Математика

Матрицы.

Виды матриц.

- **Матрицей** называется упорядоченная таблица чисел, состоящая **из m строк и n столбцов.**
- Число строк и столбцов (m n) называется **размером** матрицы.
- a_{ij} называется **элементом** матрицы, где i-номер строки, j-номер столбца матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Матрицы. Виды матриц.

Пример¶

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ размер матрицы 2×2, $a_{11}=1$, $a_{21}=3$.¶

б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 10 \\ 8 & 11 & 13 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ размер матрицы 4×3, $a_{33}=13$, $a_{41}=4$, $a_{12}=0$.¶

Матрицы. Виды матриц.

Матрица называется **квадратной**, если в ней число строк равно числу столбцов.

Если в матрице число строк не равно числу столбцов, то такая матрица называется **прямоугольной.**

Пример

$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 11 & -5 \end{pmatrix}$-квадратная матрица; $B=\begin{pmatrix} 1 & -34 \\ 13 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$-прямоугольная матрица.

Матрицы. Виды матриц.

- Матрица, элементы которой составляют строку, называется **матрица строка.**
- Матрица, элементы которой составляют столбец, называется **матрица столбец.**

Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ - матрица строка; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 99 \end{pmatrix}$ - матрица столбец.

Матрицы. Виды матриц.

- **Главная диагональ квадратной матрицы**- это диагональ, которая начинается с элемента a_{11}.
- Квадратная матрица, у которой на главной диагонали единицы, а все остальные элементы равны нулю, называется **единичной матрицей.**
- Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется **нулевой матрицей**.

Пример

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\text{ - единичная матрица; } O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\text{ - нулевая матрица.}$$

Матрицы. Виды матриц.

- Матрица, в которой строки и столбцы заменены местами, называется **транспонированной** матрицей **$A^т$.**

Пример

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, тогда $A^т = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Действия над матрицами

- **1. Равенство матриц.**
- Две матрицы называются **равными**, если они одного размера и равны их соответствующие элементы.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} \\ в_{21} & в_{22} \end{pmatrix}$, тогда $A=B$, если $a_{ij}=в_{ij}$.

Действия над матрицами

- **2. Сложение матриц.**
- При сложении матриц (одного размера) складываются их соответствующие элементы.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} \\ в_{21} & в_{22} \end{pmatrix}$. $A+B=C$, $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, где $c_{ij}=a_{ij}+в_{ij}$. **[1.1]**

Пример

$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число.

- При умножение матрицы на число, каждый элемент матрицы умножается на это число.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$, λ=conct, то $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$ **[1.2]**.

Пример

$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\lambda=3$, $\lambda A=\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$

Умножение матриц.

- **1) Квадратные матрицы** (одного размера)

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} \\ в_{21} & в_{22} \end{pmatrix}$, $AB=C$ $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, где $c_{11}=a_{11}в_{11}+a_{12}в_{21}$; $c_{12}=a_{11}в_{12}+a_{12}в_{22}$; $c_{21}=a_{21}в_{11}+a_{22}в_{21}$; $c_{22}=a_{21}в_{12}+a_{22}в_{22}$ **[1.3]**.

Пример

а) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}$.

Умножение матриц.

- **2) Прямоугольные матрицы.**
- **Прямоугольные матрицы** можно **перемножать** тогда, когда **число столбцов** первой матрицы равно **числу строк** второй матрицы. В результате получится новая матрица, в которой столько строк, сколько строк в первой и столько столбцов, сколько столбцов во второй.

Умножение матриц.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{1-я строка матрицы } A \text{ прикладывается} \\ \text{к первому столбцу матрицы } B, \\ \text{соответствующие элементы перемножаются,} \\ \text{а произведения складываются} \end{array} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7} & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8 \\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A ($3 \neq 2$).

Умножение матриц.

Пример

а) $\begin{pmatrix}1 & 1\ 0 \\ 3 & -15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 7 \\ 3 4 \\ 1 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 11 \\ 2 & 17\end{pmatrix}$, 3 столбца=3 строкам, (2×2)-новая матрица;

б) $\begin{pmatrix}0 7 \\ 3 4 \\ 1 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\ 0 \\ 3 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & -7 & 35 \\ 15 & -1 & 20 \\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 2 столбца=2 строкам, (3×3)-новая матрица;

в) $\begin{pmatrix}1 & 5 & 7 \\ 8 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 15 & 6\end{pmatrix}$, 3 столбца$\neq$1 строке- перемножать матрицы нельзя.