Математика.
Лекция 10.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ.

Определение производной.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x. Пусть аргумент x получил приращение Δx, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

если этот предел существует.

Обозначения производной: $f'(x), y', y'_x, \frac{dy}{dx}$.

Если производная существует во всех точках некоторого промежутка (a,b), то её можно рассматривать как новую функцию $f'(x)$. Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет в некоторой точке x_0 производную, то она в этой точке непрерывна.

Обратная теорема неверна: непрерывная функция может не иметь производной. В качестве примера рассмотрим функцию

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

Эта функция непрерывная. Докажем, что она не имеет производной в точке $x=0$. Действительно, в точке $x=0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{ если } \Delta x > 0, \\ -1, \text{ если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т.е. функция $y=|x|$ не имеет производной в точке $x=0$.

Таблица производных

Запишем формулы производных основных элементарных функций.

1. $C' = 0.$

2. $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$; в частности $x' = 1,$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

3. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x.$

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$

5. $(\sin x)' = \cos x.$

6. $(\cos x)' = -\sin x.$

7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1.$

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1.$

11. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$

12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Вывод некоторых табличных производных.

а) Пусть $y = a^x$, где $a>0,\ a\neq 1$.

Тогда приращение функции $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

Используя определение, найдем производную

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\cdot\Delta x\ln a}{\Delta x} = a^x\ln a$$

(т.к. $a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x\ln a$ при $\Delta x\to 0$ по таблице эквивалентных бесконечно малых).

Вывод некоторых табличных производных.

б) Пусть $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Тогда для любого $x>0$ приращение функции

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Используя определение, вычислим производную:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot x \cdot \ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

($т.к.$ $\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x \ln a}$ при $\Delta x \to 0$ по таблице эквивалентных бесконечно малых).

Вывод некоторых табличных производных.

в) Пусть y=sin x.

Тогда $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x + \frac{\Delta x}{2})$.

По определению найдем производную

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x,$$

(т.к. $\sin\frac{\Delta x}{2}\sim\frac{\Delta x}{2}$ при $\Delta x\to 0$ по таблице эквивалентных бесконечно малых).

Производная суммы, произведения и частного функций.

Теорема. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x_0, то в этой точке имеют производные их сумма, разность, произведение и частное (при условии, что частное имеет знаменатель $v(x_0)\neq 0$), причем справедливы следующие формулы:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример . Найти производную функции
$y = (5\operatorname{arctg} x + 3^x)(\log_2 x - \cos x)$.

Решение. По формуле производной произведения получим:

$$y' = (5\operatorname{arctg} x + 3^x)'(\log_2 x - \cos x) + (5\operatorname{arctg} x + 3^x)(\log_2 x - \cos x)' =$$
$$= \left(\frac{5}{1+x^2} + 3^x \ln 3\right)\left(\log_2 x - \cos x\right) + (5\operatorname{arctg} x + 3^x)\left(\frac{1}{x\ln 2} + \sin x\right).$$

Пример . Найти производную функции $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{10^x}$.

Решение.
По формуле производной частного получим:

$$y' = \left(\frac{x^2 + x - 1}{10^x}\right)' = \frac{(x^2 + x - 1)' \cdot 10^x - (x^2 + x - 1) \cdot (10^x)'}{(10^x)^2} =$$

$$= \frac{(2x+1) \cdot 10^x - (x^2 + x - 1) \cdot 10^x \ln 10}{10^{2x}}.$$

Производная сложной функции.

Теорема. Пусть функция $u=u(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y=f(u)$ имеет производную в соответствующей точке $u=u(x)$. Тогда сложная функция $y=f(u(x))$ имеет производную в точке x, которая находится по формуле:

$$y_x' = f'(u)\cdot u'(x).$$

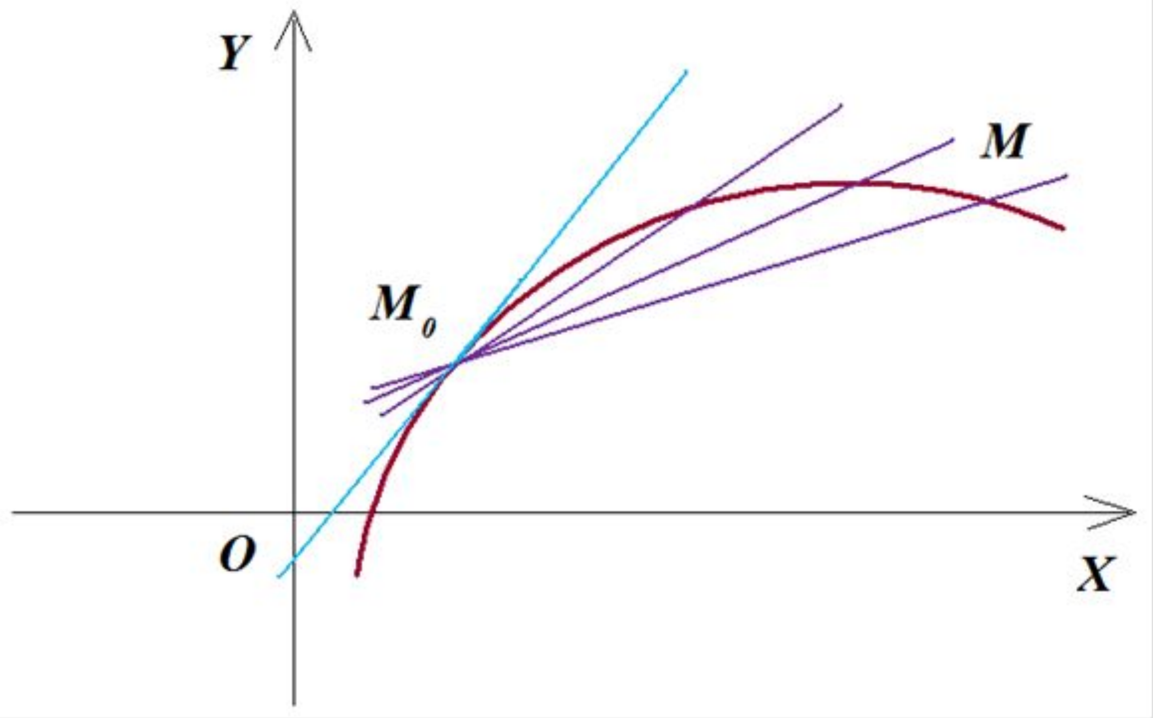
Пример . Найти производную функции $y=ln(arcsinx)$.

Решение. Положим: $u=arcsin\,x$, тогда $y=ln\,u$.

Производная сложной функции равна:

$$y' = (\ln u)'\cdot u' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}.$$

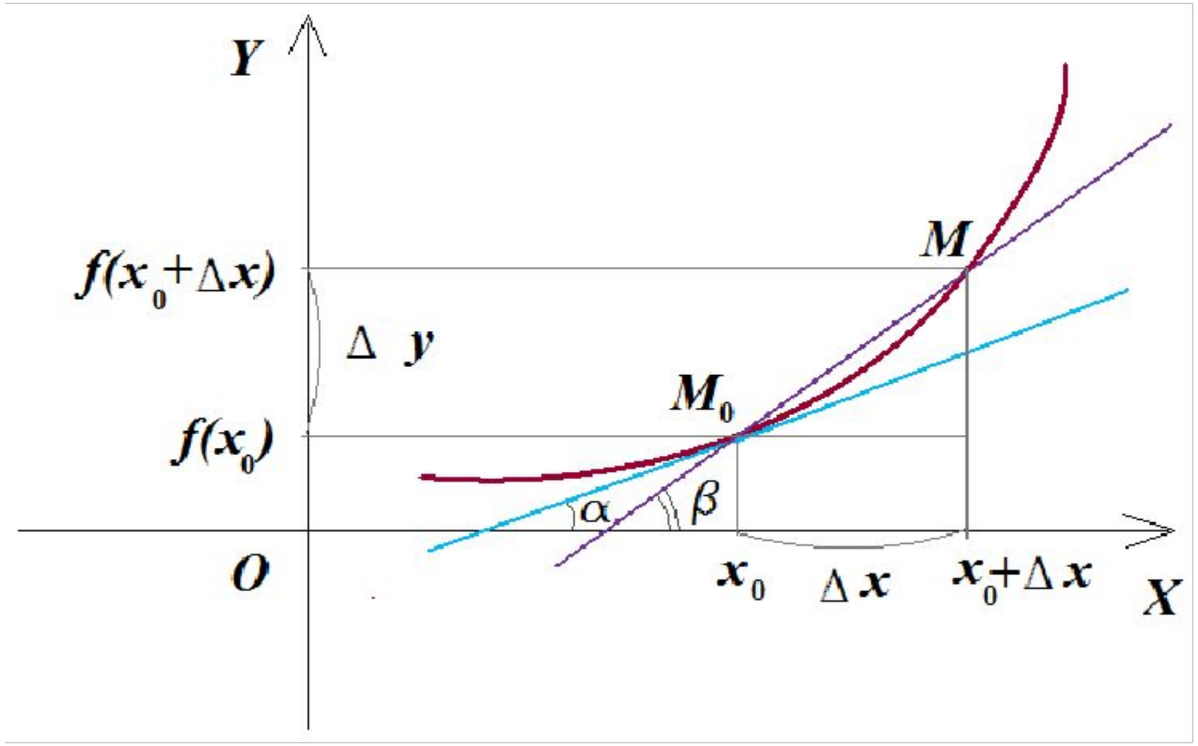
Определение касательной к кривой.



Рассмотрим на плоской кривой фиксированную точку M_0 и вторую точку M. Проведем секущую M_0M. Если точка M перемещается по кривой, а точка M_0 неподвижна, то секущая меняет своё положение.

Касательная есть прямая, занимающая предельное положение секущей.

Геометрический смысл производной.



Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$, которая имеет в точке M_0 невертикальную касательную. Проведем через точку M_0 секущую, тогда угловой коэффициент секущей

$$k_{сек} = tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

При стремлении приращения аргумента Δx к нулю, точка M перемещаясь по графику неограниченно приближается к точке M_0. При этом секущая приближается к касательной, то есть

$\lim_{\Delta x \to 0} \beta = \alpha$, следовательно, $\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha$.

Поэтому угловой коэффициент касательной равен производной функции в точке касания:

$$k_{кас} = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Уравнение касательной.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Так как для касательной $y_0=f(x_0)$, $k = tg\alpha = f'(x_0)$, то уравнение касательной имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали.

Нормалью к кривой L в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной в этой точке.

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то её угловой коэффициент

$$k_{норм.} = -\frac{1}{k_{кас.}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \text{ (если } f'(x_0) \neq 0).$$

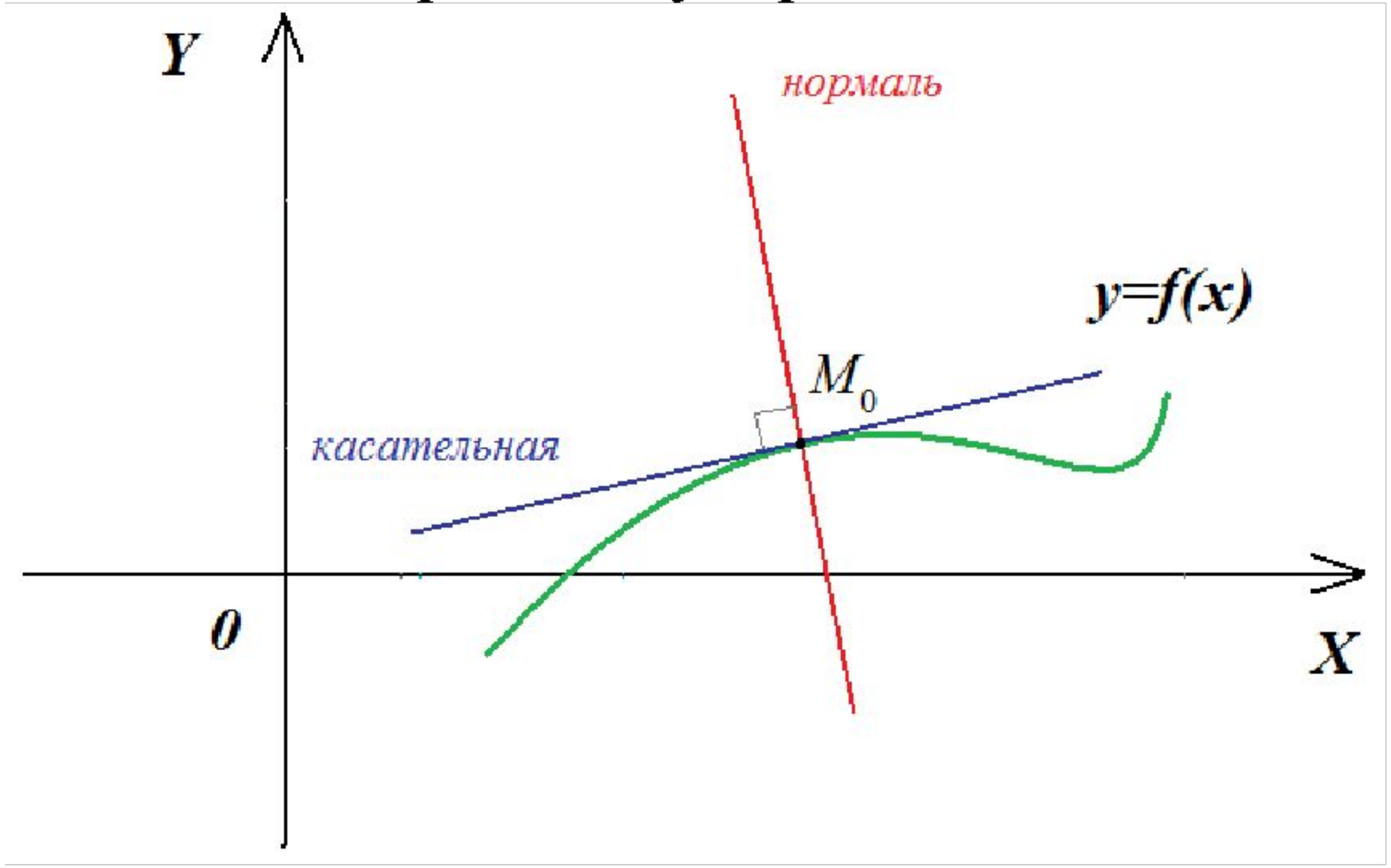
Поэтому уравнение нормали имеет вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ или}$$

$$f'(x_0)(y - f(x_0)) + (x - x_0) = 0.$$

Уравнение нормали.

Нормалью к плоской кривой называют прямую проходящую через точку касания перпендикулярно касательной.



Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

При выводе уравнения нормали использован тот факт, что произведение угловых коэффициентов двух взаимно перпендикулярных прямых равно минус единице.

Пример . Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x+5}$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

Решение .Найдём $y_0 = f(x_0) = \sqrt{4+5} = 3$.

Производная функции имеет вид:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}.$$

Вычислим угловой коэффициент касательной:

$$k_{кас.} = f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4+5}} = \frac{1}{6}.$$

Составим уравнение касательной по формуле

$$y - y_0 = k_{кас.}(x - x_0):$$

$$y - 3 = \frac{1}{6}(x - 4), \text{ или}$$

$$x - 6y + 14 = 0.$$

Найдём угловой коэффициент нормали:

$$k_{норм.} = -\frac{1}{k_{кас.}} = -6.$$

Запишем уравнение нормали по формуле $y - y_0 = k_{норм.}(x - x_0)$:

$$y - 3 = -6(x - 4), \text{ или}$$

$$6x + y - 27 = 0.$$

Механический смысл производной. Скорость v прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t:

$$v = S'(t).$$

Пример. Пусть $S = \frac{1}{2}gt^2$ (g – постоянное ускорение свободного падения), тогда скорость $v(t) = S'(t) = gt$.