


Машины Тьюринга




Машина Тьюринга – это
конечный автомат,
способный читать и писать
на бесконечной ленте.

Машина Тьюринга состоит из:

- управляющего устройства, которое может находиться в одном из состояний, образующих конечное множество $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$;
- бесконечной ленты, разбитой на ячейки, в каждой из которых может быть задан один из символов конечного алфавита $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$;

● Устройства обращения к ленте, т. е. считывающей и пишущей головки, которая в зависимости от символа в обозреваемой ячейке и состояния управляющего устройства:

- a) Записывает в ячейку символ;
- b) Сдвигается на ячейку влево или вправо или остается на месте;
- c) Переходит в новое состояние.



Данные машины Тьюринга – это слова в алфавите ленты.

Память машины Тьюринга – это конечное множество состояний (внутренняя память) и лента (внешняя память)

● **Детерминированность:**

для любого внутреннего состояния q_i и символа a_j однозначно заданы:

- a) Следующее состояние q_i' ;
- b) Символ a_j , который нужно записать вместо ;
- c) Направление сдвига головки: L(влево), R(вправо), E(на месте).

Элементарные шаги машины – это считывание и запись символов, сдвиг на ячейку влево или вправо, а также переход управляющего устройства в следующее состояние.

Результатом работы машины Тьюринга – является слово на ленте после остановки машины.

Массовость машины Тьюринга – возможность выбора в качестве начальной системы любого слова в алфавите.

- **Стандартной начальной конфигурацией** назовем конфигурацию вида $q_1 \alpha$, т.е. конфигурацию, содержащую начальное состояние, в которой головка обозревает крайний левый символ слова, написанного на ленте.
- **Стандартной заключительной конфигурацией** назовем конфигурацию вида $q_z \alpha$.

Пример 1.

Пусть имеются команды:

$$q_2 a_5 \rightarrow q_3 a_4 R$$

$$q_3 a_1 \rightarrow q_4 a_2 L$$

Тогда $q_2 a_5 a_1 a_2 \rightarrow a_4 q_3 a_1 a_2 \rightarrow q_4 a_4 a_2 a_2$

$$q_2 a_5 a_1 a_2 \rightarrow q_4 a_4 a_2 a_2$$

● Пример 2.

Задана машина с алфавитом $A = \{1, \lambda\}$, состояниями $Q = \{q_1, q_2\}$ и системой команд

$$q_1 1 \rightarrow q_1 1R,$$

$$q_1 \lambda \rightarrow q_1 1R$$

Пусть f – функция отображающая множество векторов A^* в себя. Машина T *вычисляет функцию f* , если:

- 1) Для любых векторов V и W , таких что $f(V)=W$, $q_1 V^* \rightarrow q_z W^*$, где V^* , W^* - правильные записи V и W ;
- 2) Для любого вектора V , такого, что $f(V)$ не определено, то машина T , запущенная в стандартной начальной конфигурации $q_1 V^*$, работает бесконечно.

Если для функции f существует машина, которая ее вычисляет, то f называется ***вычислимой по Тьюрингу***.

Две машины Тьюринга с одинаковым алфавитом A^* называются ***эквивалентными***, если они вычисляют одну и ту же функцию.

● Пример 3.

Алфавит $A = \{1, *, \lambda\}$, состояния

$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_z\}$, система команд:

$$q_1 * \rightarrow q_z \lambda R$$

$$q_1 1 \rightarrow q_2 \lambda R$$

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 R$$

$$q_2 * \rightarrow q_3 1 L$$

$$q_3 1 \rightarrow q_3 1 L$$

$$q_3 \lambda \rightarrow q_z \lambda R$$

Операции над машинами Тьюринга

Теорема 1. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ вычислимы по Тьюрингу, то их композиция $g(x) = f_2(f_1(x))$ также вычислима по Тьюрингу.

Определение: Машина

Тьюринга T вычисляет предикат $P(a)$, если $T(a) = \omega$, где $\omega = T$, когда $P(a)$ истинно, и $\omega = F$, когда $P(a)$ ложно. Если $P(a)$ не определен, то машина T не останавливается.

Определение. Говорят, что машина T вычисляет предикат $P(a)$ с восстановлением, если $T(a) = \omega a$.

Лемма. Если существует машина T , вычисляющая T' , вычисляющая $P(a)$ с восстановлением.

Теорема 2. Если функции $g_1(a)$, $g_2(a)$ и предикат $P(a)$ вычислимы по Тьюрингу, то развилка $g_1(a)$ и $g_2(a)$ по $P(a)$ также вычислима.

Теорема 3. Если функции $g_1(a)$, $g_2(a)$ и предикат $P(a)$ вычислимы по Тьюрингу, то цикл $g_1(a)$ и $g_2(a)$ по $P(a)$ также вычислима.

Универсальная машина Тьюринга

Определение. Машина Тьюринга U , вычисляющая функцию от двух переменных и такая, что для любой машины T с системой команд Σ_T $U(\Sigma_T, \alpha) = T(\alpha)$, если $T(\alpha)$ определена и $U(\Sigma_T, \alpha)$ не останавливается, если $T(\alpha)$ не останавливается.

Теорема 4. Универсальная машина Тьюринга существует.

Тезис Тьюринга. Всякий алгоритм может быть реализован машиной Тьюринга

Теорема 5. Не существует машины Тьюринга T_0 , решающей проблему остановки для любой машины Тьюринга T .