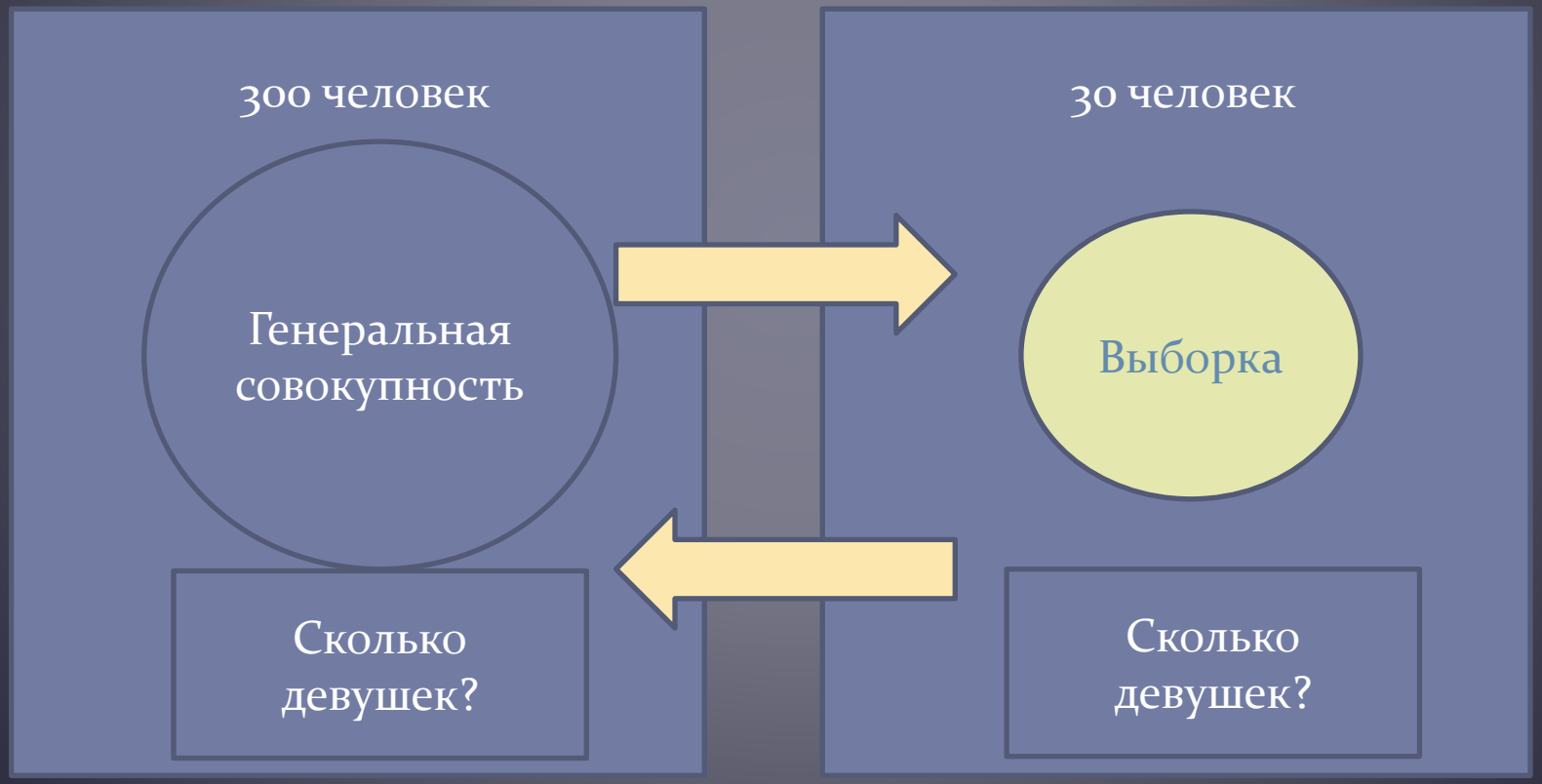
Математическая статистика

Раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений

- Предметом математической статистики является изучение случайных величин по результатам наблюдений.
- Задачи:
- 1. упорядочить данные
- 2. оценить характеристики наблюдаемой величины
- 3. проверить статистическую гипотезу

- Говорят, что «математическая статистика – это теория принятия решения в условиях неопределенности».

Генеральная совокупность и выборка



выборка

- Повторная
- Бесповторная

Способ отбора

- Простой
- Типический
- Механический
- Серийный

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, x_k – n_k раз и $\sum n_i = n$ – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют ***вариантами***, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – ***вариационным рядом***. Числа наблюдений n_i называют ***абсолютными частотами***, а их отношения к объему выборки $n_i / n = w_i$ – ***относительными частотами или частностями.***

Соответствие, установленное между наблюдаемыми вариантами и их частотами (абсолютными или относительными), *называют* ***статистическим распределением.***

При этом должны выполняться два ***условия нормировки***:

1) $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ (объем выборки);

2) $w_1 + w_2 + \ldots + w_k = 1$.

Удобной формой записи статистического распределения является таблица. В верхней строке таблицы записывают последовательность вариант, в нижней – соответствующие им частоты (абсолютные или относительные).

Пример 1. Имеются данные о количестве дежурств сотрудниками кафедры за месяц. Произведена выборка объемом $n = 15$:

3 0 5 7 4 3 1 9 5 3 4 4 2 8 5.

Составить статистический вариационный ряд распределения частот (абсолютных и относительных).

Решение

1. Расположить значения выборки в возрастающем порядке:

0 1 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5 7 8 9.

Имеем девять различных значений.

2. Найти абсолютные частоты появления каждого значения выборки:

$n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$, $n_4 = 3$, $n_5 = 3$, $n_6 = 3$, $n_z = 1$, $n_8 = 1$, $n_9 = 1$.

Проверить первое условие нормировки:

$$n = \sum_{i=1}^{9} n_i = 1+1+1+3+3+3+1+1+1 = 15$$

3. Вычислить относительные частоты появления каждого значения выборки по формуле $w_i = n_i / n$:

$w_1^* = 1/15$, $w_2 = 1/15$, $w_3 = 1/15$, $w_4 = 3/15$, $w_5 = 3/15$, $w_6 = 3/15$, $w_7 = 1/15$, $w_8 = 1/15$, $w_9 = 1/15$.

Проверить второе условие нормировки:

.

$$W = \sum_{i=1}^{9} w_i^* = \frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15} = 1$$

4. Внести полученные данные в таблицу:

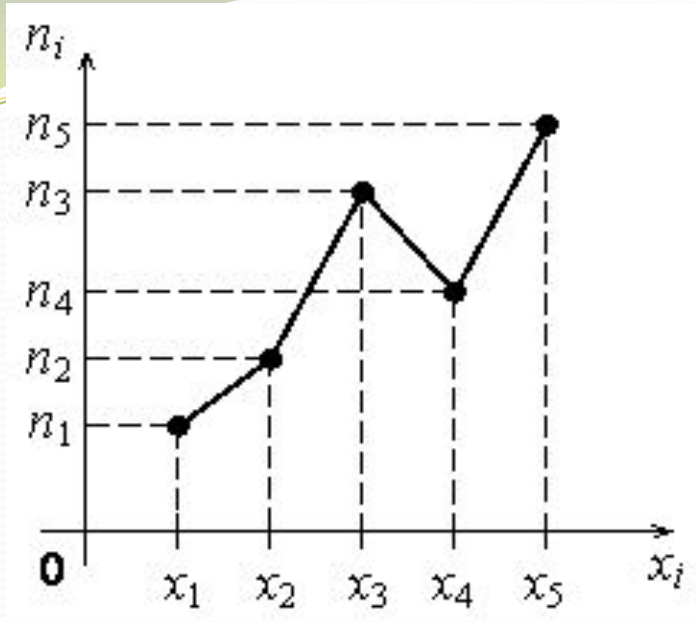
X_i	0	1	2	3	4	5	7	8	9
n_i	1	1	1	3	3	3	1	1	1
w_i	1/15	1/15	1/15	3/15	3/15	3/15	1/15	1/15	1/15

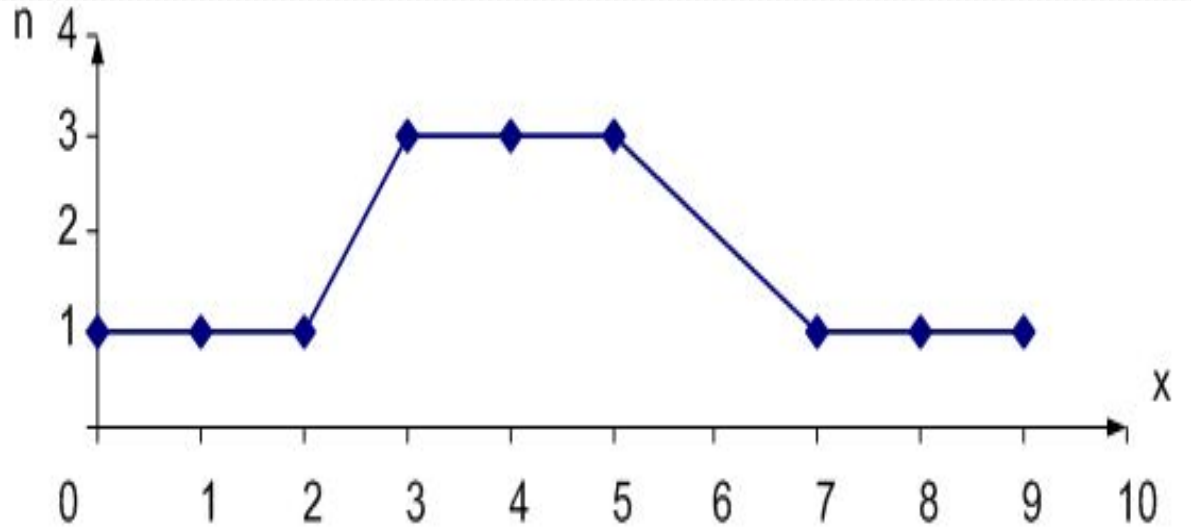
ПОЛИГОН

Для геометрического изображения такого статистического распределения служит *полигон частот* или *полигон относительных частот.*

Полигоном частот называют *ломаную линию, отрезки, которой соединяют точки* $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2)$, …, $(x_k;n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i.

Полигоном относительных частот называют *ломаную линию, отрезки которой соединяют точки* $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, … , $(x_k; w_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты p_i


n_i
n_5
n_3
n_4
n_2
n_1
0
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_i


n
4
3
2
1
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Гистограмма

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, основанием i-го прямоугольника которой являются частичные интервалы длиною Δ_i, и высотой n_i.

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i.

В практике для удобства вычислений обычно используют ряды с равными интервалами (Δ), которые называют шагом интервала.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною Δ_i, а высоты равны отношению w_i.

Построение гистограммы

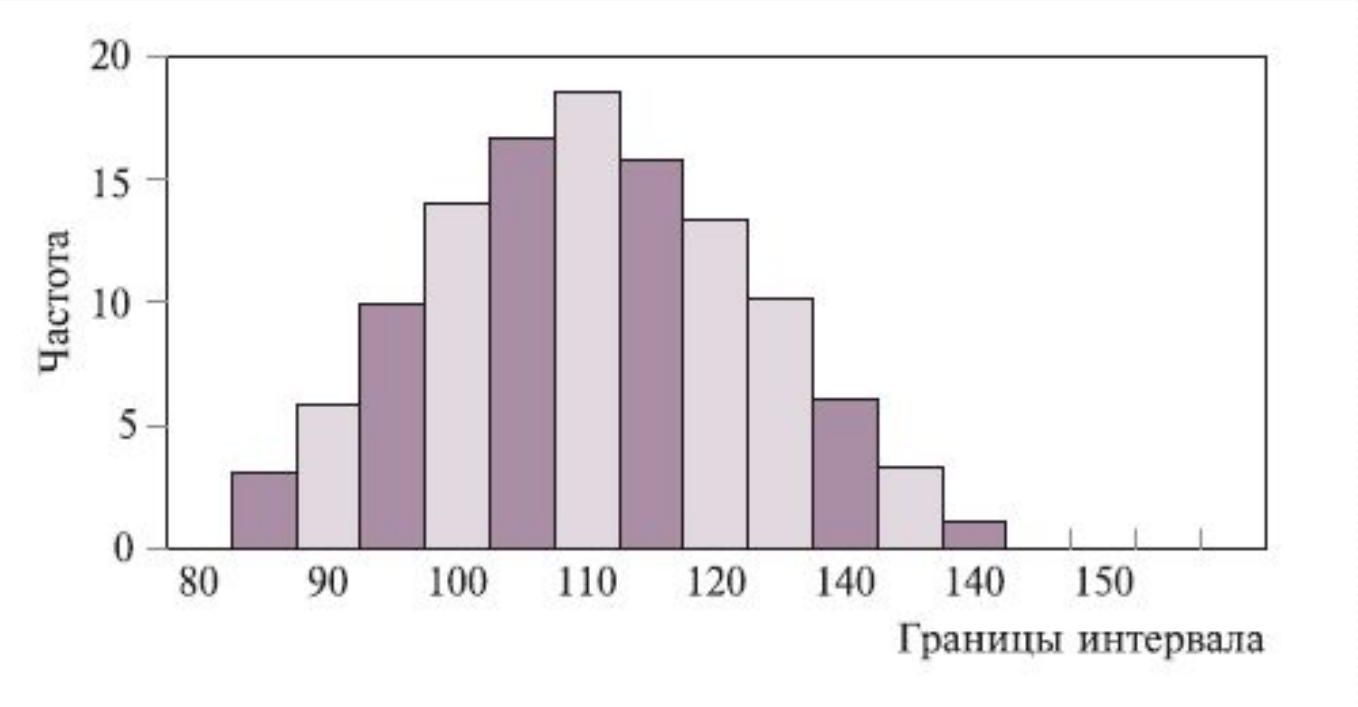
Порядок построения гистограммы

1. Собрать данные, выявить максимальное и минимальное значения и определить диапазон (размах) гистограммы.
2. Полученный диапазон разделить на интервалы, предварительно определив их число (обычно 5-20 в зависимости от числа показателей) и определить ширину интервала.

$$\Delta = (x_{\max} - x_{\min}) / k$$

3. Все данные распределить по интервалам в порядке возрастания: левая граница первого интервала должна быть равна наименьшему из имеющихся значений.
4. Подсчитать частоту каждого интервала.
5. Вычислить относительную частоту попадания данных в каждый из интервалов.
6. По полученным данным построить гистограмму - столбчатую диаграмму, высота столбиков которой соответствует частоте или относительной частоте попадания данных в каждый из интервалов:

Гистограмма нормального распределения

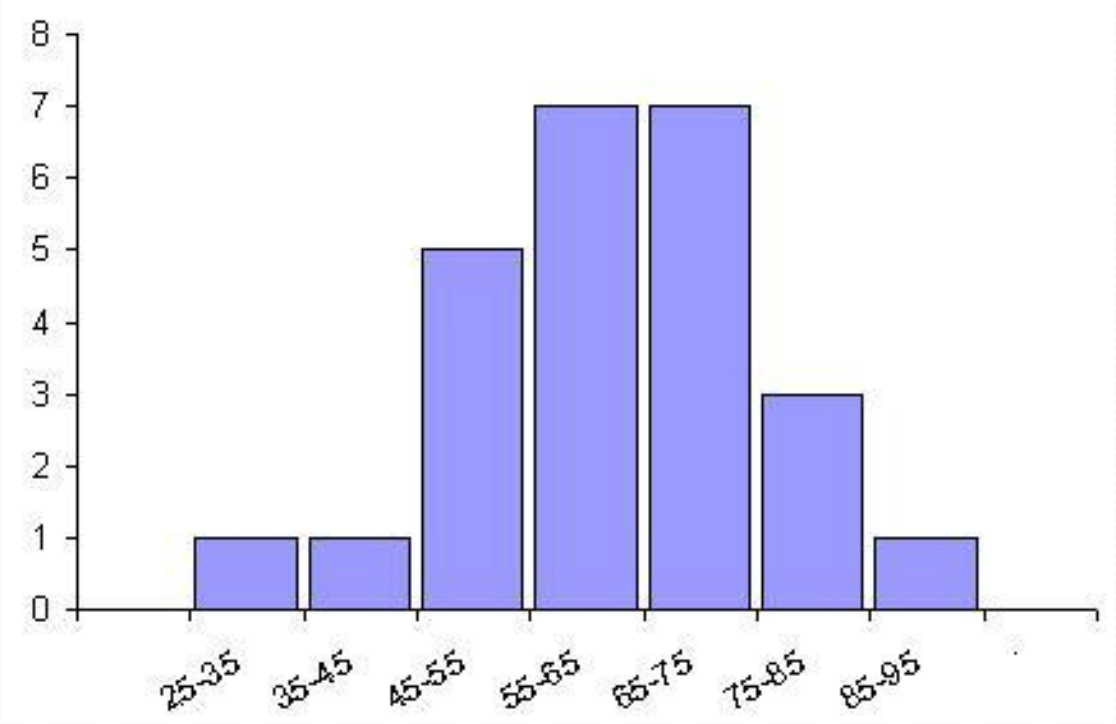


Пример.2. По результатам тестирования по анатомии студентов 2-го курса получены данные о доступности заданий теста (отношение числа студентов, правильно выполнивших задания, к числу тестировавшихся студентов), представленные ниже, в таблице. Тест содержал 25 заданий. Получены следующие данные: 25, 37, 46, 46, 50, 54, 55, 57, 58, 60, 60, 61, 64, 65, 66, 66, 67, 70, 71, 72, 75, 77, 85, 85, 95. Построить гистограмму, распределив данные в 7 интервалов.

Доступность задания *x*, %	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
Количество задач *n*	1	1	5	7	7	3	1

Решение.

Откладываем на оси абсцисс 7 отрезков длиной 10. На них, как на основаниях, строим прямоугольники, высоты которых соответственно равны 1, 1, 5, 7, 7, 3, 1. Полученная ступенчатая фигура и является искомой гистограммой.



Статистические оценки

- Оценка
  - Точечная
  - Интервальная

- Точечная
  - смещенная
  - несмещенная
  - эффективная
  - состоятельная
- Оценка
- Хар-ка

Пусть изучается дискретная генеральная совокупность относительно количественного признака. **Генеральной средней** называется среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности. Она вычисляется по формуле

$$\overline{x_г} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{или} \qquad \overline{x_г} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i$$

где x_i — значения признака генеральной совокупности объема n; m_i — соответствующие частоты, причем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = n$$

Если генеральная средняя неизвестна и требуется оценить ее по данным выборки, то в качестве оценки генеральной средней принимают выборочную среднюю, которая является несмещенной и состоятельной оценкой. Отсюда следует, что если по нескольким выборкам достаточно большого объема из одной и той же генеральной совокупности будут найдены выборочные средние, то они будут приближенно равны между собой. В этом состоит свойство **устойчивости выборочных средних**.

$$\overline{x_в} = \overline{x_г}$$

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят сводную характеристику $D_г$ — генеральную дисперсию. **Генеральной дисперсией** называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения , которое вычисляется по формуле

$$D_г = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_г})^2$$

$$D_г = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_г})^2 m_i$$

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние наблюденных значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $x_в$, вводят сводную характеристику $D_в$ — выборочную дисперсию. **Выборочной дисперсией** называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюденных значений признака от их среднего значения , которое вычисляется по формуле

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_в})^2$$

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_в})^2 m_i$$

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака генеральной (выборочной) совокупности вокруг своего среднего значения используют сводную характеристику — среднее квадратическое отклонение. **Генеральным средним квадратическим отклонением** называют квадратный корень из генеральной дисперсии:

$$\sigma_г = \sqrt{D_г}$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}$$

Пусть из генеральной совокупности в результате n независимых наблюдений над количественным признаком x извлечена выборка объема n. Требуется по данным выборки оценить неизвестную генеральную дисперсию $D_г$. Если в качестве оценки генеральной дисперсии принять выборочную дисперсию, то эта оценка приведет к систематическим ошибкам, давая заниженное значение генеральной дисперсии. Объясняется это тем, что выборочная дисперсия является смещенной оценкой $D_г$. Другими словами, математическое ожидание выборочной дисперсии не равно оцениваемой генеральной дисперсии, а равно .

$$M(D_в) = \frac{n-1}{n} D_г$$

Легко исправить выборочную дисперсию так, чтобы ее математическое ожидание было равно генеральной дисперсии. Для этого нужно умножить $D_в$ на дробь $\frac{n}{n-1}$.

В результате получим исправленную дисперсию S^2, которая будет несмещенной оценкой генеральной дисперсии:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_в})^2 m_i$$

Интервальные оценки

Задачу интервального оценивания можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал, относительно которого с заранее выбранной вероятностью можно сказать, что внутри него находится оцениваемый параметр. Интервальное оценивание особенно необходимо при малом количестве наблюдений, когда точечная оценка малонадежна.

Доверительным интервалом $\tilde{\Theta}_n^{(1)}$ $\tilde{\Theta}_n^{(2)}$ для параметра Θ называется такой интервал, относительно которого с заранее выбранной вероятностью p=1-α , близкой к единице, можно утверждать, что он содержит неизвестное значение параметра Θ, то есть $P\left\{\tilde{\Theta}_n^{(1)} < \Theta < \tilde{\Theta}_n^{(2)}\right\} = 1 - \alpha$. Чем меньше для выбранной вероятности число $\left|\tilde{\Theta}_n^{(1)} - \tilde{\Theta}_n^{(2)}\right|$, тем точнее оценка неизвестного параметра Θ. И, наоборот, если это число велико, то оценка, проведенная с помощью данного интервала, малопригодна для практики.

Так как концы доверительного интервала зависят от элементов выборки, то значения $\tilde{\Theta}_n^{(1)}$ и $\tilde{\Theta}_n^{(2)}$ могут изменяться от выборки к выборке. Вероятность принято называть **доверительной** (надежностью). Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве берут число, близкое к единице. Выбор доверительной вероятности не является математической задачей, а определяется конкретной решаемой проблемой. Наиболее часто задают надежность, равную 0,95; 0,99; 0,999.

Доверительный интервал для генеральной средней нормального распределения признака при неизвестном значении среднего квадратического отклонения задается выражением

$$(\overline{x_г} - \delta < \mu < \overline{x_г} + \delta)$$

$$\delta = t_{\alpha,n} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$t_{\alpha,n}$ Коэффициент Стьюдента

Определение необходимого объема выборки для получения оценок заданной точности

При планировании выборочного наблюдения с заранее заданным значением допустимой ошибки выборки необходимо правильно оценить требуемый **объем выборки**. Этот объем может быть определен на основе допустимой ошибки при выборочном наблюдении исходя из заданной вероятности p , гарантирующей допустимую величину уровня ошибки (с учетом способа организации наблюдения). Формулы для определения необходимой численности выборки n легко получить непосредственно из формул предельной ошибки выборки. Так, из выражения для предельной ошибки:

$$\delta = t\sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

непосредственно вычисляется необходимый объем выборки n:

$$n = \frac{t^2 S^2}{\delta^2}$$

- Поясним смысл, который имеет заданная надежность. Надежность γ=0,95 указывает, что если произведено достаточно большое число выборок, то 95% из них определяет такие доверительные интервалы, В которых параметр действительно заключен, лишь в 5 % случаев он моет выйти за границы доверительного интервала.