. ТОЖДЕСТВЕННО-ИСТИННЫЕ ФОРМУЛЫ. РАВНОСИЛЬНОСТЬ ФОРМУЛ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ФОРМУЛ

НАПРАВЛЕНИЯ МАТЛОГИКИ

- **объектом изучения** в математической логике являются различные исчисления, в основные понятия которых входят такие понятия как формальный язык исчисления, аксиомы исчисления и правила вывода.
- Исчисления высказываний
- Исчисление предикатов
- Теория алгоритмов
- Сложность алгоритмов
- Многозначная логика

<u>1. Предмет логики высказываний</u>

- **<u>Определение.</u>** Высказыванием называется утверждение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.
- **<u>Определение.</u>** Истинностным значением высказывания называется

$$|A| = \begin{cases} и, \ \textit{если высказывание истинно} \\ л, \ \textit{если высказывание ложно} \end{cases}$$

2. Действия и операции над высказываниями.

- Пусть *A* и *B* – атомарные (пропозициональные) высказывания, тогда из них можно построить составные высказывания, используя логические связки. В математической логике используют пять логических связок:

$\lvert A \rvert$	$\lvert B \rvert$	$\lvert \overline{A} \rvert$	$\lvert A \vee B \rvert$	$\lvert A \wedge B \rvert$	$\lvert A \to B \rvert$	$\lvert A \equiv B \rvert$
л	*л*	*и*	*л*	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*и*	*и*	*л*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*и*	*л*	*л*	*л*
и	*и*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*

3. Понятие пропозициональной формулы

- **Определение.** Алфавитом называется произвольное непустое множество. Элементы алфавита – символы.
- **Определение.** Слово – произвольная последовательность символов (возможно пустая).
- **Определение.** Произведением слов *A* и *B* в некотором алфавите называется слово *AB*.
- **Определение.** Слово B называется подсловом слова *A*, если существуют такие слова A1 и A2, такие что A=A1 B A2
- **Определение.** Говорят, что слово *C* получено из слова *A* подстановкой слова *D* вместо подслова B, если A=A1 B A2 и C=A1 D A2 .
- **Определение.** Говорят, что слово *C* получено из слова *A* путем замены символа *v* на слово B, если в слове вместо всех символов *v* подставлено слово B.

$$S_{\beta}^{v} A$$

Пусть имеется некоторое множество элементов, называемое алфавитом логики высказываний. Элементы этого множества можно разбить на следующие 3 группы:

- именные символы
- логические символы
- служебные символы

- P, Q, P_1, Q_1,
- ¬, ∧, ∨, →, ~.
- открывающиеся (и закрывающиеся) скобки

<u>Определение.</u> Формулой алгебры высказываний называется:

1. Высказывательная (пропозициональная) переменная
2. Если и некоторые формулы, то $\neg A, (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B)$ тоже являются формулами.
3. Других формул, кроме перечисленных в пунктах (1) и (2), нет.

4. Тавтологии и противоречия

- Пусть $A(X_1,\ldots,X_n)$ – пропозициональная формула, $X_1,\ldots,X_n$ - высказывательные переменные, входящие в формулу A.
- **Определение.** Интерпретацией формулы A называется любой конкретный набор истинностных значений, приписанных переменным $X_1,\ldots,X_n$.
- Пусть I – некоторая интерпретация (т.е. набор значений переменных $X_1,\ldots,X_n$). Тогда через $I(A)$ обозначается значение формулы A в интерпретации I. Формулами, имеющими наиболее простую интерпретацию, являются формулы, равные И либо Л при любой интерпретации.
- **Определение.** Формула называется выполнимой, если она истинна хотя бы при одной интерпретации.
- **Определение.** Формула, истинная при всех возможных интерпретациях, называется общезначимой или тавтологией.
- **Определение.** Формула, ложная при всех возможных интерпретациях, называется невыполнимой или противоречием.
- **Определение.** Формула называется опровержимой, если при некоторой интерпретации она принимает значение Л.

Теорема 1.1:

1) А – тавтология $\Leftrightarrow$ А не является опровержимой
2) А – противоречие $\Leftrightarrow$ А не является выполнимой
3) А – тавтология $\Leftrightarrow$ $\neg$А - противоречие
4) А – противоречие $\Leftrightarrow$ $\neg$А – тавтология

Приведём наиболее важные тавтологии.

1. $A \vee \neg A$ – закон исключённого третьего (tertium nondatur)
2. $\neg\neg A = A$ – закон двойного отрицания
3. $\neg(A \wedge \neg A)$ – закон противоречия
4. $(\neg A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B) \to A$ – служит основанием для прове
доказательств от противного: если отрицание А приводит к противоречию, то А вер

Отметим также следующие тавтологии:

5. $A \to A$
6. $A \to (B \to A)$
7. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ – цепное рассуждение
8. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
9. $(A \wedge B) \to A$; $(A \wedge B) \to B$
10. $A \to (B \to (A \wedge B))$
11. $A \to (A \vee B)$;
12. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$
13. $((A \to B) \to A) \to A$ (закон Пирса)

5. Основные правила получения тавтологий

1 правило. Правило замены позволяет выполнять равносильные преобразования формул для их упрощения или приведения к специальной форме. Например для доказательства того, что формула является тавтологией нужно равносильными преобразованиями свести ее к формуле, очевидно являющейся тавтологией. Правило замены: если

$F(A_1, A_2, \ldots, A_n) = G(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, то для любой формулы алгебры высказываний

$H(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \ldots, X_m)$ имеет место равносильность

$H(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, F(A_1, A_2, \ldots, A_n), X_{i+1}, \ldots, X_m) = H(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, G(A_1, A_2, \ldots, A_n), X_{i+1}, \ldots, X_m)$

2 правило. Правило заключения основано на применении теоремы 1.2.

- **Теорема 1.2:** Если формулы A и $A \to B$ – тавтологии, то B – тавтология.
- Доказательство: Предположим противное, т.е. для некоторой интерпретации I имеем $I(B)=Л$. $I(A)=И$, т.к. A – тавтология, то $I(A \to B)=Л$, что противоречит тому, что $A \to B$ – тавтология.€

3 правило. Правило подстановки: если формула F, содержащая атом A, является тавтологией, то подстановка в формулу F вместо A любой формулы H снова приведет к тавтологии.

6. Равносильность формул. Логическое следование.

- **Определение.** Две формулы A и B, зависящие от одного и того же набора высказывательных переменных называются равносильными, если I(A)=I(B) для любой интерпретации I. Равносильность формул A и B записывается следующим образом: A≡B.
- **Определение.** Формула B логически следует из формулы A (обозначается A⇒B), если формула B имеет значение И при всех интерпретациях, при которых формула A имеет значение И.

- Отношение равносильности на множестве формул логики высказываний является отношением эквивалентности, так как оно:
- Рефлексивно A≡A
- Симметрично A≡B ⇒ B≡A
- Транзитивно A≡B и B≡C ⇒ A≡C

Основные равносильности, которые используются в процессе преобразования формул, следующие:

1. $A \vee A \equiv A$; $A \wedge A \equiv A$ - идемпотентность $\vee$ и $\wedge$
2. $A \vee B \equiv B \vee A$; $A \wedge B \equiv B \wedge A$ - коммутативность $\vee$ и $\wedge$
3. $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$; $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ - ассоциативность $\vee$ и $\wedge$
4. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \wedge C)$ - дистрибутивность $\vee$ относительно $\wedge$
5. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \wedge (A \vee C)$ - дистрибутивность $\wedge$ относительно $\vee$
6. $A \vee Л \equiv A$; $A \wedge Л \equiv Л$
7. $A \vee И \equiv И$; $A \wedge И \equiv A$
8. $\neg(\neg A) \equiv A$ - снятие двойного отрицания
9. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$; $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ - первый и второй законы де Моргана
10. $A \vee \neg A \equiv И$; $A \wedge \neg A \equiv Л$
11. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$; $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ - первый и второй законы поглощения
12. $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$; $A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ - первый и второй законы расщепления
13. $A \sim B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$
14. $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$
15. $A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$
16. $A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

докажем второй закон де Моргана на основе рассмотрения вариантов значений

Пусть для некоторой интерпретации I имеем:

$I(\neg(A \vee B))=И \Rightarrow I(A \vee B)=Л \Rightarrow I(A)=Л$ и $I(B)=Л \Rightarrow I(\neg A)=И$ и $I(\neg B)=И \Rightarrow I(\neg A \wedge \neg B)=И$.

Случай $I(\neg(A \vee B))=Л$ рассматривается аналогично.

Обратно, пусть $I(\neg A \wedge \neg B)=И \Rightarrow I(\neg A)=И$ и $I(\neg B)=И \Rightarrow I(A)=Л$, $I(B)=Л \Rightarrow I(A \vee B)=Л \Rightarrow I(\neg(A \vee B))=И$.€

вопрос сохранения свойства равносильности формул при различных преобразованиях.

- **<u>Теорема 1.3.</u>** Пусть $A \equiv B$ и C – произвольная формула. Тогда:
- $\neg A = \neg B$
- $A \wedge C = B \wedge C$; $C \wedge A = C \wedge B$
- $A \vee C = B \vee C$; $C \vee A = C \vee B$
- $A \to C \equiv B \to C$; $C \to A \equiv C \to B$
- $A \sim C \equiv B \sim C$; $C \sim A \equiv C \sim B$

- Доказательство: продемонстрируем на примере одного из соотношений. Пусть при некоторой интерпретации I имеем $I(A)=I(B)=s$; и пусть $I(C)=t$. Тогда обе части каждой из формул, например, 4) $A \to C \equiv B \to C$ принимают абсолютно одинаковый вид ($s \to t$). €

Теорема 1.4.

1)Две формулы логики высказываний A и B равносильны тогда и только тогда когда формула $A \sim B$ является тавтологией.

2)Формула B логически следует из A тогда и только тогда, когда $A \rightarrow B$ – тавтология.

Следствие:

$A \Rightarrow B \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ – противоречие.

Доказательство.

2) Необходимость:

Пусть $I(A)=$ И. Тогда из определения следования вытекает $I(B)=$И $\Rightarrow$ $I(A \rightarrow B)=$И. Таким образом формула $A \rightarrow B$ тавтология.

Достаточность: Пусть $A \rightarrow B$ – тавтология. Тогда для всякой I, такой что $I(A)=$И необходимо $I(B)=$И, иначе $I(A \rightarrow B)=$Л. Что означает, что A является логическим следствием B.

7. Нормальные формы формул логики высказываний.

- Элиминировать импликацию и эквиваленцию можно с использованием правила замены и равносильностей $(A \to B) \sim (\neg A \vee B)$ и $A \sim B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$.
- Пронести отрицания можно с помощью снятия двойного отрицания и законов де Моргана

Определение. Литера есть атом или отрицание атома.

Определение. Формула A находится в конъюнктивной нормальной форме тогда и только тогда, когда она имеет вид

$A = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_N$,

где каждая A_i есть дизъюнкция литер.

Определение. Формула A находится в дизъюнктивной нормальной форме тогда и только тогда, когда она имеет вид

$A = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_N$,

где каждая A_i есть конъюнкция литер.

- **<u>Теорема 1.5.</u>** Для любой формулы логики высказываний существует эквивалентная ей формула, находящаяся в КНФ.
- **<u>Теорема 1.6.</u>** Для любой формулы логики высказываний существует эквивалентная ей формула, находящаяся в ДНФ.
- **<u>Теорема 1.7.</u>** Для любой опровержимой формулы логики высказываний существует эквивалентная ей формула, находящаяся в СКНФ.
- **<u>Теорема 1.8.</u>** Для любой выполнимой формулы логики высказываний существует эквивалентная ей формула, находящаяся в СДНФ.