Математика.
Лекция 13.

Исследование функций.

Асимптоты графика функции

Асимптота к графику функции $y = f(x)$ - это прямая, к которой приближается точка *M (x, y)*, лежащая на графике, при неограниченном удалении ее от начала координат.
Асимптоты бывают наклонные $y = kx + b$ (как частный случай – горизонтальные: $y = b$) или вертикальные: $x = a$.

Вертикальные асимптоты.

Прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции, если хотя бы один из односторонних пределов (левый или правый) функции в точке $x = a$ равен $\pm\infty$:

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$ и / или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = -\infty$ и/или

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty$ и / или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = -\infty$.

Вертикальные асимптоты могут находиться:

- в точках разрыва 2 рода;
- на границах области определения.

Пример. График функции $y = \frac{1}{x-2}$ имеет вертикальную асимптоту $x=2$. Действительно,

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty.$$

Точка $x=2$ – точка разрыва 2 рода функции.

Пример. График функции $y=ln\ x$ имеет вертикальную асимптоту $x=0$. Действительно, $\lim\limits_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$. Область определения функции – интервал $(0,+\infty)$. Точка $x=0$ – граница области определения.

Наклонные асимптоты.

Прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой** графика функции в $+\infty$ $(-\infty)$, если функция представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ ($\alpha(x)$- бесконечно малая функция).

Наклонная асимптота $y = k_1 x + b_1$ существует в $-\infty$, если существуют конечные пределы:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ b_1 = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - \mathrm{k}_1 x).$$

Аналогично для $y = k_2 x + b_2$ в $+\infty$:

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b_2 = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mathrm{k}_2 x).$$

В частных случаях возможны значения коэффициентов наклона $k_1 = 0$ и/или $k_2 = 0$ **- горизонтальные** асимптоты.

В общем случае в $-\infty$ и в $+\infty$ для графика одной функции возможны различные асимптоты.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Решение. Функция определена, если знаменатель $x-1 \neq 0$, $x \neq 1$. Таким образом, область определения - объединение интервалов $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$. Точка $x=1$ –точка разрыва.

Так как $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{2x-1}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{2x-1}{x-1} = -\infty$,

прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой. Далее имеем:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x^2-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 0,$$

так как $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$;

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 2.$$

Следовательно, прямая $y=kx+b$, то есть $y=2$ – горизонтальная асимптота .

Пример. Найдем асимптоты графика функции $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

а) На вертикальную асимптоту подозрительна точка $x = 1$, которую и исследуем:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \left(\frac{8}{+0}\right) = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \left(\frac{8}{+0}\right) = +\infty.$$

Т.е. воображаемая вертикальная прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой, при приближении к которой слева и справа график функции уходит вверх.

б) Для исследования на наклонную асимптоту вычислим:

$$k_1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2 x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1;$$

$$b_1 = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^3 - x \cdot (x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot x + 3 \cdot 1 \cdot x^2 + 1^3 - x \cdot (x^2 - 2\mathrm{x} + 1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2\mathrm{x} + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5 .$$

Т.к. полученные пределы конечны (получены числа), то на $-\infty$ имеем наклонную асимптоту $y = x + 5$.

Аналогично,

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2 x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1;$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3 - x\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+2x+1}{x^2-2\mathrm{x}+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2} = 5.$$

Т.е. и на $+\infty$ существует та же асимптота $y = x + 5$.

Общая схема исследования функции и построения графика.

<u>План полного исследования функции:</u>

1. По формуле функции выяснить:

а) область определения функции;

б) симметричность графика (четность-нечетность функции);

в) периодичность функции;

г) непрерывность функции, возможные точки разрыва и поведение функции вблизи неё;

д) асимптоты графика (вертикальные и наклонные);

е) точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.

План полного исследования функции:

2. Вычислить первую производную функции и по ней выяснить:

а) критические тоски 1-го рода;

б) интервалы монотонности функции (интервалы знакопостоянства первой производной);

в) точки локального экстремума;

г) значения функции в точках экстремума.

3. Вычислить вторую производную функции и по ней выяснить:

а) критические тоски 2-го рода;

б) интервалы выпуклости функции вверх и вниз (интервалы знакопостоянства второй производной);

в) точки перегиба;

г) значения функции в точках перегиба.

4. Построить график функции по результатам исследования.

Пример полного исследование функции $y = \dfrac{8x - 3x^2}{(x - 2)^2}$ с построением графика.

1. Проанализируем формулу функции.

а) Область определения функции $D(y)$: $x \neq 2$.

б) Т.к. $y(-x) = \dfrac{8(-x) - 3(-x)^2}{(-x - 2)^2} = \dfrac{-8x - 3x^2}{(x + 2)^2}$, то функция не является ни четной, ни нечетной, она общего вида. Т.е. её график несимметричен.

в) Т.к. в формуле данной функции нет периодических составляющих, то она непериодическая.

Пример полного исследование функции $y = \frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2}$ с построением графика.

г) Подозрительна на разрыв точка $x = 2$. Выясним тип разрыва и поведение функции вблизи этой точки:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2} = \left(\frac{4}{+0}\right) = +\infty$$

(т.е. при приближении к $x = 2$ слева график уходит вверх);

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2} = \left(\frac{4}{+0}\right) = +\infty$$

(т.е. при приближении к $x = 2$ справа график также уходит вверх).

Т.о. в точке $x = 2$ функция терпит разрыв 2-го рода.

Пример полного исследование функции $y = \frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2}$ с построением графика.

д) Определим, есть ли у графика функции асимптоты.

Выше уже выяснено, что оба односторонних предела в точке $x = 2$ равны $+\infty$, т.е. у графика данной функции есть вертикальная асимптота – прямая $x = 2$.

Для нахождения наклонной асимптоты $y = k_1 x + b_1$ при $x \to -\infty$ (т.е. далеко влево от начала координат) вычислим пределы:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2 x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{x} = \left(\frac{-3}{-\infty}\right) = 0;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2} - 0 \cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2} = = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3.$$

Т.к. получены конечные пределы, то при $x \to -\infty$ имеем наклонную (а именно - горизонтальную) асимптоту $y = 0x - 3 = -3$.

Пример полного исследование функции $y = \frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2}$ с построением графика.

Аналогичными вычислениями получаем при $x \to +\infty$:

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2 x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = \left(\frac{-3}{+\infty}\right) = 0;$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2} - 0 \cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3.$$

Горизонтальная асимптота $y = -3$ при $x \to +\infty$.

Пример полного исследование функции $y = \frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2}$ с построением графика.

е) Найдем точки пересечения функции с осями координат.
В точках пересечения графика с осью OX координаты y равны 0:

$$y = \frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(8 - 3x) = 0 .$$

Это точки с абсциссами $x = 0$ и $x = 8/3$.

В точках пересечения графика с осью OY координаты x равны 0:

$$y(0) = \frac{8 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2}{(0-2)^2} = 0 .$$

Пример полного исследование функции $y = \dfrac{8x - 3x^2}{(x-2)^2}$ с построением графика.

Выясним интервалы знакопостоянства функции. Для этого нанесем на ось OX особые точки: точки разрыва ($x = 2$) и точки пересечения с осью OX ($x = 0$, $x = 8/3$). Расставим в интервалах знаки функции, подставив произвольные точки из этих интервалов:

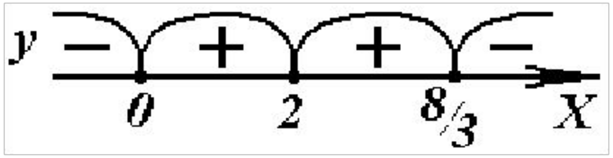
$$y(-1) = \frac{8 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1)^2}{(-1-2)^2} = \frac{-8-3}{(-3)^2} = -\frac{11}{9} < 0;$$

$$y(1) = \frac{8 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2}{(1-2)^2} = \frac{8-3}{(-1)^2} = \frac{5}{1} = 5 > 0;$$

$$y(7/3) = \frac{8 \cdot (7/3) - 3 \cdot (7/3)^2}{(7/3 - 2)^2} = \frac{56/3 - 49/3}{(1/3)^2} = \frac{7/3}{1/9} = 21 > 0;$$

$$y(3) = \frac{8 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2}{(3-2)^2} = \frac{24-27}{1^2} = \frac{-3}{1} = -3 < 0.$$

Значит, в интервалах $(-\infty;0)$ и $(8/3;+\infty)$ график функции проходит ниже оси OX, а в $(0;2)$ и $(2;8/3)$ - выше оси OX.



Пример полного исследование функции $y = \dfrac{8x - 3x^2}{(x-2)^2}$ с построением графика

2. Найдет производную функции:

$$y' = \left(\frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2}\right)' = \frac{(8-6x)(x-2)^2 - (8x-3x^2)2(x-2)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(8-6x)(x-2) - 2(8x-3x^2)}{(x-2)^3} = \frac{8x - 16 - 6x^2 + 12x - 16x + 6x^2}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{4x-16}{(x-2)^3} = \frac{4(x-4)}{(x-2)^3}.$$

а) Найдем критические точки 1-го рода.

По необходимому условию локального экстремума это точки области определения, в которых первая производная равна 0, стремится к бесконечности или не существует.

Производная данной функции не существует в точке $x = 2$, но эта точка является точкой разрыва и быть экстремумом не может.

Приравняем производную нулю: $y' = \dfrac{4(x-4)}{(x-2)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$.

Пример полного исследование функции $y = \dfrac{8x - 3x^2}{(x-2)^2}$ с построением графика.

б) Выясним интервалы знакопостоянства первой производной, т.е. возрастания-убывания функции. Нанесем точки $x = 2$ и $x = 4$ на ось и расставим знаки производной.

Анализ знаков производной показывает, что на интервалах $(-\infty;2)$ и $(4;+\infty)$ функция возрастает, на $(2;4)$ - убывает.

в) Определим точки локального экстремума.

По достаточному условию локального экстремума это точки области определения, при переходе через которые производная меняет знак. Т.к. точка $x = 2$ является точкой разрыва, то она не является точкой экстремума, несмотря не смену знака первой производной.

А в точке $x = 4$ знак первой производной меняется с «+» на «–», т.е. это точка локального минимума.

г) Чтобы нанести в дальнейшем эту точку на график, вычислим значение функции в ней: $y(4) = \dfrac{8 \cdot 4 - 3 \cdot 4^2}{(4-2)^2} = \dfrac{32 - 48}{2^2} = \dfrac{-16}{4} = -4$.

Пример полного исследование функции $y = \frac{8x - 3x^2}{(x-2)^2}$ с построением графика.

3. Найдет вторую производную анализируемой функции:

$$y'' = \left(\frac{4(x-4)}{(x-2)^3}\right)' = \frac{4(x-2)^3 - 4(x-4)3(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{4(x-2) - 12(x-4)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 12x + 48}{(x-2)^4} = \frac{-8x + 40}{(x-2)^4} = \frac{8(5-x)}{(x-2)^4}.$$

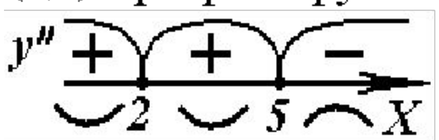
а) Найдем критические точки 2-го рода. По необходимому условию точек перегиба это точки области определения, в которых вторая производная равна 0, стремится к бесконечности или не существует.

В данном случае это точки $x = 2$ и $x = 5$. Но первая точка является точкой разрыва. А вот $x = 5$ - критическая точка 2-го рода.

Пример полного исследование функции $y = \dfrac{8x - 3x^2}{(x-2)^2}$ с построением графика.

б) Выясним интервалы знакопостоянства второй производной, т.е. характер выпуклости функции. Нанесем точки $x = 2$ и $x = 5$ на ось и расставим знаки второй производной .

Анализ знаков второй производной показывает, что на интервалах $(-\infty;2)$ и $(2;5)$ график функции выпуклый вниз, на $(5;+\infty)$ - выпуклый вверх.



в) Определим точки перегиба.

По достаточному признаку перегиба это точки области определения, при переходе через которые y'' меняет знак.

Знак второй производной (направление выпуклости графика) меняется в точке $x = 5$, которая принадлежит области определения. Она является точкой перегиба.

г) Вычислим значение функции в точке перегиба:

$$y(5) = \frac{8 \cdot 5 - 3 \cdot 5^2}{(5-2)^2} = \frac{40 - 75}{3^2} = \frac{-35}{9} = -3{,}89\,.$$

4. Проанализируем полученные вычисления и построим график.

Нанесем штриховой линией вертикальную асимптоту $x=2$. Как показывают расчеты (п.1-г), график функции при подходе к этой прямой уходит вверх при приближении как слева, так и справа.

Нанесем горизонтальную асимптоту $y=-3$. Т.к. функция непериодическая, то приближается к ней только с одной стороны (сверху или снизу). Пока не ясно, с какой именно. На интервале $(-\infty;2)$ функция только возрастает, причем является вогнутой. И на этом интервале нет экстремумов. Значит, график до точки $x=2$ проходит именно так, как изображено на рисунке.

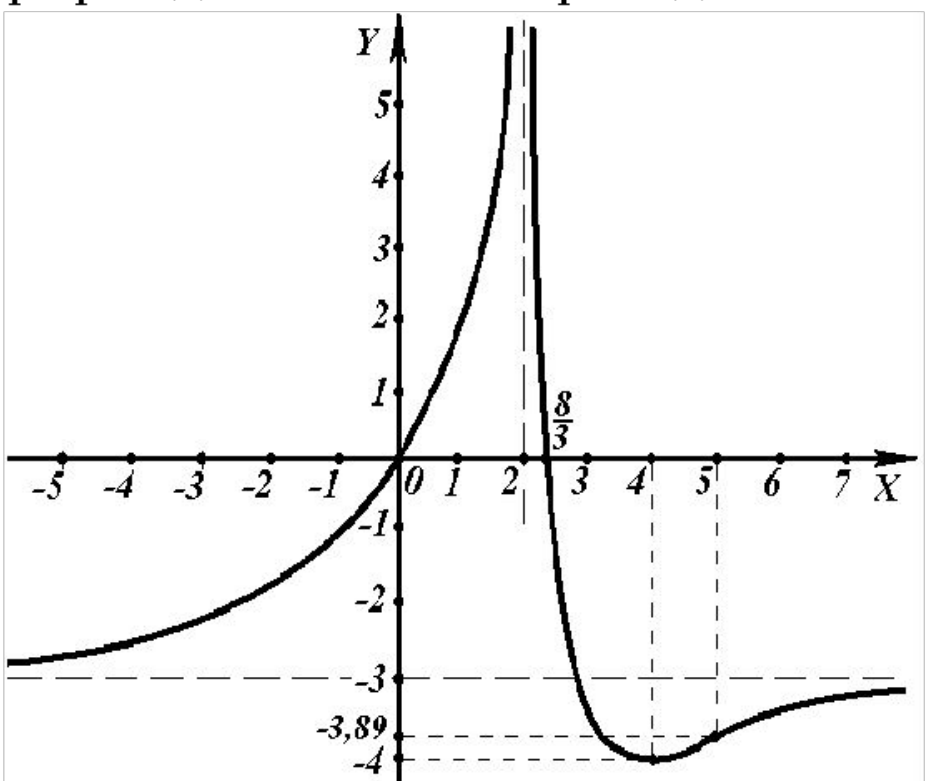


График после точки $x=2$ сначала убывает до точки $(4;-4)$, в которой он имеет минимум. После этого функция возрастает. Но как именно? График вогнут вплоть до точки перегиба $x=5$, после чего становится выпуклым. Но выпуклым он мог бы быть по-разному. Здесь он асимптотически приближается к горизонтальной прямой $y=-3$, почти сливаясь с ней в $+\infty$.