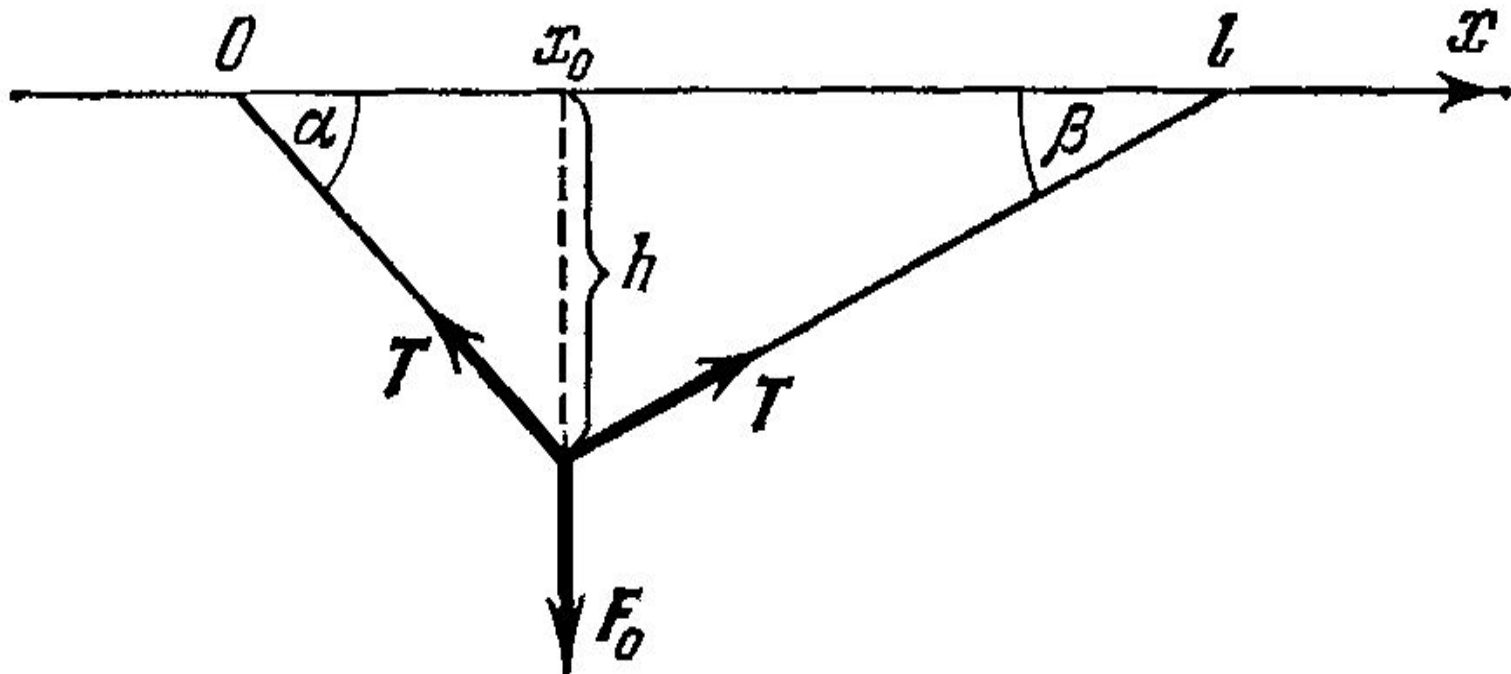


# **Математические методы моделирования и прогнозирования**

Расчетные задания  
к лабораторным работам

# 1. Собственные колебания струны.

**Задание:** Найти колебания струны с жестко закрепленными концами при  $x = 0$  и  $x = l$ . Начальные отклонения изображены на рисунке. Начальные скорости равны нулю.



# 1. Собственные колебания струны.

Решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

для струны с закрепленными концами:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = \frac{hx}{x_0}, \quad 0 \leq x \leq x_0;$$

$$u(x, 0) = \frac{h(l-x)}{l-x_0}, \quad x_0 \leq x \leq l;$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

# 1. Собственные колебания струны.

имеет вид сходящегося ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \left( \frac{k\pi a t}{l} \right) + b_k \sin \left( \frac{k\pi a t}{l} \right) \right) \sin \left( \frac{k\pi x}{l} \right).$$

Коэффициенты разложения определяются начальными условиями

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \sin \left( \frac{k\pi x}{l} \right) dx = 0,$$

Т.к.

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

# 1. Собственные колебания струны.

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, 0) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx =$$

$$\frac{2}{l} \int_0^{x_0} \frac{hx}{x_0} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx + \frac{2}{l} \int_{x_0}^l \frac{h(l-x)}{l-x_0} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx =$$

$$\frac{2hl^2}{\pi^2 x_0 (l-x_0) k^2} \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right).$$

# 1. Собственные колебания струны.

## струны.

Окончательное решение можно представить в виде:

$$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 x_0(l - x_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi at}{l}\right).$$

Построим график этой функции.

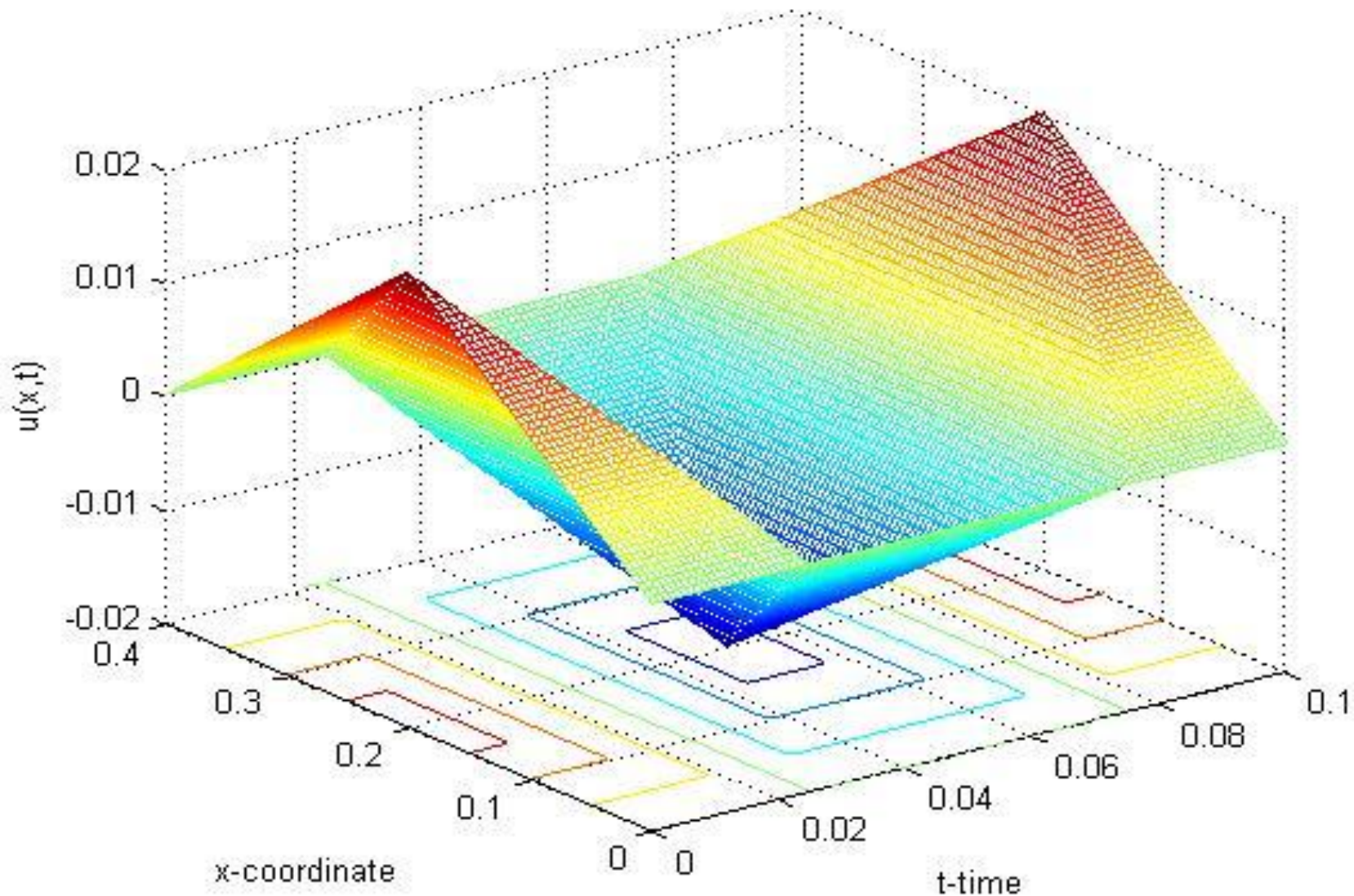
Вычисления выполним в системе MATLAB:

# 1. Собственные колебания струны.

```
a=8;h=0.02;xm=0.4;x0=0.2;dx=0.004;tm=0.1;dt=0.001;
au=2*h*(xm/pi)^2/x0/(xm-x0);b0=pi*x0/xm;b1=pi/xm;b2=b1*a;
x=0:dx:xm;
t=0:dt:tm;
[t,x]=meshgrid(t,x);
u=au*sin(b0)*sin(b1*x).*cos(b2*t);k=1;
while k<100
k=k+1;
u=u+au/k^2*sin(b0*k)*sin(b1*k*x).*cos(b2*k*t);
end;
meshc(t,x,u);
title(['1.Solution of wave equation (a=8;h=0.2;L=0.4;Xo=0.2)']);
xlabel('t-time');
ylabel('x-coordinate');
zlabel('u(x,t)');
```

# 1. Собственные колебания струны.

1. Solution of wave equation ( $a=8; h=0.2; L=0.4; X_0=0.2$ )





## 2. Собственные колебания однородного стержня.

**Задание:** Найти продольные колебания упругого стержня со свободными концами, получившего в начальный момент времени продольный импульс  $I$  в один из концов.

**Решение** краевой задачи для стержня со свободными концами

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

имеет вид сходящегося ряда:

## 2. Собственные колебания однородного стержня.

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_k \cos \left( \frac{k\pi at}{l} \right) + b_k \sin \left( \frac{k\pi at}{l} \right) \right) \cos \left( \frac{k\pi x}{l} \right).$$

Коэффициенты разложения

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx; \quad b_0 = \frac{t}{l} \int_0^l \psi(x) dx;$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \left( \frac{k\pi x}{l} \right) dx, \quad k = 1, 2, \dots ;$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \cos \left( \frac{k\pi x}{l} \right) dx, \quad k = 1, 2, \dots ;$$

## 2. Собственные колебания однородного стержня.

определяются начальными условиями:

$$\varphi(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$\psi(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l - \delta;$$

$$\psi(x) = -\frac{I}{\rho\delta}, \quad l - \delta < x \leq l;$$

$$\delta \rightarrow 0.$$

Из определения импульса стержня единичной длины

$$p = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{имеем} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{p}{\rho}.$$

## 2. Собственные колебания однородного стержня.

В начальный момент времени  $t = 0$  импульсом  $I$  обладал участок стержня  $l - \delta < x \leq l$  длиной  $\delta \rightarrow 0$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) = -\frac{I}{\rho\delta}, \quad l - \delta < x \leq l,$$

где знак минус указывает на направление распространения импульса, противоположное направлению оси  $x$ , в начальный момент времени.

## 2. Собственные колебания однородного стержня.

Теперь, зная  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , можно вычислить коэффициенты разложения:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$b_0 = \frac{t}{l} \int_{l-\delta}^l \left(-\frac{I}{\rho\delta}\right) dx = -\frac{It}{\rho l},$$

## 2. Собственные колебания однородного стержня.

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx = \\ &= \frac{2}{k\pi a} \int_{l-\delta}^l \left(-\frac{I}{\rho\delta}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx = \\ &= -\frac{2I}{k\pi a \rho\delta} \frac{l}{k\pi} \left[ \sin\left(\frac{k\pi l}{l}\right) - \sin\left(\frac{k\pi(l-\delta)}{l}\right) \right] = \\ &= -\frac{2I}{k\pi a \rho\delta} \frac{l}{k\pi} 2 \sin\left(\frac{k\pi\delta}{2l}\right) \cos\left(\frac{k\pi(2l-\delta)}{2l}\right) \end{aligned}$$

для всех  $k = 1, 2, \dots$ .

## 2. Собственные колебания однородного стержня.

Нас же интересует предел этого выражения при  $\delta \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ -\frac{2I}{k\pi a \rho \delta} \frac{l}{k\pi} 2 \sin\left(\frac{k\pi\delta}{2l}\right) \cos\left(\frac{k\pi(2l-\delta)}{2l}\right) \right] = -\frac{2I(-1)^k}{k\pi a \rho}.$$

Окончательное решение можно представить в виде:

$$u(x, t) = -\frac{It}{\rho l} - \frac{2I}{\pi a \rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi a t}{l}\right).$$

## 2. Собственные колебания однородного стержня.

Полученное решение указывает на то, что стержень, получивший продольный импульс  $I$ , будет испытывать как колебательные движения, так и поступательное движение со скоростью, равной

$$\frac{I}{\rho l}$$

в направлении, совпадающим с направлением импульса.

Построим график полученной функции  $u(x, t)$ .

Вычисления выполним в системе MATLAB:



## 2. Собственные колебания однородного стержня.

```
a=5930;p=7800;l=0.5;xm=0.02;dx=0.0002;tm=0.00001;dt=0.0000001;
x=0:dx:xm;
t=0:dt:tm;
[t,x]=meshgrid(t,x);
u=-l*t/p/xm;z=1;
k=0;while k<1000
k=k+1;z=-z;
u=u-2*l/pi/a/p*z/k*sin(pi/xm*a*k*t).*cos(pi/xm*k*x);
end;
figure
surf(t,x,u);
title(['2.Solution of wave equation (a=5930;p=7800;l=0.5)']);
xlabel('t-time');
ylabel('x-coordinate');
zlabel('u(x,t)');
```

# 2. Собственные колебания однородного стержня.

2. Solution of wave equation ( $a=5930$ ;  $p=7800$ ;  $l=0.5$ )

