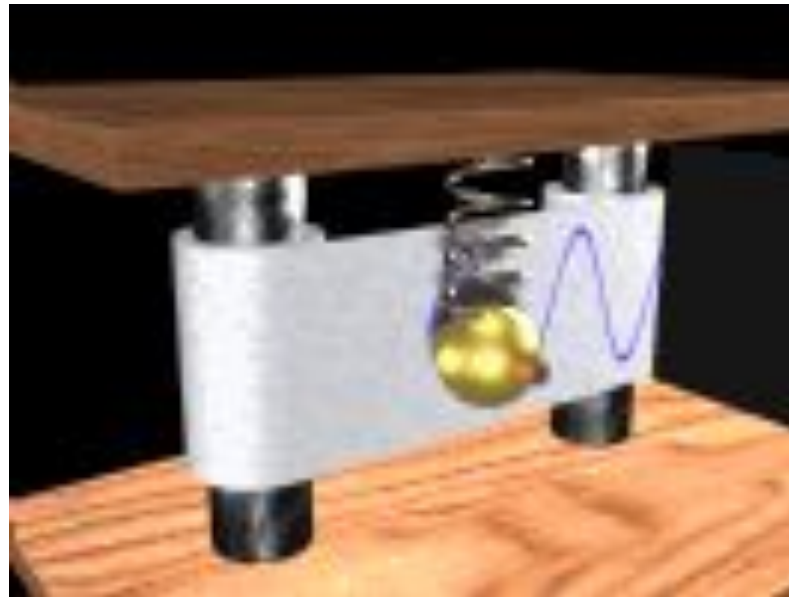


ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Механические колебания



Составители:

Директор по маркетингу и сбыту, к.т.н. Романов Р.А.

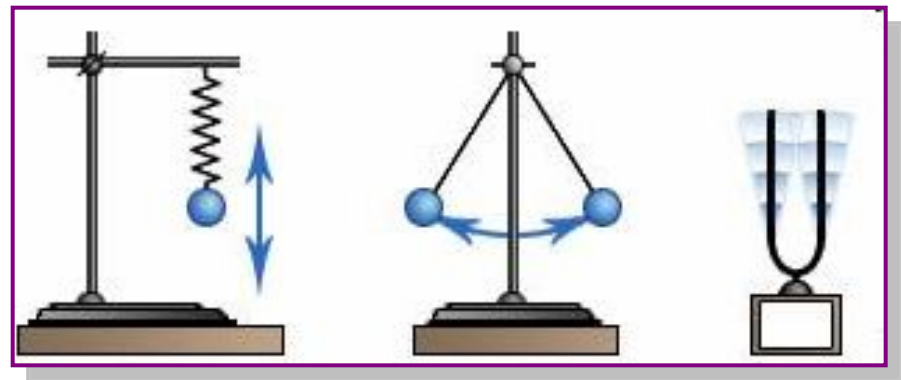
Руководитель учебного центра «БАЛТЕХ» Севастьянов В.В.

Определение колебания

- *Внутри* любого живого *организма* *непрерывно* происходят разнообразные *повторяющиеся процессы*, например, процесс работы сердца.
- Аналогично и в технике есть разнообразные *повторяющиеся процессы*
- Все эти явления *подчиняются общим закономерностям*, которые мы рассмотрим на примере *механических колебаний*.
- *Колебания* – это *периодически повторяющиеся* движения или изменения параметров, которые характеризуют состояние системы.
- *Колебания* могут быть *разной природы*:
 - механические,
 - тепловые,
 - электрические и т. п.

Виды колебаний

- гармонические,
- периодические
- затухающие,
- вынужденные
- *Простейшим видом* колебаний является *гармонические колебания*, но *чаще* встречаются *периодические колебания*.



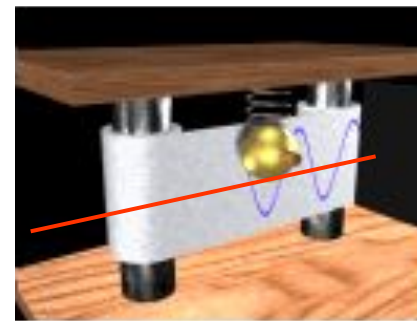
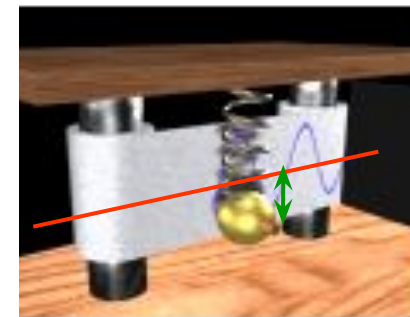
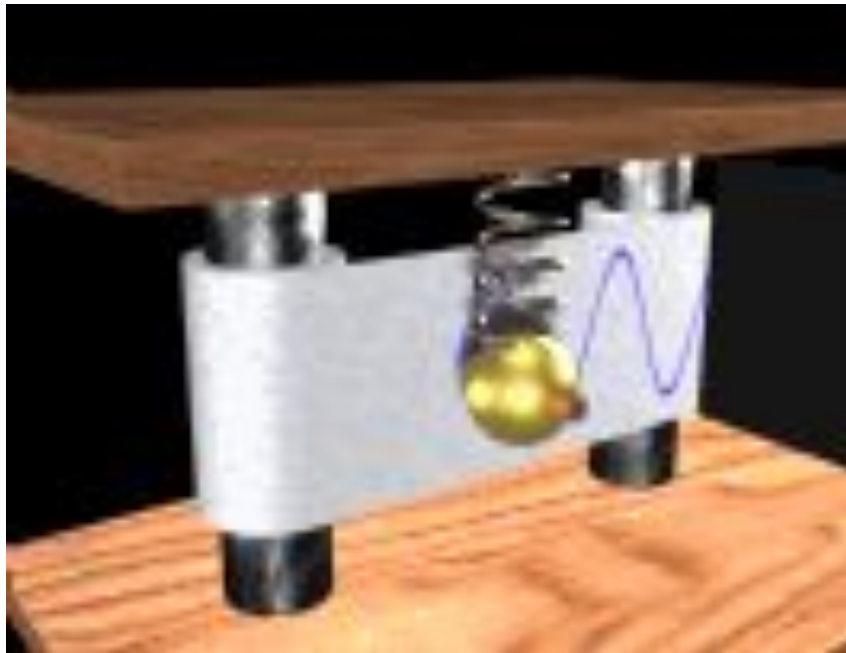
Систему, совершающую колебательные движения, называют **осциллятором**.

Основные характеристики колебательного движения

- **Смещение x** – это расстояние, на которое отклоняется колеблющееся тело в данный момент времени от положения равновесия. Измеряется в СИ в метрах (м);

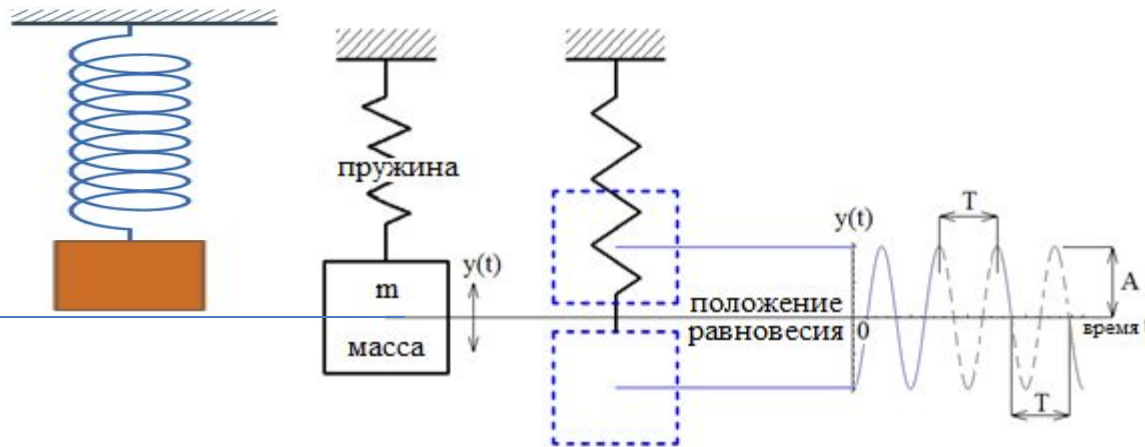
для гармонического колебания (1):

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$



Основные характеристики колебательного движения

- **Амплитуда** A_0 или (часто) просто A – **максимальное смещение** ($A_0 = x_{\max}$) от положения **равновесия**. Измеряется в СИ в метрах (м);



- **Период** T – время **одного полного колебания**. Измеряется в СИ в секундах (с).
Для колебания материальной точки на пружине:
Где m – **масса** материальной точки, закреплённой на пружине **жёсткостью** k .

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- **Частота** или **линейная частота** ν («ню») – это число колебаний в единицу времени. Измеряется в СИ в Герцах (Гц) или обратных секундах:

$$1\text{c}^{-1} = \frac{1}{\text{с}} = 1\text{Гц}$$

Связана с периодом T формулой: $\nu = \frac{1}{T}$

Основные характеристики колебательного движения

- Циклическая или круговая частота ω («омега») – величина, которая связана с линейной частотой ν формулой:

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

Измеряется в СИ в радианах в секунду (рад/с), т.к. по определению – это скорость изменения угла φ от времени t .

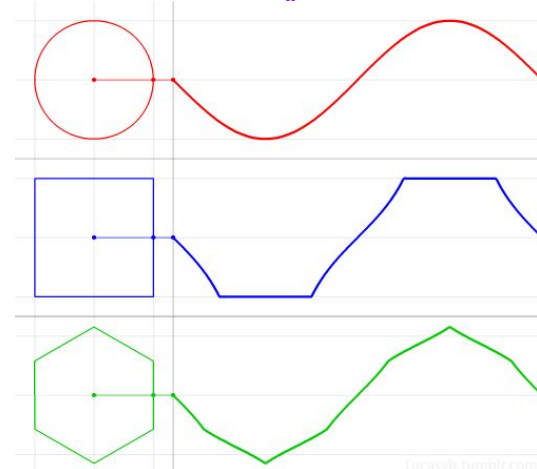
Круговая частота ω связана с коэффициентом жёсткости k и массой m формулой:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{m/k}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega^2 m$$

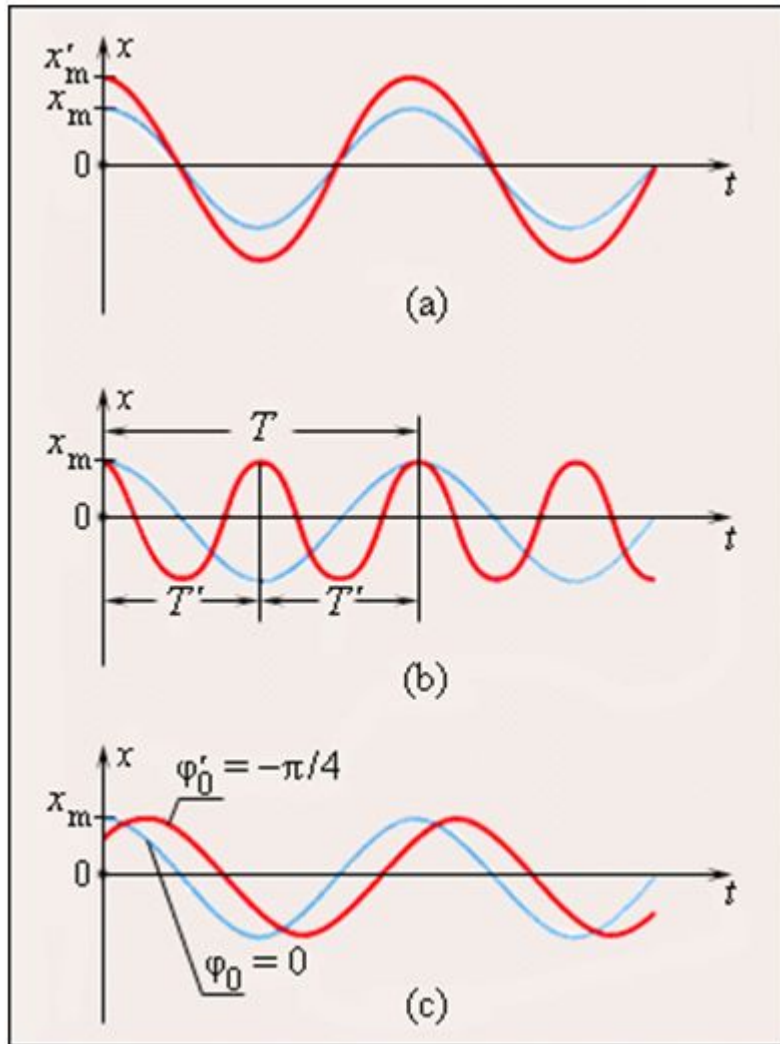
- Фаза колебаний $\varphi = \omega_0 \cdot t + \varphi_0$ характеризует состояние колеблющейся материальной точки в любой момент времени t , где φ_0 – начальная фаза колебаний (фаза при $t_0=0$).

Фаза по смыслу является углом отклонения от положения равновесия и измеряется в угловых градусах (внесистемная единица) и в СИ – в радианах (рад).

Амплитуда A_0 и начальная фаза φ_0 колебаний определяются начальными условиями движения (положением материальной точки в момент времени $t_0 = 0$).



Пример на изменение характеристик колебательного движения



Во всех трех случаях для **синих** кривых $\varphi_0 = 0$:

$$x = A_0 \cos(\omega t) = x_m \cos(\omega t)$$

а – **красная** кривая отличается от **синей** **только** **бóльшей амплитудой** ($x'_{max} > x_{max}$);

б – **красная** кривая отличается от **синей** **только** значением периода ($T' = T/2$);

с – **красная** кривая отличается от **синей** **только** значением начальной фазы:

$$\varphi'_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Основные характеристики колебательного движения

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- Скорость движения материальной точки v .

- Измеряется в СИ в метрах в секунду (м/с).

- Выражение для v найдется путем дифференцирования x :

- Скорость максимальна, если: $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 1$

Тогда $v = v_{\max} = A_0 \omega_0$

$$v = \frac{dx}{dt} = A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- Ускорение колеблющейся материальной точки a .

- Измеряется в СИ в метрах в секунду в квадрате (м/с²).

- Выражение для a найдется путем дифференцирования v :

- Ускорение – это вторая производная по времени от смещения:

- Ускорение максимально, если $\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -1$

Тогда

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x''$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a = a_{\max} = A_0 \omega_0^2$$

Графики колебательного движения

$$x = A_0 \cos(\omega t) = x_m \cos(\omega t)$$

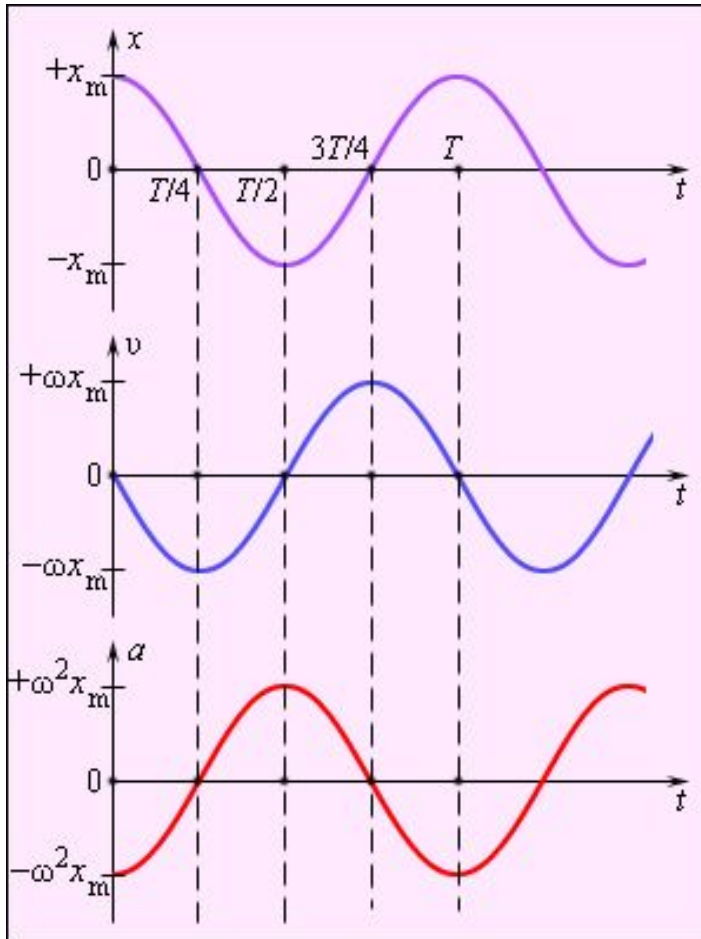


График **координаты** $x(t)$ тела, совершающего гармонические колебания

$$x_{\max} = A_0$$

График **скорости** $v(t)$ тела, совершающего гармонические колебания

$$v = v_{\max} = A_0 \omega_0$$

График **ускорения** $a(t)$ тела, совершающего гармонические колебания

$$a = a_{\max} = A_0 \omega_0^2$$

Энергия гармонического колебания

- **Полная энергия** гармонического колебания E определяется суммой кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_k + E_n = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

- Подставляя в эту формулу

- выражение для скорости v :

$$v = \frac{dx}{dt} = A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- выражение для смещения x :

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- и, учитывая, что

$$\omega = \omega_0^2 \cdot$$

получаем:

$$E = \frac{1}{2} m A_0^2 \omega_0^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2} m A_0^2 \omega_0^2$$

так как:

$$\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = 1 \quad \text{ное тригонометрическое тождество)}$$

ВАЖНО!

Из формулы:

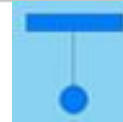
$$E = \frac{1}{2} m A_0^2 \omega_0^2$$

следует, что энергия гармонического

1) **Прямо пропорциональна квадрату амплитуды A^2** : чем больше “размах” колебаний, тем больше и их энергия.

2) **энергия прямо пропорциональна квадрату круговой частоты колебаний ω_0^2** .

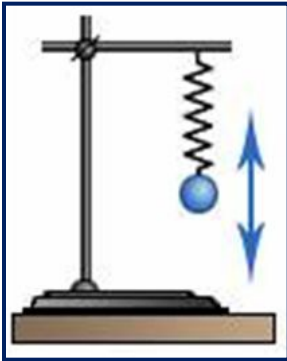
Маятники



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Маятник – это тело массой m , , подвешенная на нити или пружине и совершающее гармонические колебания.

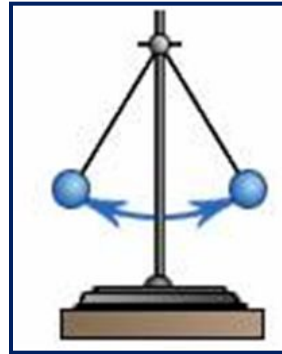
Пружинный маятник



Пружинный маятник – это материальная точка массой m , подвешенная на абсолютно упругой пружине жесткостью k и совершающая гармонические колебания под действием упругой силы.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

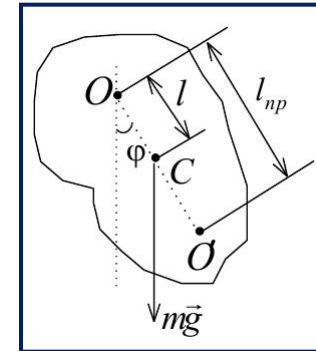
Математический маятник



Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити длиной l , на которой подвешена материальная точка массой m .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Физический маятник



Физический маятник - это твердое тело массой m , совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O , не совпадающую с центром масс C тела

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{np}}{g}} \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

где величину $I/ml = l_{np}$ называют **приведенной длиной** физического маятника. Она **численно равна** длине такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

- На примере движения **пружинного маятника** – материальной точки массой m , закреплённой на **ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ** пружине **жёсткостью** k (Рис.1), рассмотрим различные виды колебаний в зависимости от сил, которые действуют вдоль оси Ox на данное тело массой m .

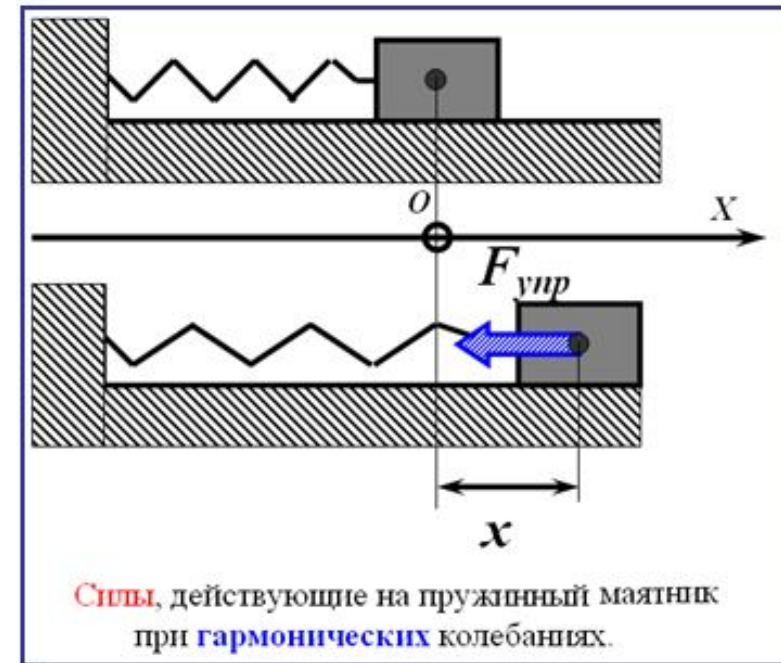
Гармонические колебания

- **Гармонические колебания** – колебания, при которых наблюдаемая величина изменяется во времени:
 - с постоянной **частотой** ν по закону синуса или косинуса и
 - постоянной **амплитудой** A_0 .

Рассмотрим случай действия на тело массой m **только силы упругости** $F_{упр}$

- Если пружину **оттянуть** (на рисунке) или **сжать** (аналогично, но в другую сторону) на расстояние x от положения равновесия, то **возникает сила упругости** $F_{упр}$, величина и направление которой определяется **законом Гука**:

$$F_{упр} = -k \cdot x$$



Знак “**минус**” показывает, что **сила упругости** всегда направлена в **сторону, противоположную** направлению **смещения** x , т.е. к положению равновесия.

Гармонические колебания

Для данного случая второй закон Ньютона в проекции на ось Ox : $m a_{\text{пр } x} = F = -k \cdot x$

Вспомним, что **ускорение** – это **вторая производная** по времени **от смещения** x :

Получаем уравнение: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x''$

Разделим каждое слагаемое на m и вспомним, что $m x'' = -k \cdot x \Leftrightarrow m x'' + k \cdot x = 0$

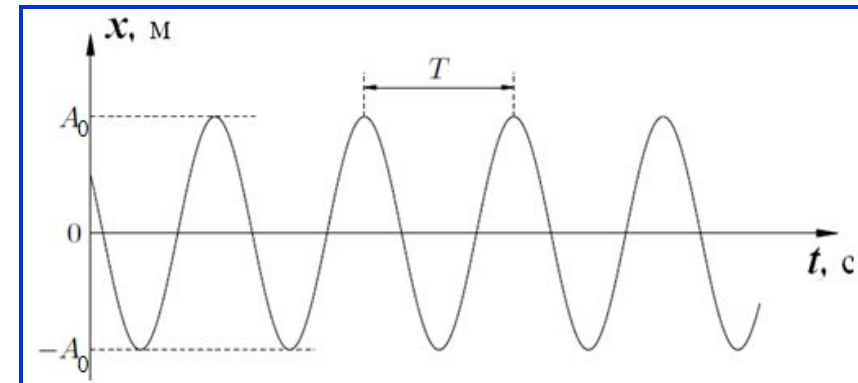
где ω_0 – **собственная круговая частота** гармонического колебания. $k = \omega_0^2 m$

Получилось **дифференциальное уравнение второй степени**: $x'' + \omega^2 x = 0$
решением которого является:

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

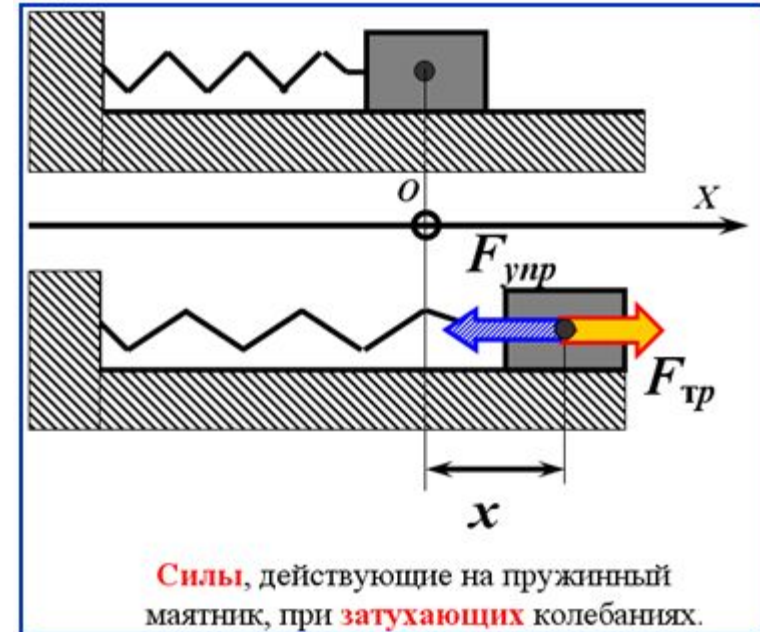
График гармонического колебания – **синусоида**, по которой можно определить смещение x колеблющейся точки в любой момент времени t .

Тут φ_0 не равно 0



Затухающие колебания

- **Затухающие колебания** – колебания, при которых наблюдаемая величина изменяется во времени с **постоянной (!) частотой ν** (круговой частотой ω) по закону синуса или косинуса, но **амплитуда колебания A всё время уменьшается.**
- В данном случае **на тело** массой m вдоль оси Ox **действуют уже две силы:**
 - **сила упругости $F_{упр}$**
 - **сила трения $F_{тр}$.**



- Сила трения $F_{тр}$ пропорциональна скорости колебания ν и направлена **в сторону, противоположную скорости:**

$$F_{тр} = -r\nu = -r \frac{dx}{dt} = -rx'$$

- Для данного случая **второй закон Ньютона** в проекции на ось Ox :

$$ma_{упр,x} = F_{упр,x} + F_{тр,x} = -kx - rx'$$

Затухающие колебания

Мы вывели, что для того случая *второй закон Ньютона* в проекции на ось Ox : $ma_{\text{нр}x} = F_{\text{нр}x} = -kx - rx'$

- Учтём, что: $k = \omega_0^2 m$
- Тогда при сокращении каждого слагаемого на m и переносе всех членов влево от знака равенства, получим:

$$x'' + \frac{r}{m} x' + \omega_0^2 x = 0$$

- Проведем замену $\frac{r}{m} = 2\beta$

где β называется *коэффициентом затухания* - это основная характеристика *затухающего колебания*, измеряется в *обратных секундах* (c^{-1}),

- Получаем конечный вид *дифференциального уравнения второй степени*:

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$$

- Решением его является формул $x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) = A(t) \sin(\omega t + \varphi_0)$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - *собственная круговая частота затухающего колебания*.

Характеристики затухающего колебания

График затухающего колебания – синусоида, амплитуда которой $A(t)$ уменьшается по экспоненте:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Коэффициент затухания β характеризует **степень затухания** колебаний.

- **Декремент затухания δ** («дельта») – отношение значений двух последовательных амплитуд, разделённых периодом колебания:

$$\delta = \Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

Логарифмический декремент затухания λ («лямбда») – натуральный логарифм декремента затухания:

$$\lambda = \ln \delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}$$

Логарифмический декремент затухания применяется чаще, т.к. он связан с периодом T и коэффициентом затухания β :

$$\lambda = \ln \delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$



$$\lambda = \beta T$$

- Обе характеристики – безразмерные величины.

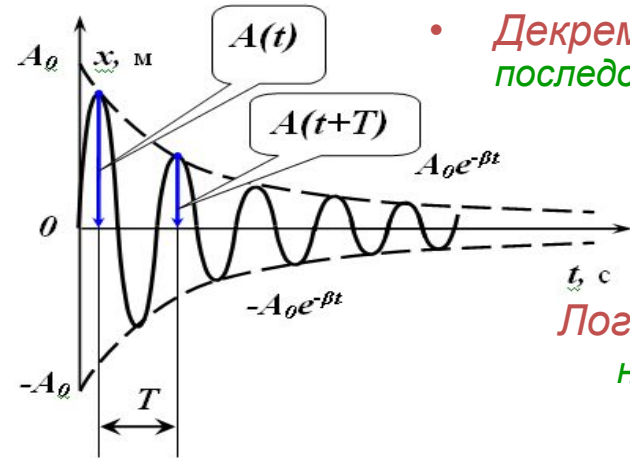
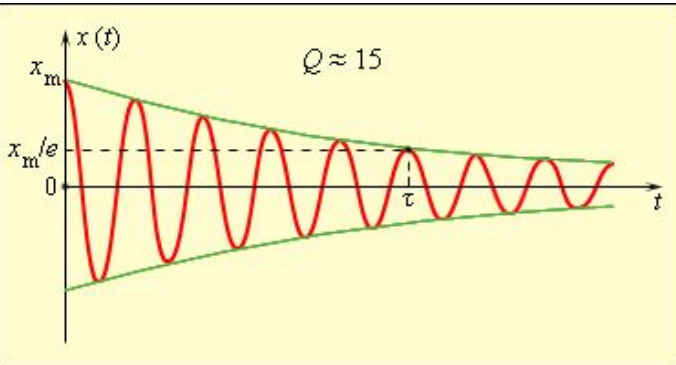


График затухающего колебания.

Характеристики затухающего колебания

Время релаксации τ («*tau*») – это время, за которое амплитуда уменьшается в e раз:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e \Rightarrow \tau = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e^1 \Rightarrow \beta\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}$$



Коэффициент затухания β («*бета*») – величина, обратная промежутку времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в e раз: $\beta = \frac{1}{\tau}$

Измеряется в СИ в **Герцах** (Гц) или **обратных секундах** (c^{-1})

За время релаксации τ система успевает сделать N_e колебаний:

Значит, **логарифмический декремент затухания** λ обратно пропорционален по величине числу колебаний, за которые амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$\lambda = \frac{1}{N_e} \quad N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau\beta}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Добротность Q системы - величина, характеризующая уменьшение полной энергии ΔE системы по формуле: $\Delta E = -2\pi E/Q$, где знак минус показывает, что энергия уменьшается.

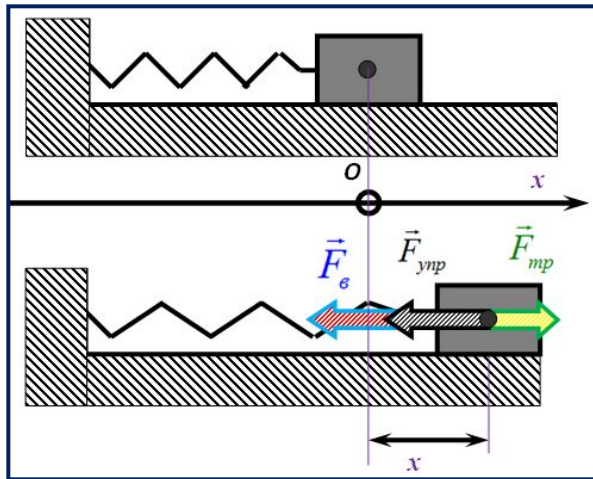
Большим значениям Q соответствует **слабое затухание колебаний**. **Добротность** пропорциональна числу колебаний за время релаксации N_e и обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания λ :

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$$

Вынужденные колебания

Вынужденные колебания – колебания, при которых наблюдаемая величина изменяется во времени:

- с **постоянной частотой ν** (круговой частотой ω), задаваемой **внешней вынуждающей силой $F_в$** .



В данном случае **на тело** массой m вдоль оси Ox **действуют три силы**:

- **сила упругости $F_{упр}$**
- **сила трения $F_{тр}$** .
- **вынуждающая сила $F_в$** , которая **действует периодически** с круговой частотой $\omega_в$ **$F_в = F_0 \sin \omega_в t$**

□ Для данного случая **второй закон Ньютона** в проекции на ось Ox : $m a_{упр\ x} = F_{тр\ x} + F_в + F$

□ Учтём, что: $k = \omega_0^2 m$ и $\frac{r}{m} = 2\beta$

□ При **сокращении** каждого слагаемого на m и **переносе** всех членов влево от знака равенства, получим:

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega_в t$$

Вынужденные колебания

- Проведём замену: $\frac{F_0}{m} = f_0$ удельная вынуждающая сила

- Получаем **конечный вид** дифференциального уравнения **второй степени**:

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega_s t$$

- Решение такого уравнения состоит из **двух частей-решений**: $x = x_1 + x_2$:
 - Решение x_1 описывает **неустановившейся режим колебаний**, когда их амплитуда увеличивается во времени.
 - Решение x_2 описывает **установившийся режим колебаний**.
- В **установившемся режиме вынужденных колебаний** смещение x_2 подчиняется **гармоническому закону** и происходит с частотой ω_s .

$$x = A \sin(\omega_s t + \varphi_0)$$

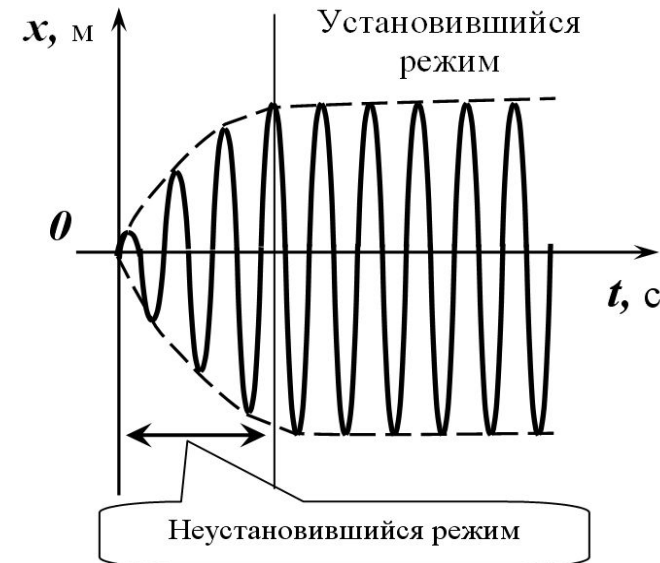


График **вынужденного** колебания.

Резонанс

- Амплитуда A вынужденных колебаний зависит от многих разобранных выше параметров:
 - частоты собственных колебаний ω_0 ,
 - коэффициента затухания β ,
 - силы f_0 ,
 - частоты вынуждающей силы $\omega_в$.

- Амплитуда A будет максимальна, если частота $\omega_в$ действия вынуждающей силы определяется формулой:

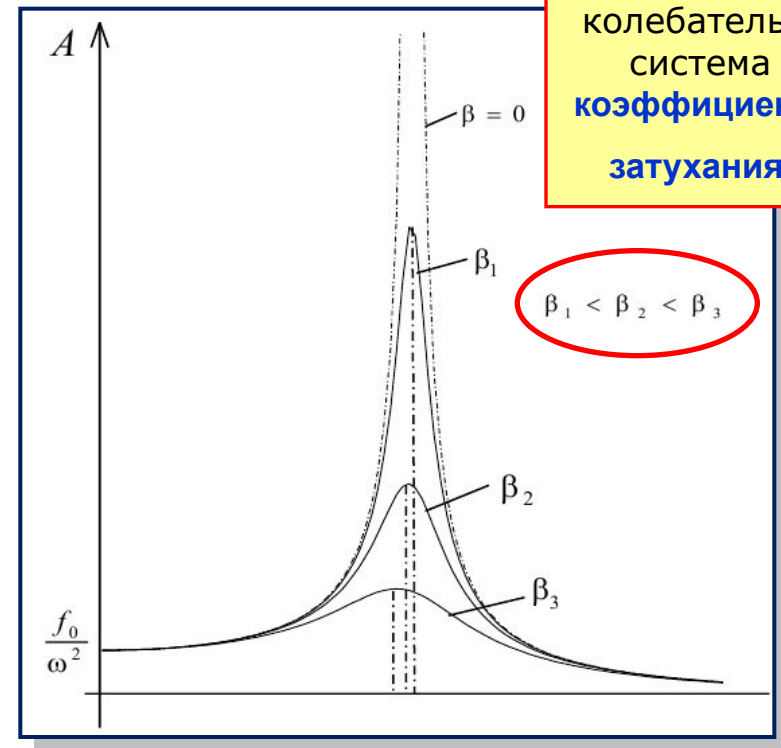
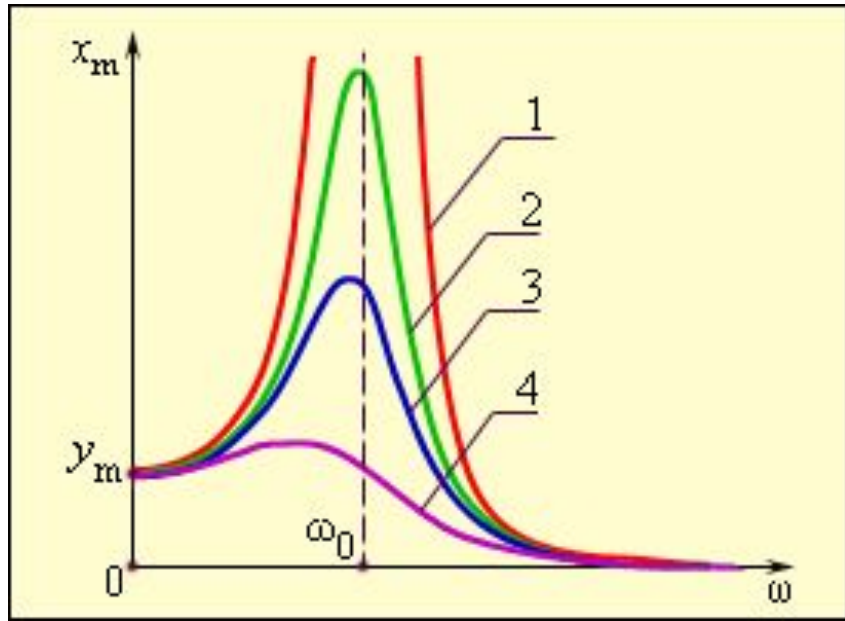
$$\omega_в = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

- При этом наблюдается явление резонанса.
- Резонанс – это резкое возрастание амплитуды A вынужденных колебаний при совпадении частоты действия вынуждающей силы $\omega_в$ с частотой системы ω , т.е.:

$$\omega_в = \omega \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Если бы затухание в системе отсутствовало ($\beta = 0$), то резонанс наступал бы при условии: $\omega_0 = \omega_в$, где ω_0 – собственная частота гармонического колебания. При этом амплитуда достигала бы бесконечно большого значения.

График резонанса



Резонансные кривые при различных уровнях затухания:

1 – колебательная система **без трения**:

при резонансе **амплитуда x_{max}** вынужденных колебаний **неограниченно возрастает**;

2, 3, 4 – реальные резонансные кривые для колебательных систем с различной добротностью: $Q_2 > Q_3 > Q_4$.

На низких частотах ($\omega \ll \omega_0$) $x_{max} \approx f_{max}$. На высоких частотах ($\omega \gg \omega_0$) $x_{max} \rightarrow 0$

Цифровая обработка сигналов

В настоящее время *методы цифровой обработки сигналов* (Digital Signal Processing – DSP) находят все более широкое применение, вытесняя постепенно методы, основанные на аналоговой обработке.

Пусть имеется непрерывный сигнал $x(t)$, заданный на интервале $[0; \infty]$.

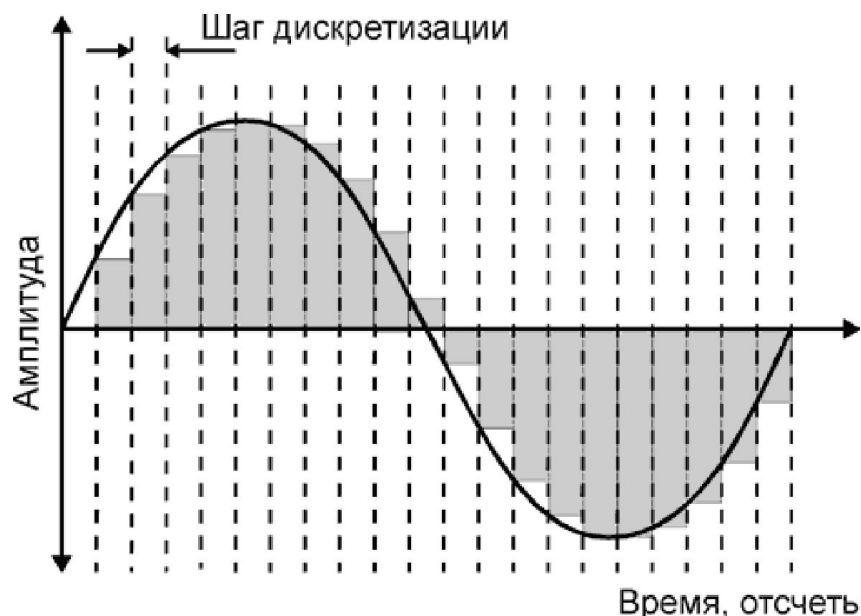
При переходе к оцифровке происходит следующая операция. Выбирается *шаг дискретизации T* , и вместо исходного сигнала получается последовательность: $y[n] = x(n \cdot T), n = 0, 1, \dots$

В процессе оцифровки аналоговых сигналов имеется два важнейших параметра, определяющих качество цифрового сигнала:

- *Частота дискретизации*
- *Разрядность оцифровки*

Дискретизация предполагает получение мгновенных значений (выборок) аналогового сигнала с определенным временным шагом.

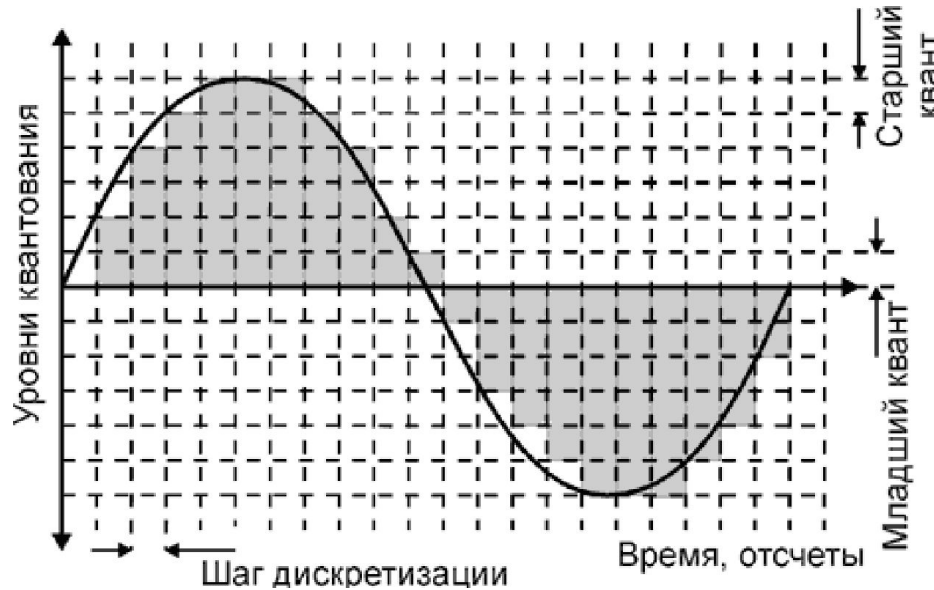
Цифровая обработка сигналов



Частота дискретизации (или частота семплирования) – частота взятия отсчетов непрерывного во времени сигнала при его дискретизации. Измеряется в Герцах.

Чем выше частота дискретизации, тем более широкий спектр сигнала может быть представлен в дискретном сигнале. **Для того чтобы однозначно восстановить исходный сигнал, частота дискретизации должна более чем в два раза превышать наибольшую частоту в спектре сигнала!**

Цифровая обработка сигналов



Квантование (Quantization) – разбиение диапазона значений непрерывного сигнала на конечное число интервалов.

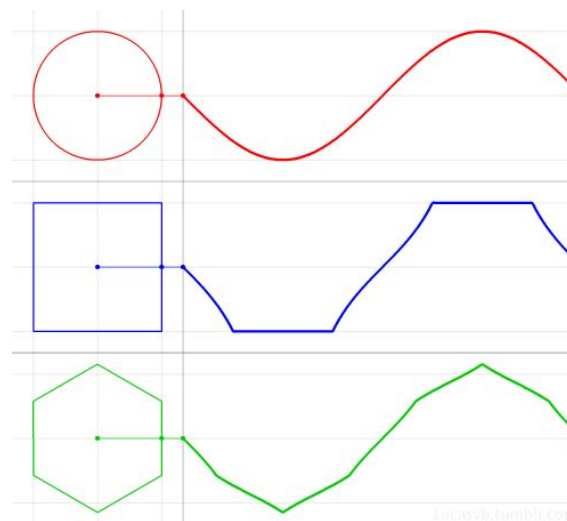
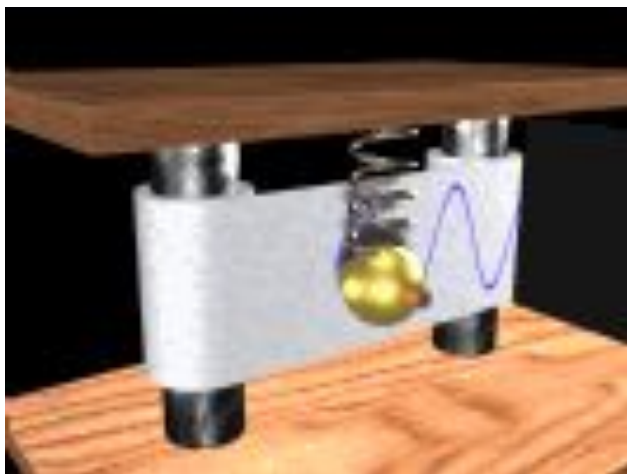
При оцифровке сигнала **уровень квантования** называют также **глубиной дискретизации** или **битностью**. Глубина дискретизации измеряется в битах и обозначает количество бит, выражающих амплитуду сигнала.

Чем больше глубина дискретизации, тем точнее цифровой сигнал, полученный аналого-цифровым преобразователем (АЦП), соответствует аналоговому.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ
КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Механические колебания

Спасибо за внимание!



Зависимость смещения от времени при разных колебаниях

Составители:

Директор по маркетингу и сбыту, к.т.н. Романов Р.А.

Руководитель учебного центра «БАЛТЕХ» Севастьянов В.В.

ООО «Балтех»

**Россия,
Санкт-Петербург, 194044,
ул. Чугунная, 40**

Тел/Факс: (812) 335-00-85

E-mail: info@baltech.ru

Internet: www.baltech.ru