Математика.
Лекция 12.

Теоремы дифференциального исчисления.

Теорема Ферма.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и в некоторой точке c, лежащей между точками a и b, $(a < c < b)$, принимает свое наибольшее или наименьшее значение. Если в точке c существует производная, то она равна нулю:

$$\boldsymbol{f'(c)=0}.$$

Доказательство. Пусть для определенности в точке c функция $f(x)$ принимает наибольшее значение, т.е. $f(x) \le f(c)$ для всех $a \le x \le b$. Тогда приращение функции $\Delta y = f(c+\Delta x) - f(c) \le 0$. Отсюда следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$ при $\Delta x > 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$ при $\Delta x < 0$. По определению производной $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$ при $\Delta x > 0$, $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$ при $\Delta x < 0$. Следовательно, $f'(c) = 0$.

Теорема Ферма.

Геометрический смысл теоремы.

Построим график функции $f(x)$. Пусть, например, $f(c)$ – наибольшее значение функции на отрезке $[a,b]$ и функция дифференцируема в точке c. Тогда в точке $M(c, f(c))$ существует касательная к графику функции. Пусть α – угол наклона касательной к оси OX. Воспользуемся геометрическим смыслом производной:

$$f'(c)=tg\,\alpha=0.$$

Следовательно, угол $\alpha=0$. То есть касательная к графику в точке $M(c, f(c))$ параллельна оси абсцисс.

Теорема Ролля.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в интервале (a,b) и на концах отрезка принимает равные значения $f(a)=f(b)$, то внутри отрезка найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $\boldsymbol{f'(c)=0}$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и наименьшего значения m.

Если $M=m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a,b]$ и ее производная $f'(x)=0$ в любой точке отрезка.

Если $M>m$, тогда хотя бы одно из этих значений функция принимает в некоторой точке c, $a<c<b$. Действительно, на концах отрезка значения функции равны: $f(a)=f(b)$. В таком случае, по теореме Ферма $f'(c)=0$.

Теорема Ролля.

Геометрический смысл теоремы.

При выполнении условий теоремы внутри отрезка найдется точка c, что касательная к графику функции в точке $M(c, f(c))$ параллельна оси OX. Очевидно, таких точек может быть несколько.

Теорема Лагранжа.

Если функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в интервале (a,b), то внутри отрезка найдется такая точка $c \in (a,b)$,что справедливо равенство:

$$\boldsymbol{f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x)=f(x)-\lambda x$. Подберем λ так, чтобы $F(a)=F(b)$. Получим $F(a)=f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b=F(b)$. Отсюда $\lambda b-\lambda a=f(b)-f(a)$, $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Тогда функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: она непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b) как разность функций, непрерывных на $[a,b]$ и дифференцируемых на (a,b), на концах отрезка принимает равные значения $F(a)=F(b)$. На основании теоремы Ролля найдется такая точка c, $a<c<b$, что $F'(c)=0$. Но

$F'(x)=f'(x)-\lambda\cdot 1$, поэтому $F'(c)=f'(c)-\lambda=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$.

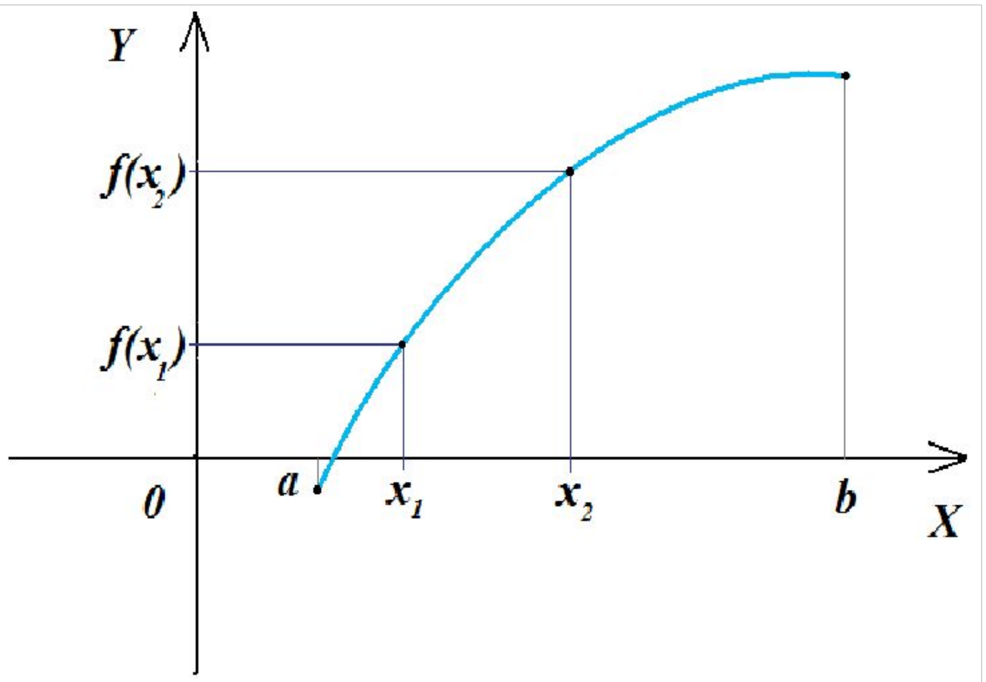
Следовательно, $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорема Лагранжа.

Геометрический смысл теоремы.

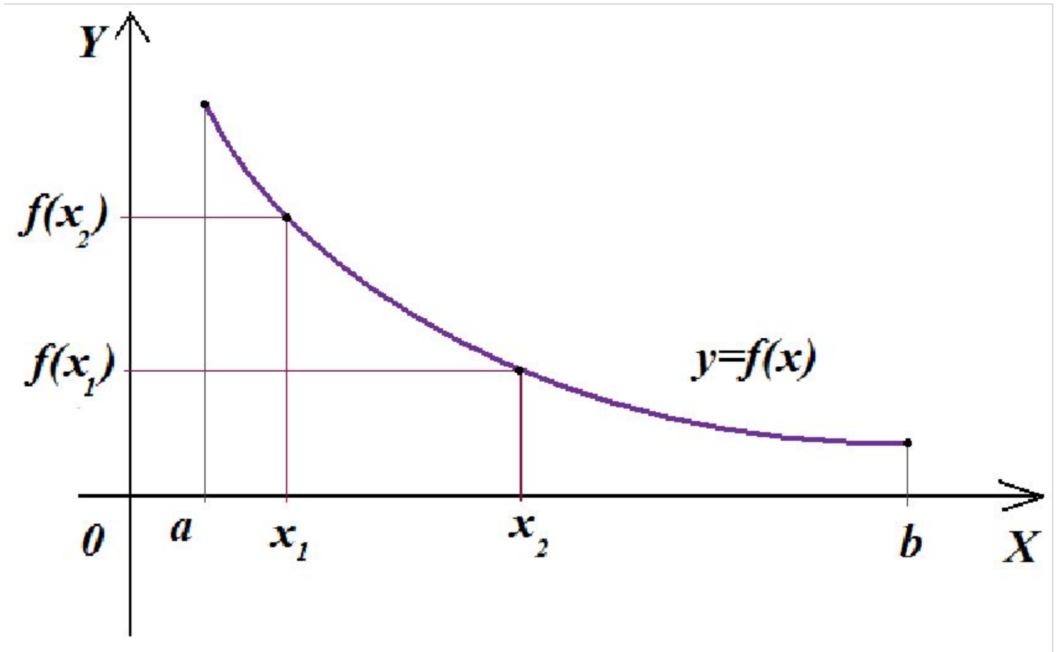
Рассмотрим график функции $y=f(x)$, определенной на отрезке $[a,b]$, и точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ графика. Построим секущую AB. Теорема Лагранжа утверждает, что на графике функции $y=f(x)$ между точками A и B найдется такая точка M, в которой касательная параллельна секущей AB.

Монотонность функции.



Функция $y = f(x)$ **монотонно возрастает** на интервале (a, b) (из области определения функции) если большему значению аргумента из (a, b) соответствует большее значении функции, т.е. для любой пары точек из этого интервала $x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) < f(x_2)$

Монотонность функции.



Функция $y = f(x)$ **монотонно убывает** на интервале (a, b) (из области определения функции) если большему значению аргумента из (a, b) соответствует меньшее значении функции, т.е. для любой пары точек из этого интервала $x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) > f(x_2)$

Монотонность функции.

Теорема (необходимое условие монотонности функции).

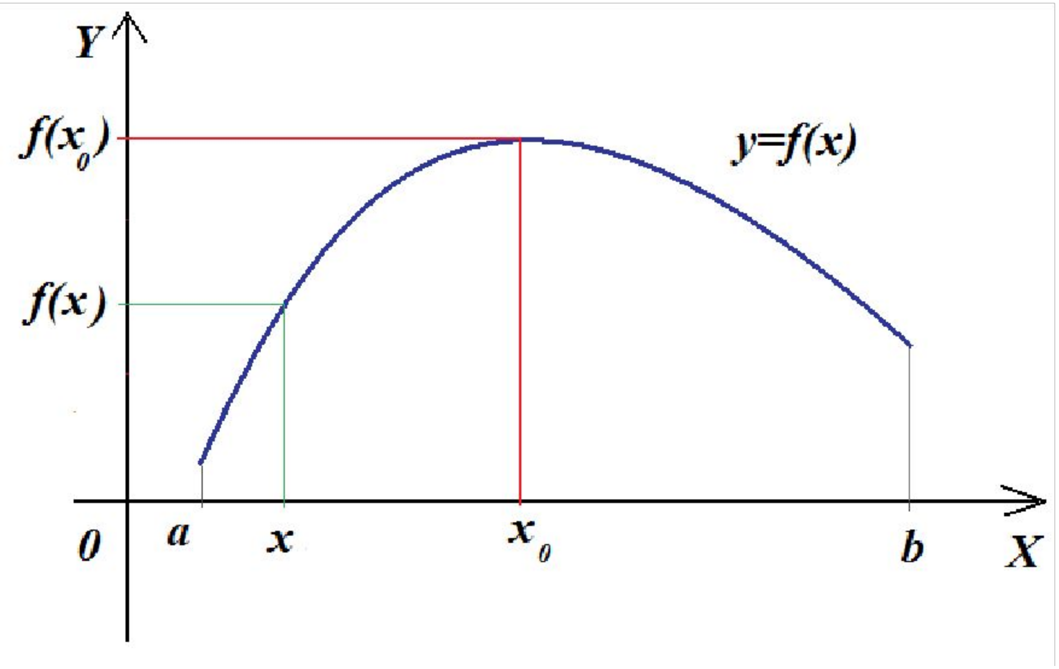
1. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема и возрастает на (a,b), то в любой точке (a,b) её производная неотрицательна.
2. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема и убывает на (a,b), то в любой точке (a,b) её производная неположительна.
3. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема и постоянна на (a,b), то в любой точке (a,b) её производная равна 0.

Монотонность функции.

Теорема (достаточное условие монотонности функции).

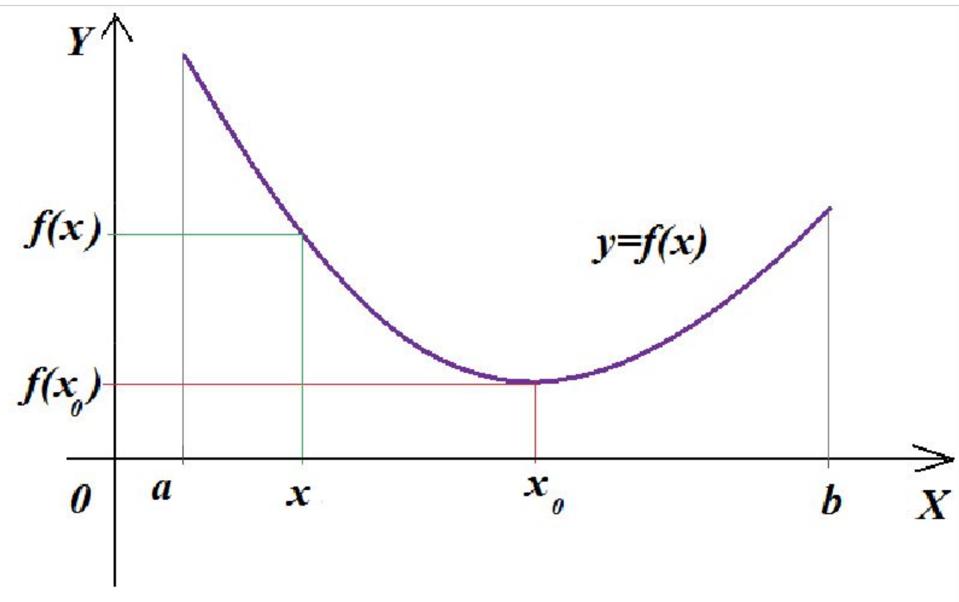
1. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема и имеет положительную производную в любой точке (a,b), то она возрастает на (a,b).
2. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема и имеет отрицательную производную в любой точке (a,b), то она убывает на (a,b).
3. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема и имеет нулевую производную в любой точке (a,b), то она постоянна на (a,b).

Точки экстремума и их нахождение.



Точка максимума функции $y = f(x)$ - точка x_0, для которой существует такая окрестность, что для всех точек $x \neq x_0$ принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$

Точки экстремума и их нахождение.



Точка минимума функции $y = f(x)$ - точка x_0, для которой существует такая окрестность, что для всех точек $x \neq x_0$ принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$

Точки экстремума и их нахождение.

- Максимум и минимум объединяют общим названием **экстремум функции**.
- Если функция имеет в точке максимум, то это не означает, что в этой точке функция имеет наибольшее значение во всей области определения. Из определения максимума следует только то, что это самое большое значение функции на некотором (иногда достаточно малом) промежутке.
- Принято различать локальный максимум и глобальный.
- **Глобальный максимум** – это наибольший из максимумов функции на рассматриваемом отрезке. Для того чтобы его отыскать, следует найти все точки локальных максимумов и вычислить в них значения функции. После этого сравнивают все вычисленные значения и выбирают из них наибольшее.
- Если на отрезке у функции один максимум, то локальный максимум совпадает с глобальным.
- **Глобальный минимум** – это наименьший из минимумов функции на рассматриваемом отрезке.

Точки экстремума и их нахождение.

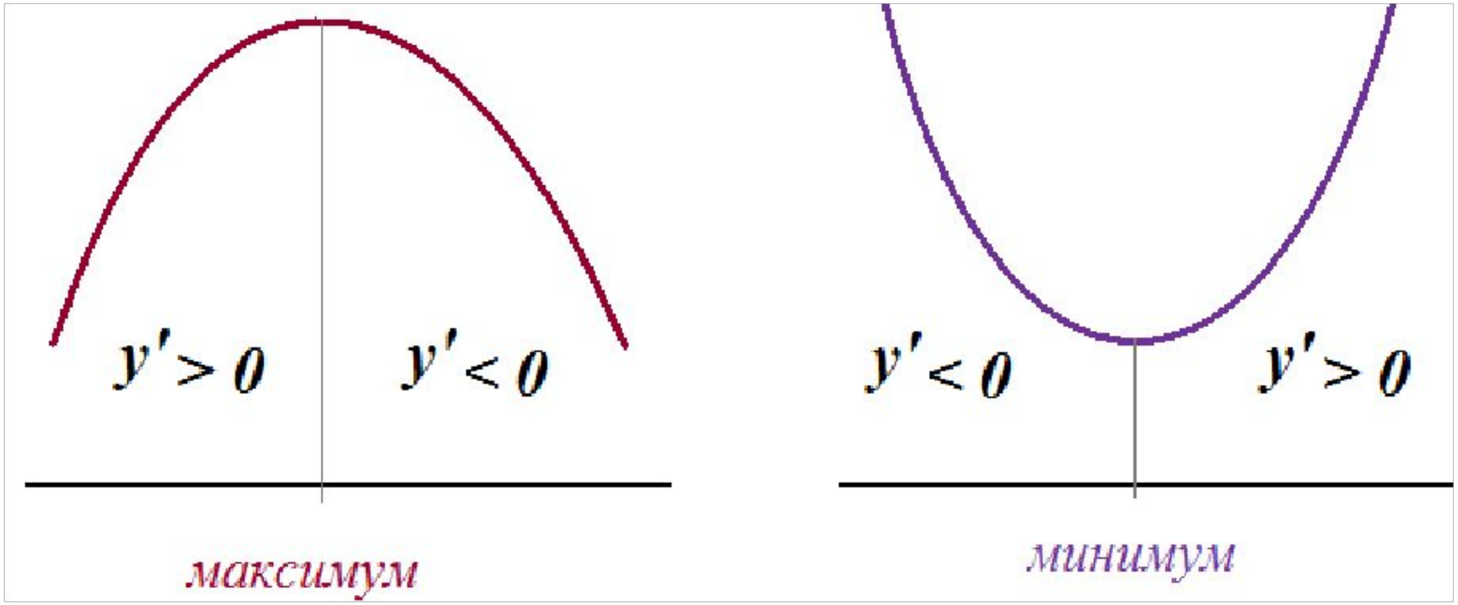
Теорема (необходимое условие существования экстремума). *Если непрерывная функция* $\boldsymbol{y = f(x)}$ *имеет в точке* x_0 *экстремум, то её производная при* $x = x_0$ *обращается в нуль* $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ *или не существует.*

Сформулированное в теореме условие является необходимым, но не является достаточным.

Значение аргумента $x = x_0$, при котором производная обращается в нуль или терпит разрыв (в частности обращается в бесконечность), называется **критическим (критической точкой 1 рода)**.

Таким образом, *экстремум функции, если он существует, может иметь место только в критических точках. Однако не во всякой критической точке функция имеет экстремум.*

Теорема (достаточное условие существования экстремума).



Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку x_0 (за исключением, может быть самой этой точки), и если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет максимум, а при перемене знака с минуса на плюс – минимум.

Если производная $f'(x)$ при переходе через критическую точку не меняет знак, то функция в этой точке не имеет ни максимума, ни минимума.

Пример 1. Найдем промежутки монотонности функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ и исследуем её на экстремум.

Вычислим производную заданной функции: $y'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.

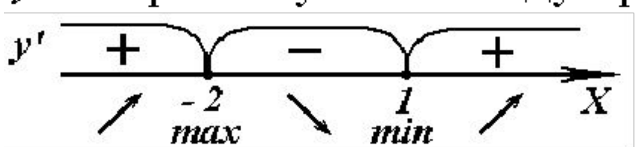
Найдем критические точки 1-го рода (подозрительные на экстремум), в которых первую производная равна 0 (или не существует).

Производная существует во всех точках области определения, поэтому найдем точки, в которых производная равна нулю $y'(x) = 0$:

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$; $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ и $x_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$. $(x-1)(x+2) = 0$

Нанесем на ось полученные критические точки и путем подстановки произвольных точек из интервалов определим знаки y' в промежутках между критическими точками.



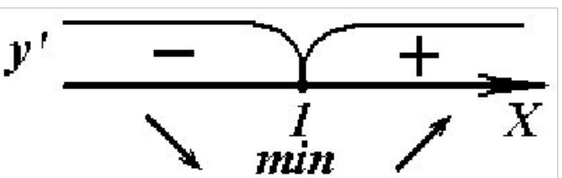
Таким образом, на интервале $(-\infty;-2)$ заданная функция возрастает, на интервале $(-2;1)$ - убывает, на интервале $(1;+\infty)$ - снова возрастает. При переходе слева направо через точку $x = -2$ производная функции меняет свой знак с «+» на «-». Т.к. эта точка принадлежит области определения, то она является точкой локального максимума. Аналогично, точка $x = 1$ является точкой локального минимума.

Пример 2. Найдем промежутки монотонности функции $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ и исследовать её на экстремум.

$$y'=(\sqrt[3]{(x-1)^2})'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Найдем критические точки 1-го рода.

Эта производная не может равняться нулю ни в какой точке. Проверим, есть ли точки, в которых производная не существует. Это точка $x=1$. Нанесем её на ось и проверим знаки производной на получившихся интервалах.



Таким образом, на $(-\infty;1)$ заданная функция убывает, на интервале $(1;+\infty)$ - возрастает. Точка $x=1$ принадлежит области определения исходной функции. Следовательно, это точка локального минимума.

Выпуклость функции.

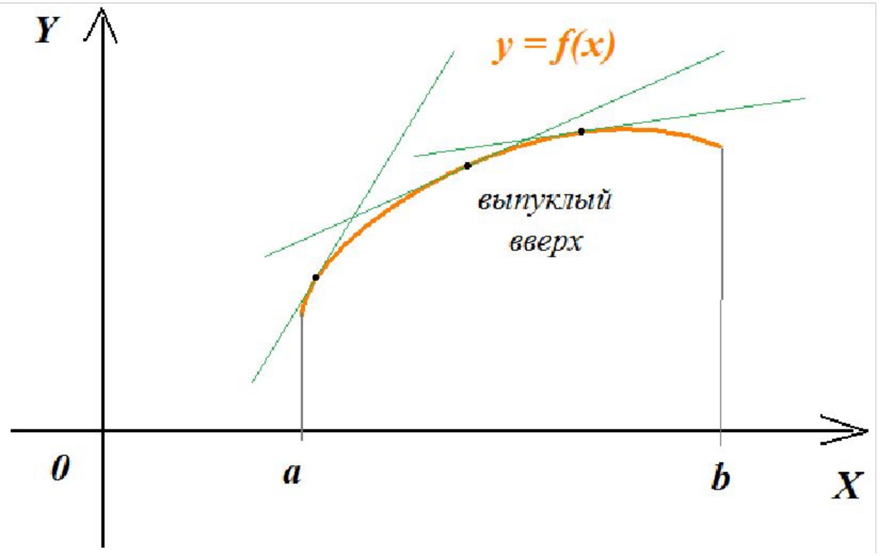


График дифференцируемой функции называется **выпуклым вверх** в интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

Выпуклость функции.

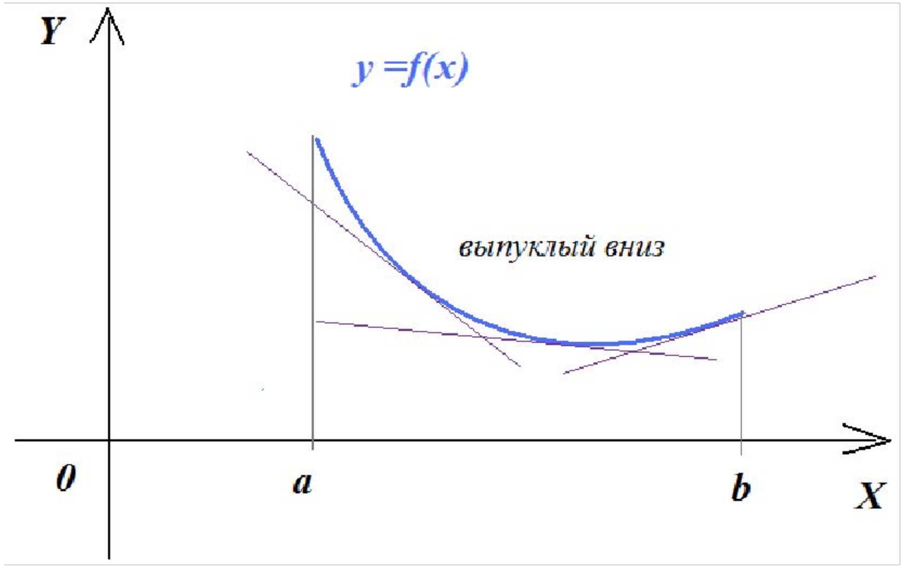


График дифференцируемой функции называется **выпуклым вниз** в интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале.

Выпуклость функции.

Теорема (достаточный признак выпуклости графика функции вверх (вниз)).
Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$. Если $f''(x) < 0$ во всех точках этого интервала, то график функции является выпуклым вверх, а если $f''(x) > 0$ во всех точках этого интервала, то график функции является выпуклым вниз.

Точки перегиба и их нахождение.

Точка графика функции, отделяющая его выпуклую вверх часть от выпуклой вниз, называется точкой **перегиба**.

Теорема (достаточный признак существования точки перегиба).

Если вторая производная $f''(x)$ непрерывной функции меняет знак при переходе через x_0, то точка с абсциссой x_0 является точкой перегиба графика функции.

Точки перегиба и их нахождение.

Теорема (необходимое условие существования точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$. Тогда, если точка с абсциссой $x_0 \in (a;b)$ является точкой перегиба графика данной функции, то $f''(x_0) = 0$.

В теореме речь идет о тех функциях, у которых вторая производная существует во всех точках рассматриваемого интервала. Однако могут встретиться случаи, когда в точке перегиба x_0 вторая производная разрывна (не существует или стремится к бесконечности)

Таким образом, *абсциссы точек перегиба графика непрерывной функции следует искать среди тех точек, в которых вторая производная равна нулю или разрывна* (не существует или стремится к бесконечности).

Такие точки называют **критическими точками второго рода.**

Пример. Найдем промежутки выпуклости вверх и вниз, а также возможные точки перегиба функции $y = x^4(12\ln x - 7)$.

Вычислим сначала первую производную заданной функции:

$$y' = (x^4(12\ln x - 7))' = 4x^3(12\ln x - 7) + x^4 \cdot \frac{12}{x} = 4x^3(12\ln x - 7) + 12x^3 =$$

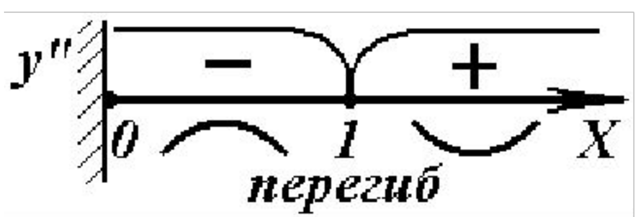
$$= 4x^3(12\ln x - 7 + 3) = 4x^3(12\ln x - 4).$$

Затем – вторую производную:

$$y'' = (4x^3(12\ln x - 4))' = 12x^2(12\ln x - 4) + 4x^3 \cdot \frac{12}{x} =$$

$$= 12x^2(12\ln x - 4) + 48x^2 = 144x^2\ln x - 48x^2 + 48x^2 = 144x^2\ln x.$$

Найдем критические точки 2-го рода, в которых вторая производная равна нулю или не существует. В данном случае это точки $x = 0$ и $x = 1$. Учтем, что область определения данной функции $(0;\infty)$, поэтому будем рассматривать её только на этом участке числовой прямой.



На $(0;1)$ вторая производная y'' отрицательна, что соответствует выпуклости графика вверх. На $(1;\infty)$ она положительна, т.е. график является выпуклым вниз.

Т.о. имеем в точке $x = 1$ точку перегиба.