

Математика.
Лекция 10.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ.

Определение производной.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x .

Пусть аргумент x получил приращение Δx , тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \rightarrow 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

если этот предел существует.

Обозначения производной: $f'(x), y', y'_x, \frac{dy}{dx}$.

Если производная существует во всех точках некоторого промежутка (a, b) , то её можно рассматривать как новую функцию $f'(x)$. Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет в некоторой точке x_0 производную, то она в этой точке непрерывна.

Обратная теорема неверна: непрерывная функция может не иметь производной. В качестве примера рассмотрим функцию

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Эта функция непрерывная. Докажем, что она не имеет производной в точке $x=0$. Действительно, в точке $x=0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т.е. функция $y=|x|$ не имеет производной в точке $x=0$.

Таблица производных

Запишем формулы производных основных элементарных функций.

1. $C' = 0$.

2. $(x^a)' = ax^{a-1}$; в частности $x' = 1$,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$.

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

5. $(\sin x)' = \cos x$.

6. $(\cos x)' = -\sin x$.

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1$.

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1$.

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Вывод некоторых табличных производных.

а) Пусть $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Тогда приращение функции $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$.

Используя определение, найдем производную

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a$$

(т.к. $a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \ln a$ при $\Delta x \rightarrow 0$ по таблице эквивалентных бесконечно малых).

Вывод некоторых табличных производных.

б) Пусть $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Тогда для любого $x > 0$ приращение функции

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Используя определение, вычислим производную:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot x \cdot \ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

(т.к. $\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \sim \frac{\Delta x}{x \ln a}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ по таблице эквивалентных бесконечно малых).

Вывод некоторых табличных производных.

в) Пусть $y = \sin x$.

Тогда $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

По определению найдем производную

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x,$$

(т.к. $\sin \frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ по таблице эквивалентных бесконечно малых).

Производная суммы, произведения и частного функций.

Теорема. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x_0 , то в этой точке имеют производные их сумма, разность, произведение и частное (при условии, что частное имеет знаменатель $v(x_0) \neq 0$), причем справедливы следующие формулы:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример . Найти производную функции

$$y = (5 \operatorname{arctg} x + 3^x)(\log_2 x - \cos x).$$

Решение. По формуле производной произведения получим:

$$\begin{aligned} y' &= (5 \operatorname{arctg} x + 3^x)'(\log_2 x - \cos x) + (5 \operatorname{arctg} x + 3^x)(\log_2 x - \cos x)' = \\ &= \left(\frac{5}{1+x^2} + 3^x \ln 3 \right) (\log_2 x - \cos x) + (5 \operatorname{arctg} x + 3^x) \left(\frac{1}{x \ln 2} + \sin x \right). \end{aligned}$$

Пример . Найти производную функции $y = \frac{x^2 + x - 1}{10^x}$.

Решение.

По формуле производной частного получим:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2 + x - 1}{10^x} \right)' = \frac{(x^2 + x - 1)' \cdot 10^x - (x^2 + x - 1) \cdot (10^x)'}{(10^x)^2} = \\ &= \frac{(2x + 1) \cdot 10^x - (x^2 + x - 1) \cdot 10^x \ln 10}{10^{2x}}. \end{aligned}$$

Производная сложной функции.

Теорема. Пусть функция $u=u(x)$ имеет производную в точке x , а функция $y=f(u)$ имеет производную в соответствующей точке $u=u(x)$. Тогда сложная функция $y=f(u(x))$ имеет производную в точке x , которая находится по формуле:

$$y'_x = f'(u) \cdot u'(x).$$

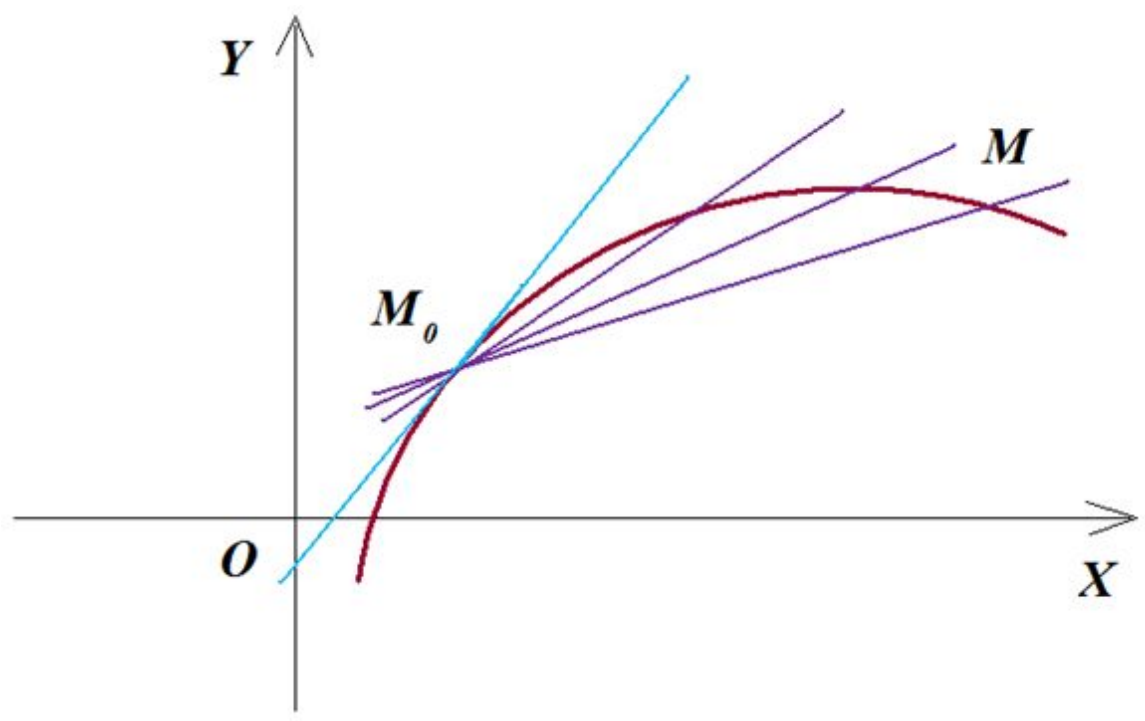
Пример . Найти производную функции $y=\ln(\arcsin x)$.

Решение. Положим: $u=\arcsin x$, тогда $y=\ln u$.

Производная сложной функции равна:

$$y' = (\ln u)' \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}.$$

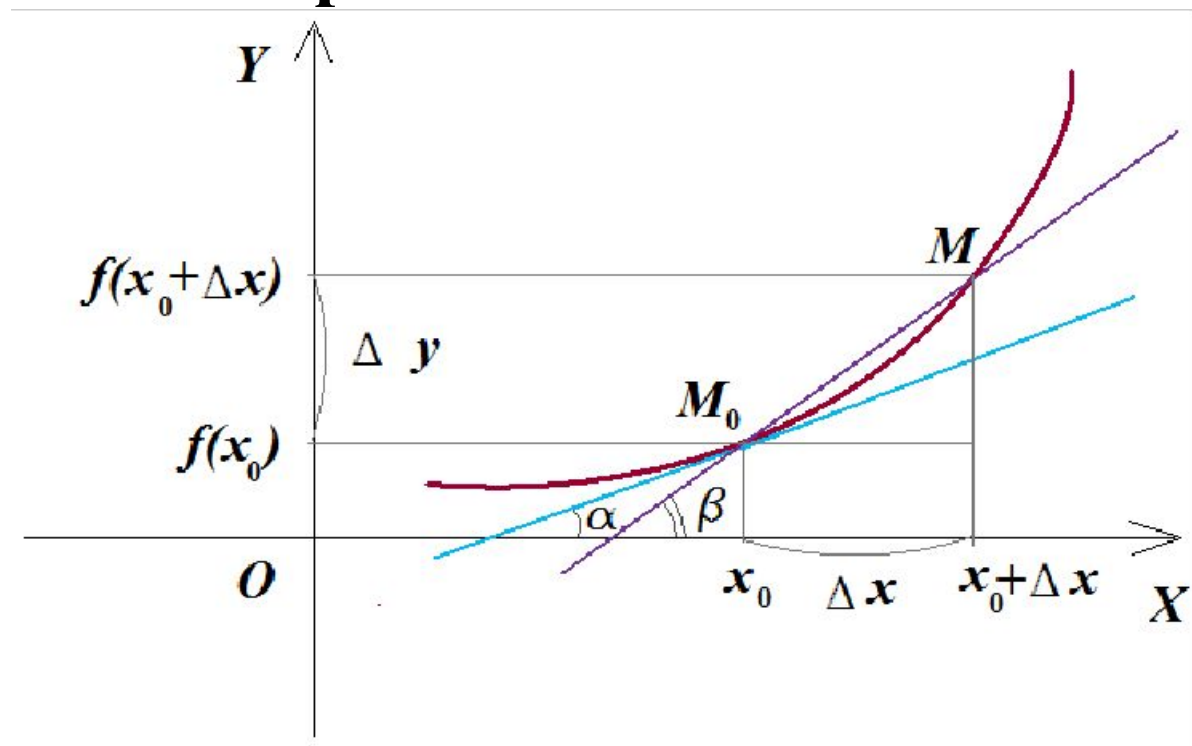
Определение касательной к кривой.



Рассмотрим на плоской кривой фиксированную точку M_0 и вторую точку M . Проведем секущую M_0M . Если точка M перемещается по кривой, а точка M_0 неподвижна, то секущая меняет своё положение.

Касательная есть прямая, занимающая предельное положение секущей.

Геометрический смысл производной.



Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$, которая имеет в точке M_0 не вертикальную касательную. Проведем через точку M_0 секущую, тогда угловой коэффициент секущей

$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

При стремлении приращения аргумента Δx к нулю, точка M перемещаясь по

графику неограниченно приближается к точке M_0 . При этом секущая приближается к касательной, то есть

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = \alpha, \text{ следовательно, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

Поэтому угловой коэффициент касательной равен производной функции в точке касания:

$$k_{\text{кас}} = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Уравнение касательной.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k :

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Так как для касательной $y_0 = f(x_0)$, $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, то уравнение касательной имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали.

Нормалью к кривой L в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной в этой точке.

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то её угловой коэффициент

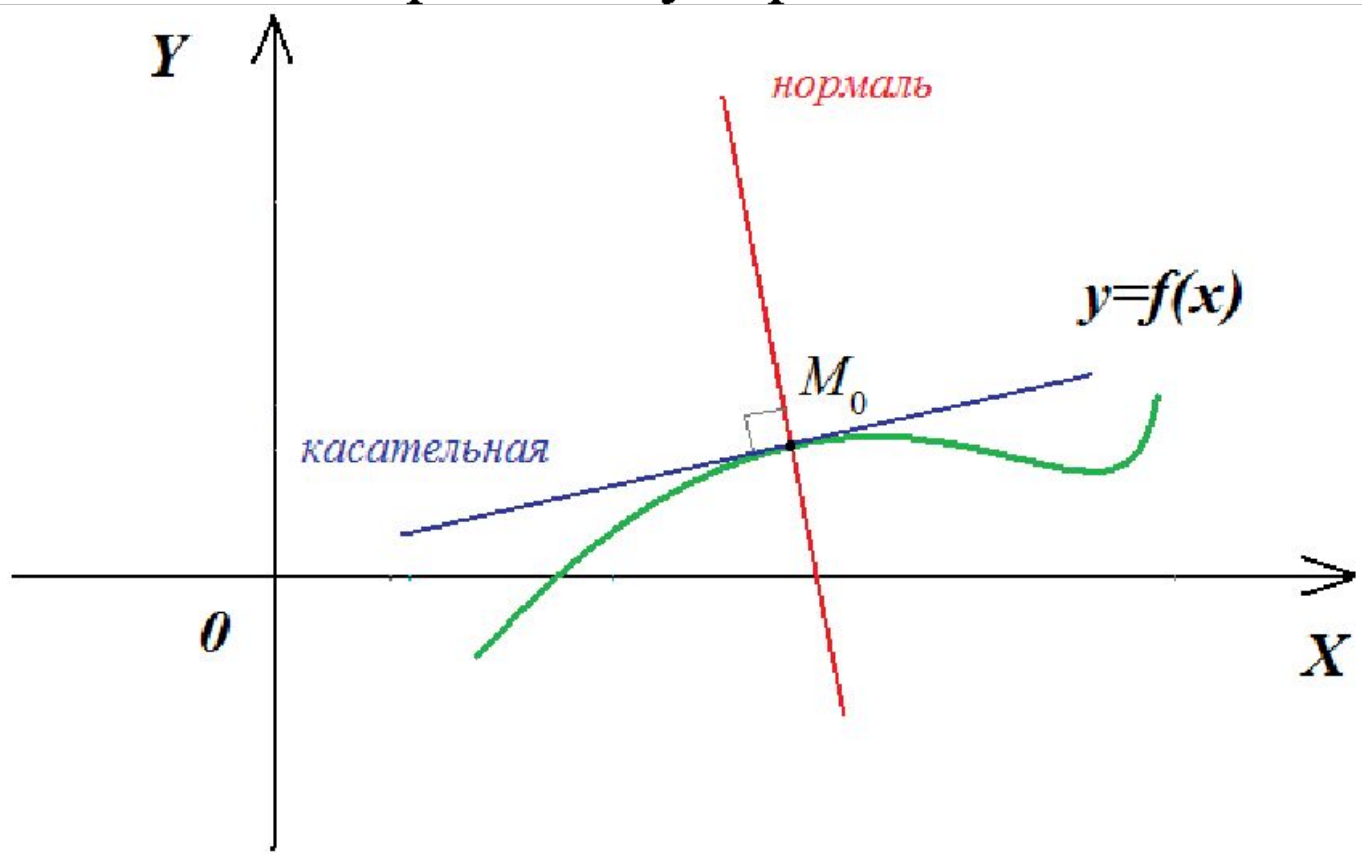
$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас.}}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \quad (\text{если } f'(x_0) \neq 0).$$

Поэтому уравнение нормали имеет вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ или}$$
$$f'(x_0)(y - f(x_0)) + (x - x_0) = 0.$$

Уравнение нормали.

Нормалью к плоской кривой называют прямую проходящую через точку касания перпендикулярно касательной.



Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

При выводе уравнения нормали использован тот факт, что произведение угловых коэффициентов двух взаимно перпендикулярных прямых равно минус единице.

Пример . Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x+5}$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

Решение . Найдём $y_0 = f(x_0) = \sqrt{4+5} = 3$.

Производная функции имеет вид:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}.$$

Вычислим угловой коэффициент касательной:

$$k_{кас.} = f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4+5}} = \frac{1}{6}.$$

Составим уравнение касательной по формуле

$$y - y_0 = k_{кас.} (x - x_0):$$

$$y - 3 = \frac{1}{6} (x - 4), \text{ или}$$

$$x - 6y + 14 = 0.$$

Найдём угловой коэффициент нормали:

$$k_{норм.} = -\frac{1}{k_{кас.}} = -6.$$

Запишем уравнение нормали по формуле $y - y_0 = k_{норм.}(x - x_0)$:

$$y - 3 = -6(x - 4), \text{ или}$$

$$6x + y - 27 = 0.$$

Механический смысл производной. Скорость v прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t :

$$v = S'(t).$$

Пример. Пусть $S = \frac{1}{2}gt^2$ (g – постоянное ускорение свободного падения), тогда
скорость $v(t) = S'(t) = gt$.