Санкт-Петербургский
ИНСТИТУТ ПСИХОЛОГИИ
И АКМЕОЛОГИИ

Практическое занятие 6 (2 часа).

Математическая статистика

Ранги. Непараметрические критерии U-Манна-Уитни (для несвязанных выборок) и W-Вилкоксона (для связанных выборок)

Непараметрические критерии

- Непараметрические методы обладают меньшей чувствительностью, чем параметрические.
- Условия применения непараметрических методов:
  1) несоответствие распределения значений в генеральной выборке нормальному закону; 2) слишком малая выборка, чтобы судить о законе распределения; 3) невыполнение требования о гомогенности дисперсии при сравнении средних значений для независимых выборок; 4) наличие в выборке выбросов (экстремально больших или экстремально малых значений).
- Важную группу непараметрических критериев составляют ранговые критерии.

Ранги

- Ранжированная выборка получается, если расположить выборочные данные в порядке возрастания или убывания. Рангом выборочного значения называется порядковый номер этого значения. Ранг однозначно определен порядковым номером, если в выборке нет совпадающих значений.
- Если в выборке есть совпадающие значения, то их ранги определяются как **среднее арифметическое порядковых номеров** совпадающих значений.
- Рангами могут быть представлены данные, выраженные в порядковой шкале, в том числе результаты наблюдения качественных признаков, когда невозможно измерить точное численное значение признака, но можно определить очередность значений по принципу «больше-меньше» (например, места в спортивных состязаниях, результаты судейства в баллах, оценки за экзамен и т. п.).

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	12	14	15	15	15	16	18	19	19	22
R	1	2	4	4	4	6	7	8,5	8,5	10

Сравнение двух независимых выборок
критерий U-Манна-Уитни

- Считается, что критерий *U*-Манна-Уитни самый простой ранговый критерий (в отечественной литературе этот критерий иногда называют также критерий Вилкоксона для независимых выборок или критерием Уайта).
- Применение критерия *U*-Манна-Уитни основано на единственном предположении: выборки получены из однотипных непрерывных распределений. При этом вид распределения генеральных совокупностей *X* и *Y* никак не оговаривается. Допущение о непрерывности распределений может быть принято, когда исследуемый признак имеет большое число возможных градаций. Гипотеза *Ho: F(x) = F(y)* – это утверждение о том, что функции распределения обеих генеральных совокупностей одинаковы. Иначе говоря, обе выборки получены из одной и той же генеральной совокупности и эффект обработки отсутствует.
- Поясним это более подробно. Поскольку функции распределения *F(x)* и *F(y)* равны, то, следовательно, равны и характеристики положения этих распределений (среднее значение и медиана). Поэтому, если эффект оценивается по различию средних арифметических двух выборок, то нулевую гипотезу можно было бы записать в виде *Ho:* $\mu_x = \mu_y$. В этом случае критерий *U*-Манна-Уитни является непараметрическим аналогом *t*-критерия для независимых выборок.
- Ниже рассматривается применение критерия *U*-Манна-Уитни на конкретном примере.

Пример применения критерия U-Манна-Уитни

- Результаты психологического теста «самооценка ситуативной тревожности» Спилбергера-Ханина:

КГ	x_i	**12,6**	**12,3**	**11,8**	**12,1**	**12,8**	**13,2**	**13,8**	**12,8**	**12,6**	**13,0**
ЭГ	y_i	11,3	12,8	12,2	11,7	12,4	13,3	11,4	12,0	11,8	12,5

№	x_i y_i	R_i
1	11,3	1
2	11,4	2
3	11,7	3
4	11,8	4,5
5	**11,8**	**4,5**
6	12,0	6,5
7	**12,0**	**6,5**
8	**12,1**	**8**
9	12,2	9
10	**12,3**	**10**
11	12,4	11
12	12,5	12
13	**12,6**	**13,5**
14	**12,6**	**13,5**
15	12,8	15,5
16	**12,8**	**15,5**
17	**13,0**	**17**
18	13,2	18
19	**13,3**	**19**
20	**13,8**	**20**

- Объем выборки контрольной группы $n_x = 10$ и экспериментальной $n_y = 10$.
- Проверим гипотезу $H_o: Me_x = Me_y$ против двусторонней альтернативы $H1: Me_x=Me_y$. Уровень значимости $p = 0,05$.
- *Порядок применения* критерия *U*-Манна-Уитни:
- Объединяем обе выборки в одну. Объем объединенной выборки будет $n = n_x + n_y = 20$.
- Ранжируем объединенную выборку, располагая данные в порядке возрастания. При этом отмечаем полужирным шрифтом данные, относящиеся к одной из выборок (все равно какой), например, КГ.
- Находим ранги R_i объединенной выборки. Отмечаем ранги, относящиеся, например, к КГ.
- Суммируем по отдельности ранги, относящиеся к первой и второй выборкам, т. е. находим суммы рангов:
- $R_X = \Sigma R_{Xi} =$ **127,5**; $R_Y = \Sigma R_{Yi} =$ **82,5**.
- $R_X + R_Y = 127,5 + 82,5 =$ **210**.
- Для проверки правильности этих операций можно использовать тот факт, что сумма всех рангов: $R_X + R_Y = n(n + 1)/2 = 20(20+1)/2 =$ **210.**
- **Меньшую** из сумм рангов (в данном случае R_Y = **82,5**) **принимаем в качестве значения критерия *U*-Манна-Уитни**.
- Из таблицы «Критические значения *U*-Манна-Уитни для независимых выборок» находим критическое значение критерия *U*-Манна-Уитни при уровне значимости $p = 0,05$ и при объемах выборки $n_1 = 10$ и $n_2 = 10$: U_p = **78**.
- Вывод: если $U \le U_p$ различие считается статистически значимым на уровне значимости *p* (нулевая гипотеза отбрасывается). В противном случае различие статистически незначимо, как в данном случае: **82,5 ≥ 78**.

n_1 / n_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	11	17									
6	7	12	18	26								
7	7	13	20	27	36							
8	8	14	21	29	38	49						
9	8	15	22	31	40	51	63					
10	9	15	23	32	42	53	65	78				
11	9	16	24	34	44	55	68	81	96			
12	10	17	26	35	46	58	71	85	100	115		
13	10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	137	
14	11	19	28	38	50	63	76	91	106	123	141	160
15	11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	145	164
16	12	21	31	42	54	67	82	97	114	131	150	169

p = 0,05

Сравнение двух связанных выборок критерий W-Вилкоксона

№ п/п	x_i мл.	y_i мл.	$d_i = x_i - y_i$	R_1	Ранги $\lvert d_i \rvert$
1	3 400	3 800	–400	100	2,5 (+)
2	3 600	3 700	–100	–100	2,5 (–)
3	3 000	3 300	–300	–100	2,5 (–)
4	3 500	3 600	–100	–100	2,5 (–)
5	2 900	3 100	–200	–200	5,5 (–)
6	3 100	3 200	–100	–200	5,5 (–)
7	3 200	3 200	0	–300	7,5 (–)
8	3 400	3 300	100	–300	7,5 (–)
9	3 200	3 500	–300	–400	9 (–)
10	3 400	3 600	–200		

- Критерий W-Вилкоксона для связанных выборок является непараметрическим аналогом t-критерия.
- ПРИМЕР: У группы школьников (n=10) до (x_i) и после (y_i) пребывания в спортивном лагере измеряли жизненную емкость легких (ЖЕЛ)
- Отбрасываем пары с одинаковыми значениями x_i и y_i; для дальнейших расчетов объем выборки сокращаем на число отброшенных пар.
- В нашем примере отбрасывается пара номер 7, и объем выборки станет n = 10 – 1 = 9.
- У оставшихся пар вычисляем разности $d_i = x_i - y_i$.
- Находим ранги $R\ |d_i|$ абсолютных значений разностей d_i.
- Отмечаем ранги, относящиеся к положительным и отрицательным значениям разностей.
- Находим по отдельности суммы рангов отрицательных, и положительных разностей R (–) и R (+). Суммы рангов: R (+) = 2,5; R (–) = 42,5.
- Контроль: R (+) + R (–) = 2,5 + 42,5 = 9(9 + 1)/2 = 45.
- Меньшую из сумм рангов принимаем в качестве значения критерия W. Для нашего примера $W = R$ (+) = **2,5**.
- Из П 3.7. находим критическое значение W_p критерия W-Вилкоксона при уровне значимости p =0,05 и n =9, W =7.
- В таблице «Критические значения W-критерия Вилкоксона для сопряженных пар» приведены критические значения двустороннего критерия W-Вилкоксона. Если используется односторонний критерий, то значения этой таблицы соответствуют удвоенным уровням значимости:
  W_p *двух* = W_p / 2*одн.*

n	p 0,05	p 0,01
6	1	
7	3	
8	5	1
9	7	3
10	9	4
11	12	6
12	15	8
13	18	11
14	22	14
15	26	17
16	31	21
17	36	24
18	41	29
19	47	33
20	53	39
21	60	44
22	67	50
23	74	56
24	82	62
25	90	69

- Вывод: если $W < W_p$, то H_0 отбрасывается и различие связанных выборок является статистически значимым на уровне значимости p. В противном случае различия статистически незначимы.
- Для нашего примера $W < W_{0,05}$, поэтому различия статистически значимы на уровне значимости $p \leq 0,05$.

Самостоятельная работа студента (18 часов)

- По учебному пособию **Воронов И.А. Эксперимент и методы обработки многомерных данных с применением SPSS: медико-биологические исследования, психология, физическая культура и спорт. СПб.: СПбГУТ им. Проф. М. А. Бонч-Бруевича, 2008.** (пособие в формате *.pdf свободно распространяется автором в интернете) ознакомиться с материалом, изложенным на **страницах: 39 – 41**, выполнить самостоятельно все предлагаемые **задачи: 2.25 и 2.26.**

- Примечание: похожий материал можно найти во многих иных учебниках по математической статистике для психологов. Рекомендуем обратиться к изданиям **Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования: анализ и интерпретация данных. СПб, 2004.** и **Наследов А.Д. SPSS15: профессиональный статистический анализ данных. СПб, 2008.**