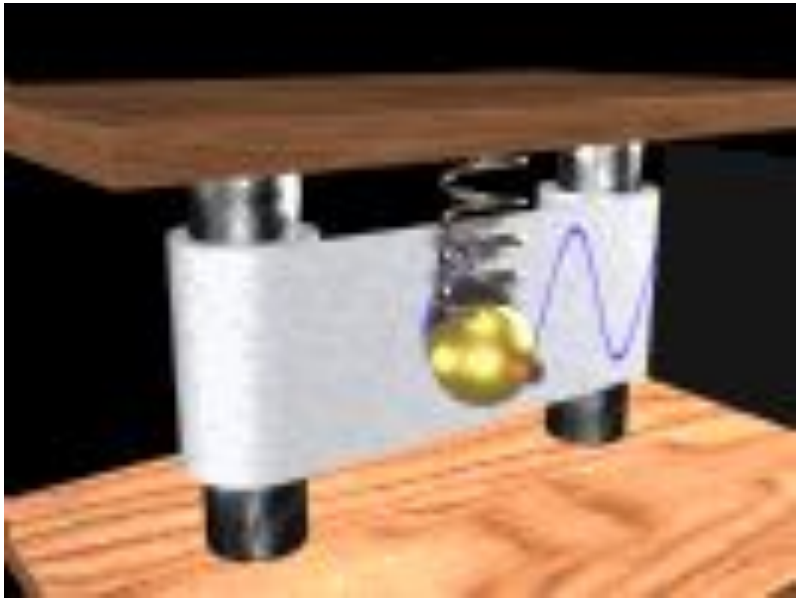
ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ
КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Механические колебания

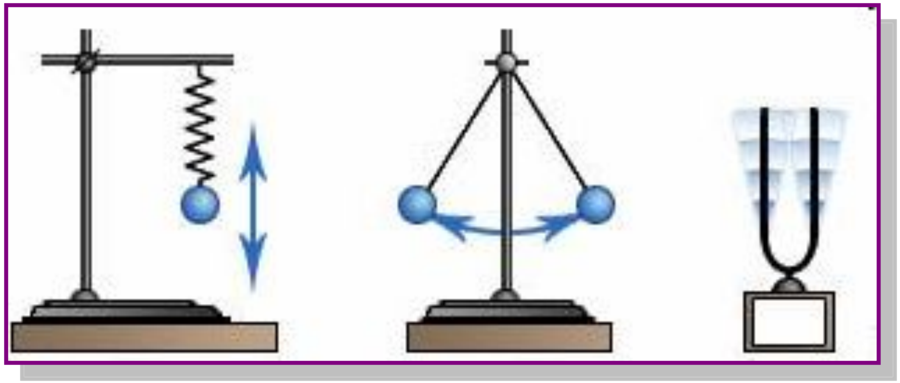


Составители:
Директор по маркетингу и сбыту, к.т.н. Романов Р.А.
Руководитель учебного центра «БАЛТЕХ» Севастьянов В.В.

Определение колебания

- *Внутри любого живого организма непрерывно происходят разнообразные повторяющиеся процессы, например, процесс работы сердца.*
- *Аналогично и в технике есть разнообразные повторяющиеся процессы*
- *Все эти явления подчиняются общим закономерностям, которые мы рассмотрим на примере механических колебаний.*

- *Колебания – это периодически повторяющиеся движения или изменения параметров, которые характеризуют состояние системы.*
- *Колебания могут быть разной природы:*
  - ☐ *механические,*
  - ☐ *тепловые,*
  - ☐ *электрические и т. п.*



Виды колебаний

- *гармонические,*
- *периодические*
- *затухающие,*
- *вынужденные*

- *Простейшим видом колебаний является гармонические колебания, но чаще встречаются периодические колебания.*

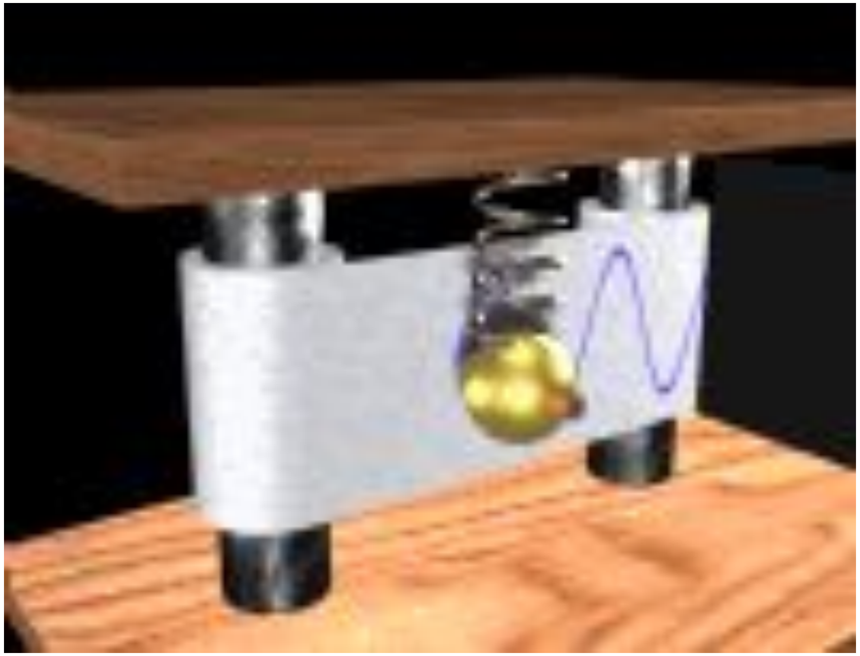
Систему, совершающую колебательные движения, называют осциллятором.

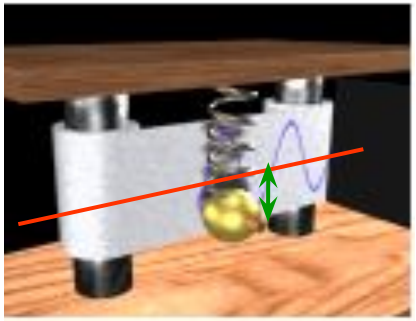
Основные характеристики колебательного движения

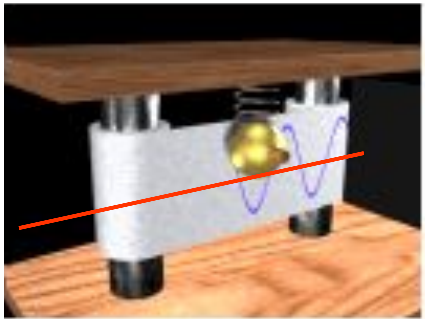
- Смещение **x** – *это расстояние, на которое отклоняется колеблющееся тело в данный момент времени от положения равновесия. Измеряется в СИ в метрах (м);*

для гармонического колебания (1):

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

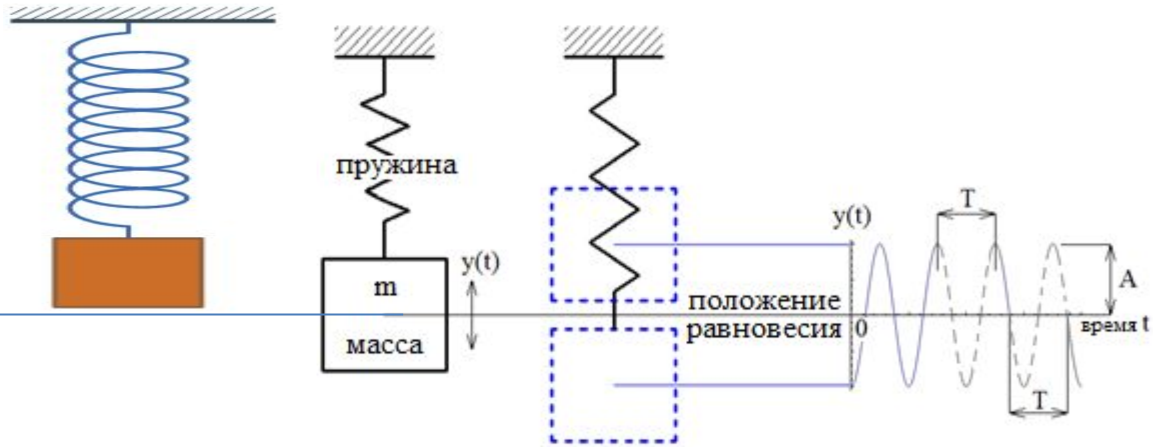






Основные характеристики колебательного движения

- *Амплитуда A_0 или (часто) просто A– максимальное смещение ($A_0=x_{мах}$) от положения равновесия. Измеряется в СИ в метрах (м);*



- *Период T – время одного полного колебания. Измеряется в СИ в секундах (с). Для колебания материальной точки на пружине:*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Где m – масса материальной точки, закреплённой на пружине жёсткостью k.

- *Частота или линейная частота ν («ню») – это число колебаний в единицу времени.*

Измеряется в СИ в Герцах (Гц) или обратных секундах:

$$1c^{-1} = \frac{1}{c} = 1Гц$$

Связана с периодом T формулой: $\nu = \dfrac{1}{T}$

Основные характеристики колебательного движения

- *Циклическая или круговая частота ω («омега») – величина, которая связана с линейной частотой V формулой:*

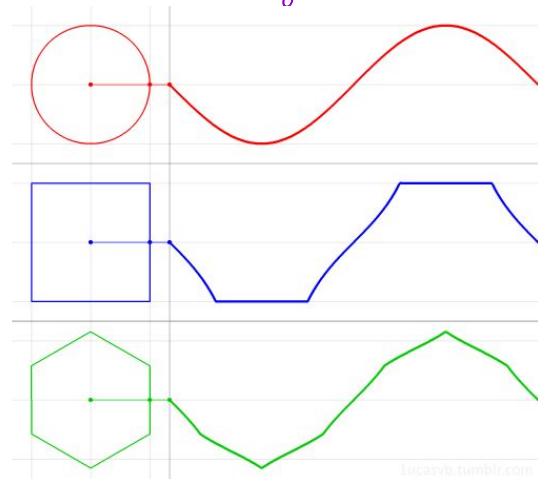
$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

Измеряется в СИ в радианах в секунду (рад/с), т.к. по определению -это скорость изменения угла φ от времени t.

Круговая частота ω связана с коэффициентом жёсткости k:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{m/k}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega^2 m$$

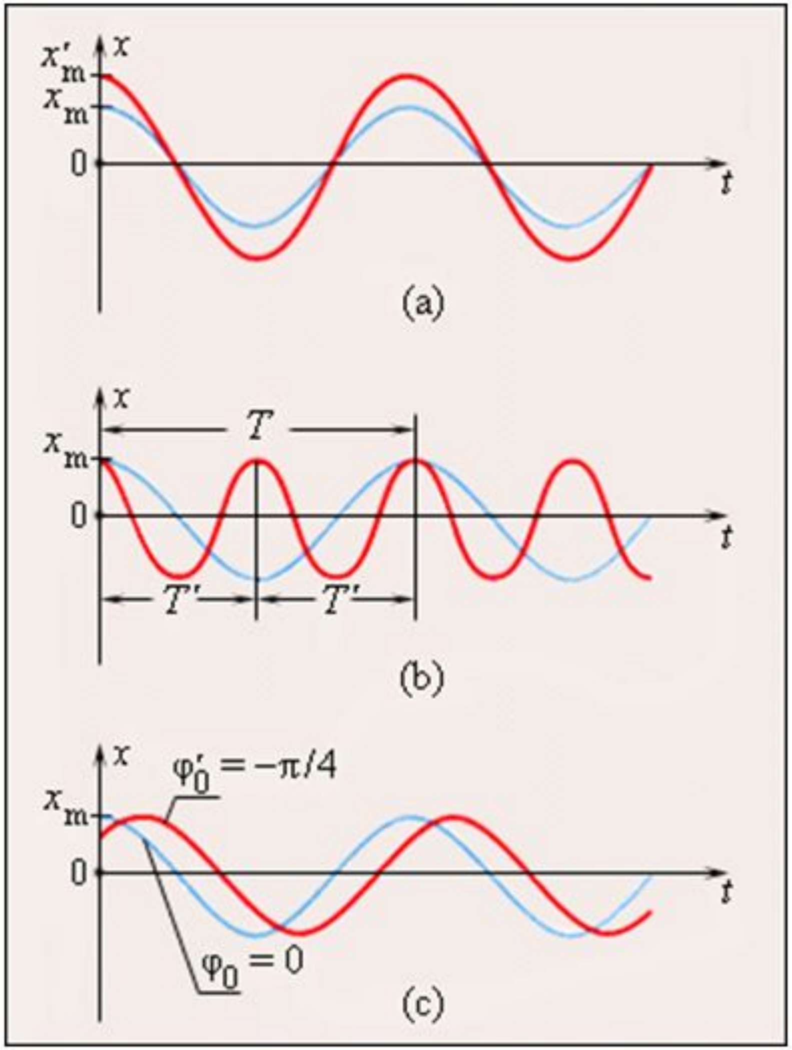
- *Фаза коле* $\varphi = \omega_0 \cdot t + \varphi_0$ *актеризует состояние колеблющейся материальной точки в любой момент вр* *где φ_0 - начальная фаза колебаний (фаза при t_0=0).*



Фаза по смыслу является углом отклонения от положения равновесия и измеряется в угловых градусах (внесистемная единица) и в СИ – в радианах (рад).

Амплитуда A_0 и начальная фаза φ_0 колебаний определяются начальными условиями движения (положением материальной точки в момент времени $t_0 = 0$).

Пример на изменение характеристик колебательного движения



Во всех трех случаях для **синих** кривых $\varphi_0 = 0$:

$$x = A_0 \cos(\omega t) = x_m \cos(\omega t)$$

a – красная кривая отличается от синей **только** бóльшей амплитудой ($x'_{max} > x_{max}$);

b – красная кривая отличается от синей **только** значением периода ($T' = T / 2$);

c – красная кривая отличается от синей **только** значением начальной фазы:

$$\varphi'_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Основные характеристики колебательного движения

$$\boxed{x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

- *Скорость движения материальной точки* $\mathbf{v}$.
  - *Измеряется в СИ в метрах в секунду (м/с).*
  - *Выражение для* $\mathbf{v}$ *найдится путем дифференцирования* x:
  - *Скорость максимальна, если:* $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 1$ *Тогда* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\max} = A_0\omega_0$

$$v = \frac{dx}{dt} = A_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

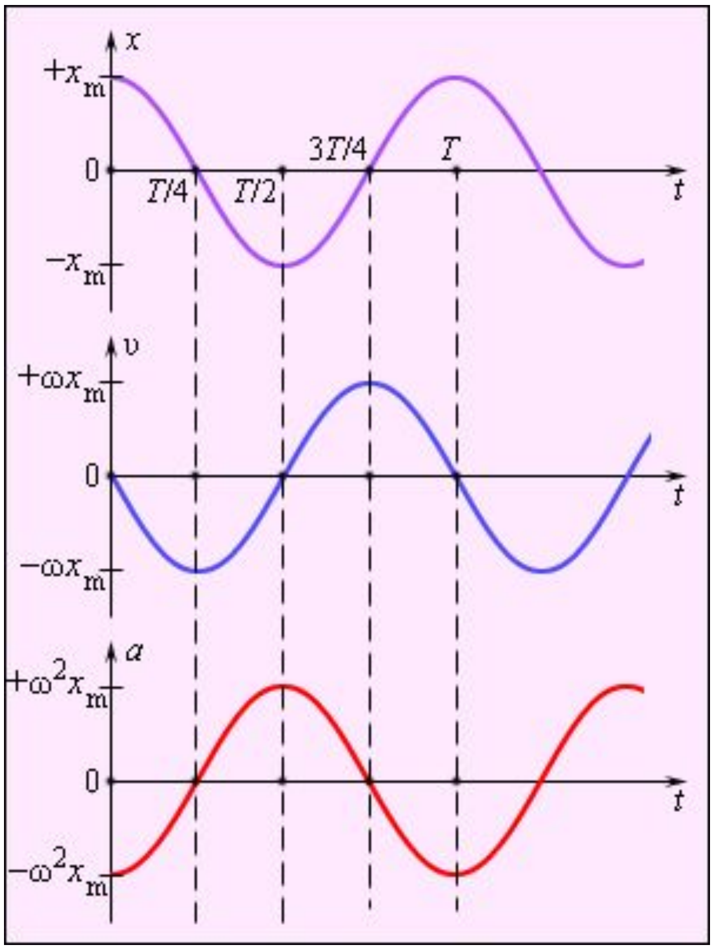
- *Ускорение колеблющейся материальной точки* a.
  - *Измеряется в СИ в метрах в секунду в квадрате (м/с²).*
  - *Выражение для* a *найдится путем дифференцирования* $\mathbf{v}$:
  - *Ускорение – это вторая производная по времени от смещения:*
  - *Ускорение максимально, если* $\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -1$ *Тогда*

$$a = \frac{dv}{dt} = -A_0\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = x''$$

$$a = a_{max} = A_0\omega_0^2$$

Графики колебательного движения



$$\boxed{x = A_0 \cos(\omega t) = x_m \cos(\omega t)}$$

График координаты x (t) тела, совершающего гармонические колебания

$$\boxed{\mathbf{x}_{max} = \mathbf{A}_0}$$

График скорости v(*t*) тела, совершающего гармонические колебания

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{max} = A_0 \omega_0$$

График ускорения *a*(*t*) тела, совершающего гармонические колебания

$$\omega = a_{max} = A_0 \quad {}_0^2$$

Энергия гармонического колебания

- *Полная энергия* гармонического колебания *E* определяется *суммой кинетической и потенциальной энергий*:

$$E = E_к + E_п = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

- *Подставляя в эту формулу*
  - *выражение для скорости* $\mathbf{v}$:

$$v = \frac{dx}{dt} = A_0\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

  - *выражение для смещения* $\mathbf{x}$:

$$x = A_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

  - *и, учитывая, что*

$$k = m\omega_0^2 \cdot$$

получаем:

$$E = \frac{1}{2}mA_0^2\omega_0^2[\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}mA_0^2\omega_0^2$$

так как:

$$\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = 1$$

ное тригонометрическое тождество)

ВАЖНО! *Из формулы:*

$$E = \frac{1}{2}mA_0^2\omega_0^2$$

следует, что энергия гармонического колебаний:

1) Прямо пропорциональна квадрату амплитуды A^2: чем больше "размах" колебаний, тем больше и их энергия.

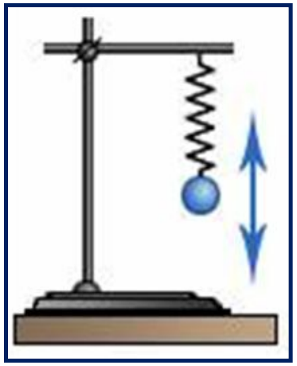
2) энергия прямо пропорциональна квадрату круговой частоты колебаний ω_0.

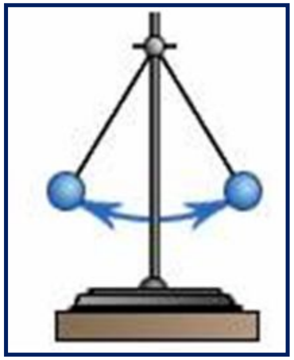
Маятники

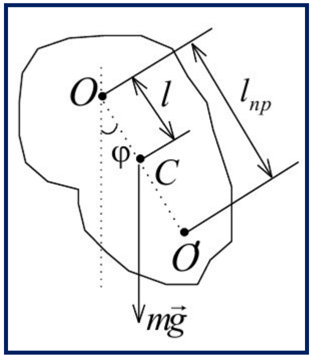
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Маятник – это тело массой m, , подвешенная на нити или пружине и совершающее гармонические колебания.

Пружинный маятник	Математический маятник	Физический маятник







Пружинный маятник – это материальная точка массой m, подвешенная на абсолютно упругой пружине жесткостью k и совершающая гармонические колебания под действием упругой силы.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити длиной l, на которой подвешена материальная точка массой m.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Физический маятник - это твердое тело массой m, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O, не совпадающую с центром масс C тела

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}} \quad \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

где величину $I/ml = l_{np}$ называют ***приведенной длиной*** физического маятника. Она **численно равна** длине такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

- На примере движения пружинного маятника – материальной точки массой *m*, закреплённой на **ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ** пружине жёсткостью *k* (*Рис.1*), рассмотрим различные виды колебаний в зависимости от сил, которые действуют вдоль оси *Ox* на данное тело массой *m*.

Гармонические колебания

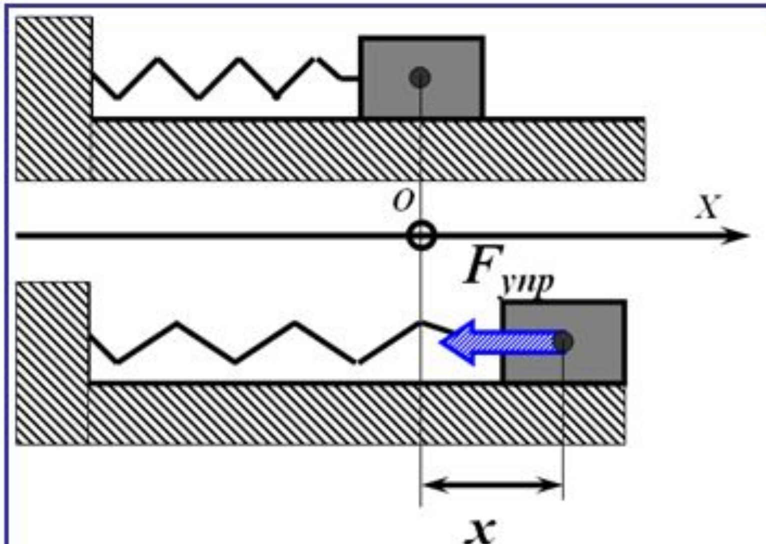
- *Гармонические колебания – колебания, при которых наблюдаемая величина изменяется во времени:*
  - *с постоянной частотой ν по закону синуса или косинуса и*
  - *постоянной амплитудой A_0.*

Рассмотрим случай действия на тело массой m только силы упругости $F_{упр}$

- *Если пружину оттянуть (на рисунке) или сжать (аналогично, но в другую сторону) на расстояние x от положения равновесия,*

  то возникает сила упругости $F_{упр}$, величина и направление которой определяется законом Гука:

$$F_{упр} = -k \cdot x$$



Силы, действующие на пружинный маятник при гармонических колебаниях.

Знак “минус” показывает, что сила упругости всегда направлена в сторону, противоположную направлению смещения x, т.е. к положению равновесия.

Гармонические колебания

Для данного случая второй закон Ньютона в проекции на ось Ох: $ma_x = F_{упр\,x} = -k \cdot x$

Вспомним, что ускорение – это вторая производная по времени от смещения x:

Получаем уравнение: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x''$

Разделим каждое слагаемое на m и вспомним, что $mx'' = -k \cdot x \Leftrightarrow mx'' + k \cdot x = 0$

где ω_0 – собственная круговая частота гармонического колебания. $k = \omega_0^2 m$

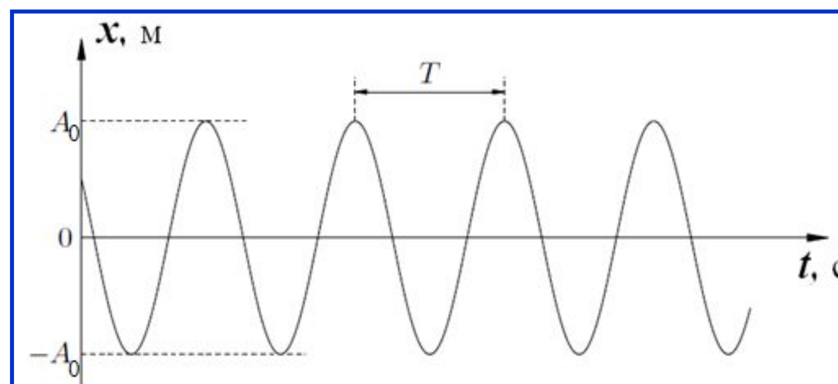
Получилось дифференциальное уравнение второй степени: $x'' + \omega^2 x = 0$

решением которого является:

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

График гармонического колебания – синусоида, по которой можно определить смещение x колеблющейся точки в любой момент времени t.

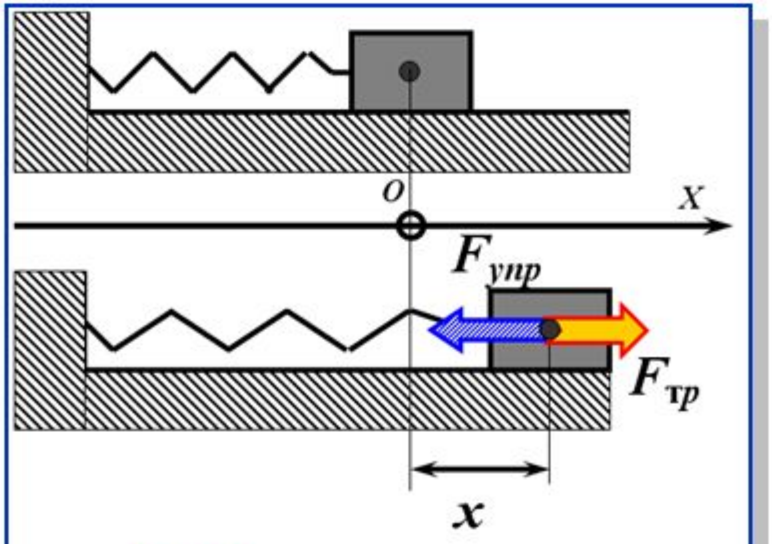
Тут φ_0 не равно 0



Затухающие колебания

- *Затухающие колебания – колебания, при которых наблюдаемая величина изменяется во времени с постоянной (!) частотой ν (круговой частотой ω) по закону синуса или косинуса, но амплитуда колебания A всё время уменьшается.*

- *В данном случае на тело массой m вдоль оси Ox действуют уже две силы:*
  - *сила упругости $F_{упр}$*
  - *сила трения $F_{тр}$.*



Силы, действующие на пружинный маятник, при **затухающих** колебаниях.

□ *Сила трения $F_{тр}$ пропорциональна скорости колебания **v** и направлена в сторону, противоположную скорости:*

$$F_{тр} = -r\mathbf{v} = -r\frac{dx}{dt} = -rx'$$

□ *Для данного случая второй закон Ньютона в проекции на ось Ox:*

$$ma_x = F_{упр\,x} + F_{тр\,x} = -kx - rx'$$

Затухающие колебания

Мы вывели, что для того случая второй закон Ньютона в проекции на ось Ox: $ma_x = F_{упр\,x} + F_{тр\,x} = -kx - rx'$

- *Учтём, что:* $k = \omega_0^2 m$
- *Тогда при сокращении каждого слагаемого на m и переносе всех членов влево от знака равенства, получим:*

$$x'' + \frac{r}{m}x' + \omega_0^2 x = 0$$

- *Проведем замену:* $\frac{r}{m} = 2\beta$

где β называется коэффициентом затухания - это основная характеристика затухающего колебания, измеряется в обратных секундах (с$^{-1}$),

- *Получаем конечный вид дифференциального уравнения второй степени:*

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$$

- *Решением его является формул* $x = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0) = A(t)\sin(\omega t + \varphi_0)$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ *– собственная круговая частота затухающего колебания.*

Характеристики затухающего колебания

График затухающего колебания – синусоида, амплитуда которой *A(t) уменьшается по экспоненте:*

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Коэффициент затухания β характеризует **степень затухания** колебаний.

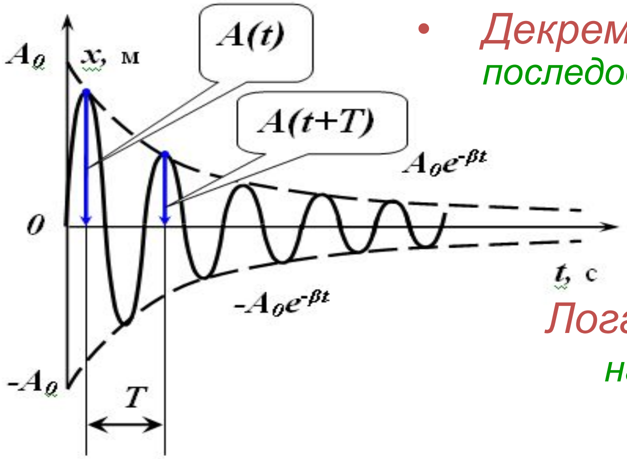


График затухающего колебания.

- *Декремент затухания* δ *(«дельта») – отношение значений двух последовательных амплитуд, разделённых периодом колебания:*

$$\delta = \Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

Логарифмический декремент затухания λ *(«лямбда») – натуральный логарифм декремента затухания:*

$$\boxed{\lambda = \ln\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)}}$$

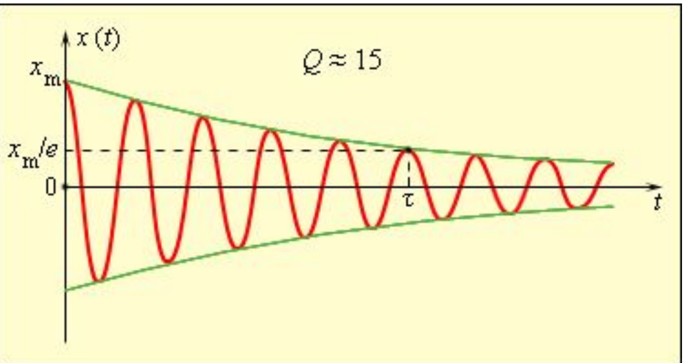
Логарифмический декремент затухания применяется чаще, т.к. он связан с периодом T *и коэффициентом затухания* β*:*

$$\boxed{\lambda = \ln\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T} \Rightarrow \lambda = \beta T$$

- *Обе характеристики – безразмерные величины.*

Характеристики затухающего колебания

Время релаксации τ *(«тау»)* – это время, за которое амплитуда уменьшается в *e* раз:



$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e \Rightarrow \tau = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e^1 \Rightarrow \beta\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}$$

Коэффициент затухания β *(«бета»)* – величина, обратная промежутку времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз:

$$\beta = \frac{1}{\tau}$$

Измеряется в СИ в ***Герцах*** *(Гц) или* ***обратных секундах*** *(с$^{-1}$)*

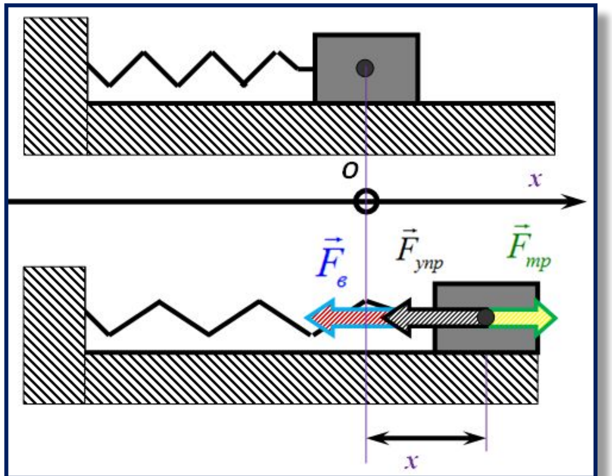
За время релаксации τ система успевает сделать N_e колебаний:

Значит, **логарифмический декремент затухания** λ обратно пропорционален по величине числу колебаний, за которые амплитуда колебаний уменьшается в е раз:

$$\lambda = \frac{1}{N_e} \qquad N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau\beta}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Добротность Q системы - величина, характеризующая уменьшение полной энергии **ΔE** системы по формуле: $\Delta E = -2\pi E/Q$, где знак минус показывает, что энергия уменьшается.
Бóльшим значениям Q соответствует **слабое затухание колебаний**. **Добротность** пропорциональна числу колебаний за время релаксации N_e и обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания λ:

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e}$$



Вынужденные колебания

Вынужденные колебания – колебания, при которых наблюдаемая величина изменяется во времени:

– *с постоянной частотой* ν *(круговой частотой* ω*), задаваемой внешней вынуждающей силой* $F_в$.

В данном случае на тело массой m вдоль оси Ox действуют три силы:

- *сила упругости* $F_{упр}$
- *сила трения* $F_{тр}$.
- *вынуждающая сила* $F_в$*, которая действует периодически с круговой частотой*

$$F_в = F_0 \sin\omega_в t$$

- *Для данного случая второй закон Ньютона в проекции на ось Ox:*

$$ma_x = F_{упр\,x} + F_{тр\,x} + F_в$$

- *Учтём, что:* $k = \omega_0^2 m$ и $\frac{r}{m} = 2\beta$

- *При сокращении каждого слагаемого на m и переносе всех членов влево от знака равенства, получим:*

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega_в t$$

Вынужденные колебания

- *Проведём замену:* $\dfrac{F_0}{m} = f_0$ удельная вынуждающая сила
- *Получаем конечный вид дифференциального уравнения второй степени:*

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f_0 \sin\omega_в t$$

- *Решение такого уравнения состоит из двух частей-решений: $x=x_1+x_2$:*
  - *Решение x_1 описывает неустановившейся режим колебаний, когда их амплитуда увеличивается во времени.*
  - *Решение x_2 описывает установившийся режим колебаний.*
- *В установившемся режиме вынужденных колебаний смещение x_2 подчиняется гармоническому закону*

  и происходит с частотой $\omega_в$.

$$x = A\sin(\omega_в t + \varphi_0)$$

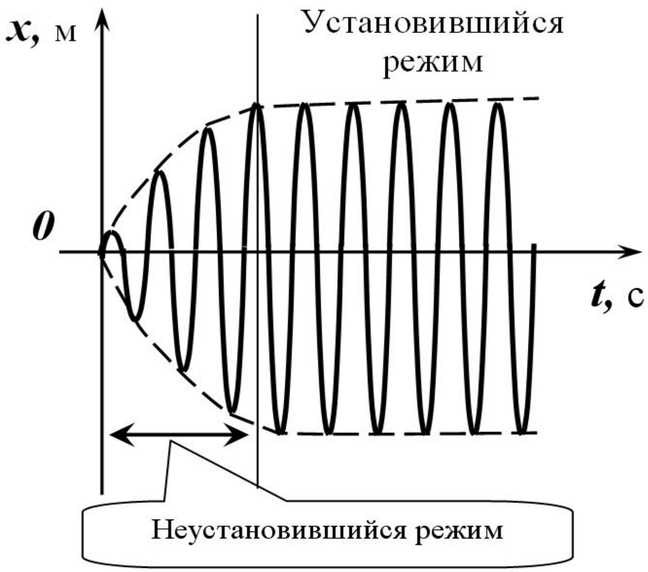


График вынужденного колебания.

Резонанс

- *Амплитуда* ***А*** *вынужденных колебаний зависит от многих разобранных выше параметров:*
  - *частоты собственных колебаний ω_0,*
  - *коэффициента затухания β,*
  - *силы f_0,*
  - *частоты вынуждающей силы $\omega_в$.*

- *Амплитуда* ***А*** *будет максимальна, если частота $\omega_в$ действия вынуждающей силы определяется формулой:*

$$\omega_{\text{в}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

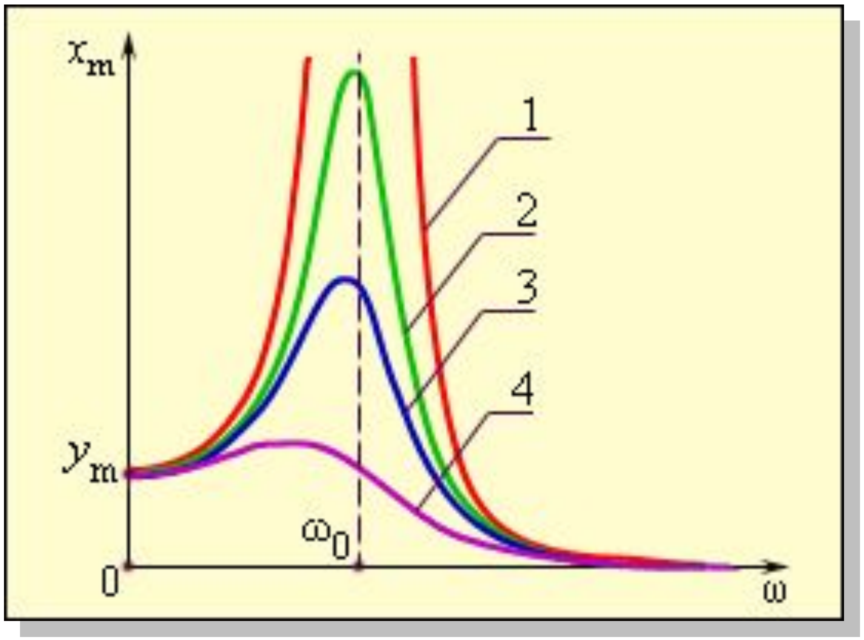
- *При этом наблюдается явление резонанса.*

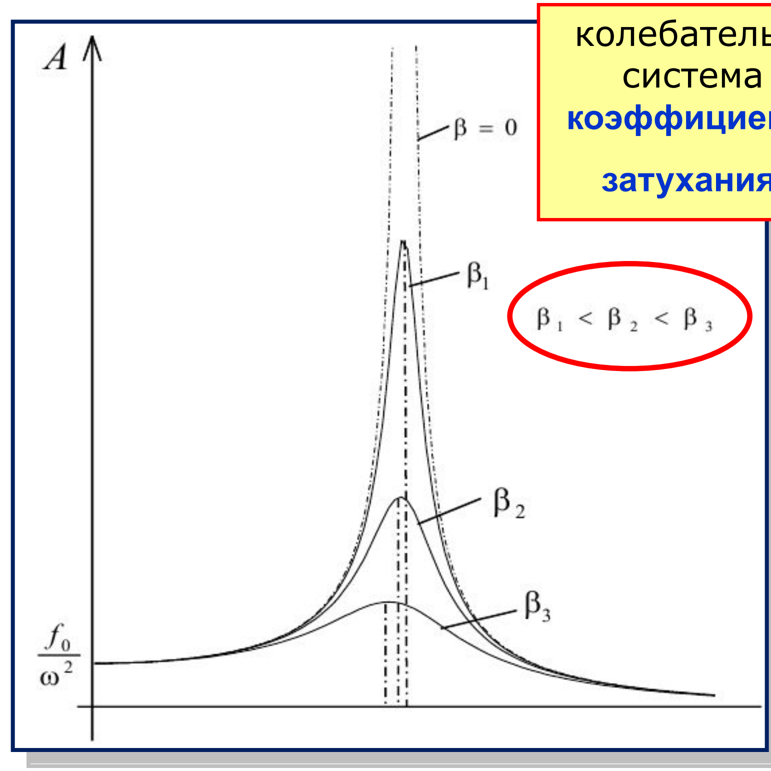
- *Резонанс – это резкое возрастание амплитуды А вынужденных колебаний при совпадении частоты действия вынуждающей силы $\omega_в$ с частотой системы ω, т.е.:*

$$\omega_{\text{в}} = \omega \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Если бы затухание в системе отсутствовало ($\beta = 0$), то резонанс наступал бы при условии: $\omega_0 = \omega_в$, где ω_0 – собственная частота гармонического колебания.
При этом амплитуда достигала бы бесконечно большого значения.

График резонанса





колебательная система **с коэффициентом затухания β**

Резонансные кривые при различных уровнях затухания:

1 – колебательная система **без трения**:
при резонансе **амплитуда x_{max}** вынужденных колебаний **неограниченно возрастает**;
2, 3, 4 – реальные резонансные кривые для колебательных систем с различной добротностью: $Q_2 > Q_3 > Q_4$.
На низких частотах ($\omega << \omega_0$) $x_{max} \approx f_{max}$. На высоких частотах ($\omega >> \omega_0$) $x_{max} \to 0$

Цифровая обработка сигналов

В настоящее время *методы цифровой обработки сигналов* (Digital Signal Processing – DSP) находят все более широкое применение, вытесняя постепенно методы, основанные на аналоговой обработке.

Пусть имеется непрерывный сигнал x(t), заданный на интервале [0;∞].

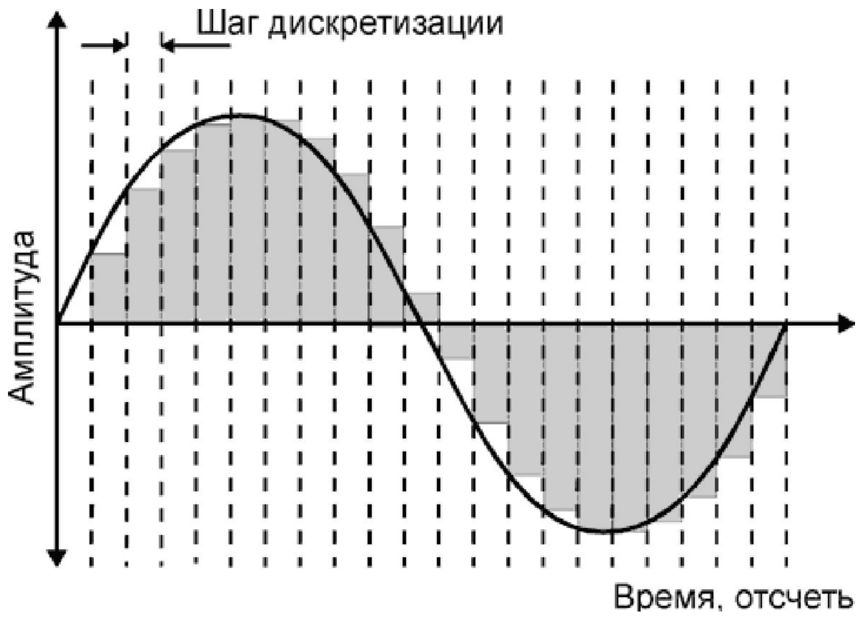
При переходе к оцифровке происходит следующая операция. Выбирается *шаг дискретизации T*, и вместо исходного сигнала получается последовательность: $y[n] = x(n \cdot T),\ n = 0,\ 1,\ \ldots.$

В процессе оцифровки аналоговых сигналов имеется два важнейших параметра, определяющих качество цифрового сигнала:

- *Частота дискретизации*
- *Разрядность оцифровки*

Дискретизация предполагает получение мгновенных значений (выборок) аналогового сигнала с определенным временным шагом.

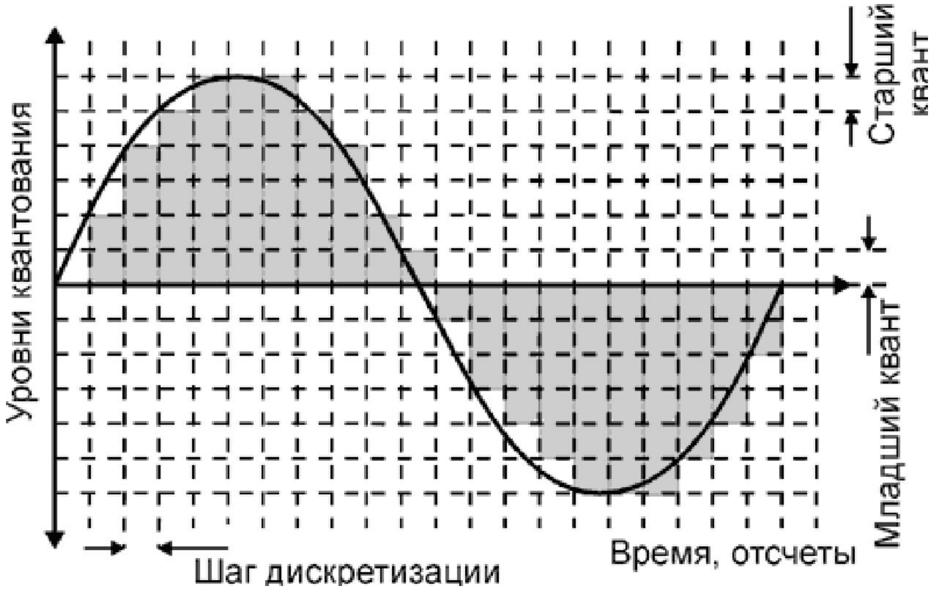
Цифровая обработка сигналов



Частота дискретизации (или частота семплирования) – частота взятия отсчетов непрерывного во времени сигнала при его дискретизации. Измеряется в Герцах.

Чем выше частота дискретизации, тем более широкий спектр сигнала может быть представлен в дискретном сигнале. ***Для того чтобы однозначно восстановить исходный сигнал, частота дискретизации должна более чем в два раза превышать наибольшую частоту в спектре сигнала!***

Цифровая обработка сигналов



Квантование (Quantization) – разбиение диапазона значений непрерывного сигнала на конечное число интервалов.

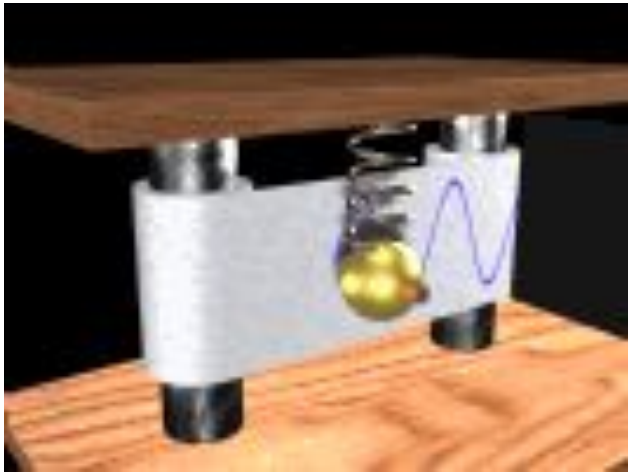
При оцифровке сигнала *уровень квантования* называют также *глубиной дискретизации* или *битностью*. Глубина дискретизации измеряется в битах и обозначает количество бит,
выражающих амплитуду сигнала.

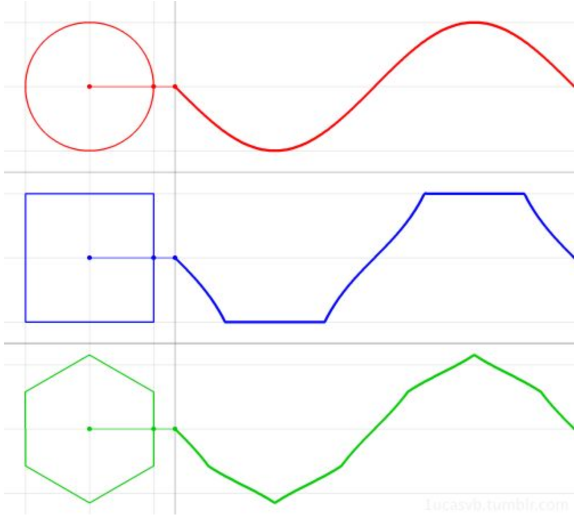
Чем больше глубина дискретизации, тем точнее цифровой сигнал, полученный аналого-цифровым преобразователем (АЦП), соответствует аналоговому.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ
КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Механические колебания

Спасибо за внимание!





Зависимость смещения от времени при разных колебаниях

Составители:
Директор по маркетингу и сбыту, к.т.н. Романов Р.А.
Руководитель учебного центра «БАЛТЕХ» Севастьянов В.В.

ООО «Балтех»

Россия,
Санкт-Петербург, 194044,
ул. Чугунная, 40

Тел/Факс: (812) 335-00-85

E-mail: info@baltech.ru
Internet: www.baltech.ru