

**ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИИ.
ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ.
ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ
ВЫСКАЗЫВАНИЙ.
ТОЖДЕСТВЕННО-ИСТИННЫЕ
ФОРМУЛЫ.
РАВНОСИЛЬНОСТЬ ФОРМУЛ.
ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ.
НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ
ФОРМУЛ**

НАПРАВЛЕНИЯ МАТЛОГИКИ

- **объектом изучения** в математической логике являются различные исчисления, в основные понятия которых входят такие понятия как формальный язык исчисления, аксиомы исчисления и правила вывода.
- Исчисления высказываний
- Исчисление предикатов
- Теория алгоритмов
- Сложность алгоритмов
- Многозначная логика

1. Предмет логики высказываний

- Определение. Высказыванием называется утверждение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.
- Определение. Истинностным значением высказывания называется $|A| = \begin{cases} и, & \text{если высказывание истинно} \\ л, & \text{если высказывание ложно} \end{cases}$

2. Действия и операции над высказываниями.

- Пусть A и B – атомарные (пропозициональные) высказывания, тогда из них можно построить составные высказывания, используя логические связки. В математической логике используют пять логических связок:

$ A $	$ B $	$ \bar{A} $	$ A \vee B $	$ A \wedge B $	$ A \rightarrow B $	$ A \equiv B $
<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>
<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л</i>
<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>л</i>
<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>

3. Понятие пропозициональной формулы

- **Определение.** Алфавитом называется произвольное непустое множество. Элементы алфавита – символы.
- **Определение.** Слово – произвольная последовательность символов (возможно пустая).
- **Определение.** Произведением слов A и B в некотором алфавите называется слово AB .
- **Определение.** Слово B называется подсловом слова A , если существуют такие слова A_1 и A_2 , такие что $A=A_1 B A_2$
- **Определение.** Говорят, что слово C получено из слова A подстановкой слова D вместо подслова B , если $A=A_1 B A_2$ и $C=A_1 D A_2$.
- **Определение.** Говорят, что слово C получено из слова A путем замены символа v на слово B , если в слове C вместо всех символов v подставлено слово B .

$$S_v^B A$$

Пусть имеется некоторое множество элементов, называемое алфавитом логики высказываний.

Элементы этого множества можно разбить на следующие 3 группы:

- именные символы
- логические символы
- служебные символы
- $P, Q, P_1, Q_1,$
- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim.$
- открывающиеся (и закрывающиеся) скобки

Определение. Формулой алгебры высказываний называется:

1. Высказывательная (пропозициональная) переменная
2. Если A и B некоторые формулы, то $(A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B)$ тоже являются формулами.
3. Других формул, кроме перечисленных в пунктах (1) и (2), нет.

4. Тавтологии и противоречия

- Пусть $A(X_1, \dots, X_n)$ – пропозициональная формула, X_1, \dots, X_n – высказывательные переменные, входящие в формулу A .
- **Определение.** Интерпретацией формулы A называется любой конкретный набор истинностных значений, приписанных переменным X_1, \dots, X_n .
- Пусть I – некоторая интерпретация (т.е. набор значений переменных X_1, \dots, X_n). Тогда через $I(A)$ обозначается значение формулы A в интерпретации I . Формулами, имеющими наиболее простую интерпретацию, являются формулы, равные I либо \perp при любой интерпретации.
- **Определение.** Формула называется выполнимой, если она истинна хотя бы при одной интерпретации.
- **Определение.** Формула, истинная при всех возможных интерпретациях, называется общезначимой или тавтологией.
- **Определение.** Формула, ложная при всех возможных интерпретациях, называется невыполнимой или противоречием.
- **Определение.** Формула называется опровержимой, если при некоторой интерпретации она принимает значение \perp .

Теорема 1.1:

- 1) A – тавтология $\Leftrightarrow A$ не является опровержимой
- 2) A – противоречие $\Leftrightarrow A$ не является выполнимой
- 3) A – тавтология $\Leftrightarrow \neg A$ – противоречие
- 4) A – противоречие $\Leftrightarrow \neg A$ – тавтология

Приведём наиболее важные тавтологии.

1. $A \vee \neg A$ – закон исключённого третьего (*tertium nondatur*)
2. $\neg \neg A = A$ – закон двойного отрицания
3. $\neg(A \wedge \neg A)$ – закон противоречия
4. $(\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$ – служит основанием для прове-

доказательств от противного: если отрицание A приводит к противоречию, то A вер-

Отметим также следующие тавтологии:

5. $A \rightarrow A$
6. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
7. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ – цепное рассуждение
8. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
9. $(A \wedge B) \rightarrow A$; $(A \wedge B) \rightarrow B$
10. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
11. $A \rightarrow (A \vee B)$;
12. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$
13. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (закон Пирса)

5. Основные правила получения тавтологий

1 правило. Правило замены позволяет выполнять равносильные преобразования формул для их упрощения или приведения к специальной форме. Например для доказательства того, что формула является тавтологией нужно равносильными преобразованиями свести ее к формуле, очевидно являющейся тавтологией.

Правило замены: если

$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = G(A_1, A_2, \dots, A_n)$, то для любой формулы алгебры высказываний

$H(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_m)$ имеет место равносильность

$H(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, F(A_1, A_2, \dots, A_n), X_{i+1}, \dots, X_m) = H(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, G(A_1, A_2, \dots, A_n), X_{i+1}, \dots, X_m)$

2 правило. Правило заключения основано на применении теоремы 1.2.

- **Теорема 1.2:** Если формулы A и $A \rightarrow B$ – тавтологии, то B – тавтология.
- Доказательство: Предположим противное, т.е. для некоторой интерпретации I имеем $I(B)=\text{Л}$. $I(A)=\text{И}$, т.к. A – тавтология, то $I(A \rightarrow B)=\text{Л}$, что противоречит тому, что $A \rightarrow B$ – тавтология. €

3 правило. Правило подстановки: если формула F , содержащая атом A , является тавтологией, то подстановка в формулу F вместо A любой формулы H снова приведет к тавтологии.

6. Равносильность формул.

Логическое следование.

- **Определение.** Две формулы A и B , зависящие от одного и того же набора высказывательных переменных называются равносильными, если $I(A)=I(B)$ для любой интерпретации I . Равносильность формул A и B записывается следующим образом: $A \equiv B$.
- **Определение.** Формула B логически следует из формулы A (обозначается $A \Rightarrow B$), если формула B имеет значение I при всех интерпретациях, при которых формула A имеет значение I .
- Отношение равносильности на множестве формул логики высказываний является отношением эквивалентности, так как оно:
 - Рефлексивно $A \equiv A$
 - Симметрично $A \equiv B \Rightarrow B \equiv A$
 - Транзитивно $A \equiv B$ и $B \equiv C \Rightarrow A \equiv C$

Основные равносильности, которые используются в процессе преобразования формул, следующие:

1. $A \vee A \equiv A$; $A \wedge A \equiv A$

- идемпотентность \vee и \wedge

2. $A \vee B \equiv B \vee A$; $A \wedge B \equiv B \wedge A$

- коммутативность \vee и \wedge

3. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$; $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

- ассоциативность \vee и \wedge

4. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

- дистрибутивность \vee относительно \wedge

5. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

- дистрибутивность \wedge относительно \vee

6. $A \vee \text{Л} \equiv A$; $A \wedge \text{Л} \equiv \text{Л}$

7. $A \vee \text{И} \equiv \text{И}$; $A \wedge \text{И} \equiv A$

8. $\neg(\neg A) \equiv A$

- снятие двойного отрицания

9. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$; $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

- первый и второй законы де Моргана

10. $A \vee \neg A \equiv \text{И}$; $A \wedge \neg A \equiv \text{Л}$

11. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$; $A \vee (A \wedge B) \equiv A$

- первый и второй законы поглощения

12. $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$; $A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

- первый и второй законы расщепления

13. $A \sim B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

14. $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

15. $A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

16. $A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

докажем второй закон де Моргана на основе рассмотрения вариантов значений

Пусть для некоторой интерпретации I имеем:

$$\begin{aligned} I(\neg(A \vee B))=И &\Rightarrow I(A \vee B)=Л \Rightarrow I(A)=Л \text{ и } I(B)=Л \\ &\Rightarrow I(\neg A)=И \text{ и } I(\neg B)=И \Rightarrow I(\neg A \wedge \neg B)=И. \end{aligned}$$

Случай $I(\neg(A \vee B))=Л$ рассматривается аналогично.

Обратно, пусть $I(\neg A \wedge \neg B)=И \Rightarrow I(\neg A)=И$ и $I(\neg B)=И \Rightarrow I(A)=Л, I(B)=Л \Rightarrow I(A \vee B)=Л \Rightarrow I(\neg(A \vee B))=И. \in$

вопрос сохранения свойства равносильности формул при различных преобразованиях.

- **Теорема 1.3.** Пусть $A \equiv B$ и C – произвольная формула. Тогда:
 - $\neg A \equiv \neg B$
 - $A \wedge C \equiv B \wedge C; \quad C \wedge A \equiv C \wedge B$
 - $A \vee C \equiv B \vee C; \quad C \vee A \equiv C \vee B$
 - $A \rightarrow C \equiv B \rightarrow C; \quad C \rightarrow A \equiv C \rightarrow B$
 - $A \sim C \equiv B \sim C; \quad C \sim A \equiv C \sim B$
- Доказательство: продемонстрируем на примере одного из соотношений. Пусть при некоторой интерпретации I имеем $I(A) = I(B) = s$; и пусть $I(C) = t$. Тогда обе части каждой из формул, например, 4) $A \rightarrow C \equiv B \rightarrow C$ принимают абсолютно одинаковый вид $(s \rightarrow t)$.
€

Теорема 1.4.

- 1) Две формулы логики высказываний A и B равносильны тогда и только тогда, когда формула $A \sim B$ является тавтологией.
- 2) Формула B логически следует из A тогда и только тогда, когда $A \rightarrow B$ – тавтология.

Следствие:

$A \Rightarrow B \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ – противоречие.

Доказательство.

2) Необходимость:

Пусть $I(A) = И$. Тогда из определения следования вытекает $I(B) = И \Rightarrow I(A \rightarrow B) = И$. Таким образом формула $A \rightarrow B$ тавтология.

Достаточность: Пусть $A \rightarrow B$ – тавтология. Тогда для всякой I , такой что $I(A) = И$ необходимо $I(B) = И$, иначе $I(A \rightarrow B) = Л$. Что означает, что A является логическим следствием B .

7. Нормальные формы формул ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ.

- Элиминировать импликацию и эквиваленцию можно с использованием правила замены и равносильностей $(A \rightarrow B) \sim (\neg A \vee B)$ и $A \sim B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.
- Пронести отрицания можно с помощью снятия двойного отрицания и законов де Моргана

Определение. Литера есть атом или отрицание атома.

Определение. Формула A находится в конъюнктивной нормальной форме тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$A = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n,$$

где каждая A_i есть дизъюнкция литер.

Определение. Формула A находится в дизъюнктивной нормальной форме тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$A = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n,$$

где каждая A_i есть конъюнкция литер.

- **Теорема 1.5.** Для любой формулы логики высказываний существует эквивалентная ей формула, находящаяся в КНФ.
- **Теорема 1.6.** Для любой формулы логики высказываний существует эквивалентная ей формула, находящаяся в ДНФ.
- **Теорема 1.7.** Для любой опровержимой формулы логики высказываний существует эквивалентная ей формула, находящаяся в СКНФ.
- **Теорема 1.8.** Для любой выполнимой формулы логики высказываний существует эквивалентная ей формула, находящаяся в СДНФ.