Машины Тьюринга

Машина Тьюринга – это конечный автомат, способный читать и писать на бесконечной ленте.

Машина Тьюринга состоит из:

- управляющего устройства, которое может находиться в одном из состояний, образующих конечное множество $Q=\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$;
- бесконечной ленты, разбитой на ячейки, в каждой из которых может быть задан один из символов конечного алфавита $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$;

- Устройства обращения к ленте, т. е. считывающей и пишущей головки, которая в зависимости от символа в обозреваемой ячейке и состояния управляющего устройства:

a) Записывает в ячейку символ;
b) Сдвигается на ячейку влево или вправо или остается на месте;
c) Переходит в новое состояние.

Данные машины Тьюринга – это слова в алфавите ленты.

Память машины Тьюринга – это конечное множество состояний (внутренняя память) и лента (внешняя память)

- **Детерминированность:**

  для любого внутреннего состояния q_i и символа a_j однозначно заданы:

a) Следующее состояние q_i';

b) Символ a_j', который нужно записать вместо a_j;

c) Направление сдвига головки: L(влево), R(вправо), E(на месте).

Элементарные шаги машины – это считывание и запись символов, сдвиг на ячейку влево или вправо, а также переход управляющего устройства в следующее состояние.

Результатом работы машины Тьюринга – является слово на ленте после остановки машины.

Массовость машины Тьюринга – возможность выбора в качестве начальной системы любого слова в алфавите.

- **Стандартной начальной конфигурацией** назовем конфигурацию вида $q_1\alpha$, т.е. конфигурацию, содержащую начальное состояние, в которой головка обозревает крайний левый символ слова, написанного на ленте.
- **Стандартной заключительной конфигурацией** назовем конфигурацию вида $q_z\alpha$.

Пример 1.

Пусть имеются команды:

$q_2 a_5 \to q_3 a_4 \mathrm{R}$

$q_3 a_1 \to q_4 a_2 \mathrm{L}$

Тогда $q_2 a_5 a_1 a_2 \to a_4 q_3 a_1 a_2 \to q_4 a_4 a_2 a_2$

$q_2 a_5 a_1 a_2 \to q_4 a_4 a_2 a_2$

- Пример 2.

Задана машина с алфавитом $A=\{1, \lambda\}$, состояниями $Q=\{q_1, q_2\}$ и системой команд

$$q_1 1 \rightarrow q_1 1R,$$

$$q_1\lambda \rightarrow q_1 1R$$

Пусть *f* – функция отображающая множество векторов A* в себя. Машина T ***вычисляет функцию f***,если:

1) Для любых векторов V и W, таких что f(V)=W, q_1V*→q_zW* , где V*, W* - правильные записи V и W;
2) Для любого вектора V, такого, что f(V) не определено, то машина T, запущенная в стандартной начальной конфигурации q_1V*, работает бесконечно.

Если для функции *f* существует машина, которая ее вычисляет, то *f* называется ***вычислимой по Тьюрингу***.

Две машины Тьюринга с одинаковым алфавитом A* называются ***эквивалентными***, если они вычисляют одну и ту же функцию.

- Пример 3.

Алфавит A={1, *, λ}, состояния

Q={q1, q2, q3, qz}, система команд:

$q_1* \to q_z\lambda R$

$q_1 1 \to q_2\lambda R$

$q_2 1 \to q_2 1R$

$q_2* \to q_3 1L$

$q_3 1 \to q_3 1L$

$q_3\lambda \to q_z\lambda R$

Операции над машинами Тьюринга

Теорема 1. Если функции $\boldsymbol{f_1(x)}$ и $\boldsymbol{f_2(y)}$ вычислимы по Тьюрингу, то их композиция $\boldsymbol{g(x) = f_2(f_1(x))}$ также вычислима по Тьюрингу.

Определение: Машина Тьюринга T вычисляет предикат P(ɑ), если T(ɑ)=ω, где ω=T, когда P(ɑ) истинно, и ω=F, когда P(ɑ) ложно. Если P(ɑ) не определен, то машина T не останавливается.

Определение. Говорят, что машина T вычисляет предикат P(α) с восстановлением, если T(α)=ωα.

Лемма. Если существует машина T, вычисляющая T’, вычисляющая P(α) с восстановлением.

Теорема 2. Если функции $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha)$ и предикат $P(\alpha)$ вычислимы по Тьюрингу, то развилка $g_1(\alpha)$ и $g_2(\alpha)$ по $P(\alpha)$ также вычислима.

Теорема 3. Если функции $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha)$ и предикат $P(\alpha)$ вычислимы по Тьюрингу, то цикл $g_1(\alpha)$ и $g_2(\alpha)$ по $P(\alpha)$ также вычислима.

Универсальная машина Тьюринга

Определение. Машина Тьюринга U, вычисляющая функцию от двух переменных и такая, что для любой машины T с системой команд Σ_T $U(\Sigma_T, \alpha)=T(\alpha)$, если $T(\alpha)$ определена и $U(\Sigma_T,\alpha)$ не останавливается, если $T(\alpha)$ не останавливается.

Теорема 4. Универсальная машина Тьюринга существует.

Тезис Тьюринга. Всякий алгоритм может быть реализован машиной Тьюринга

Теорема 5. Не существует машины Тьюринга T_0, решающей проблему остановки для любой машины Тьюринга T.