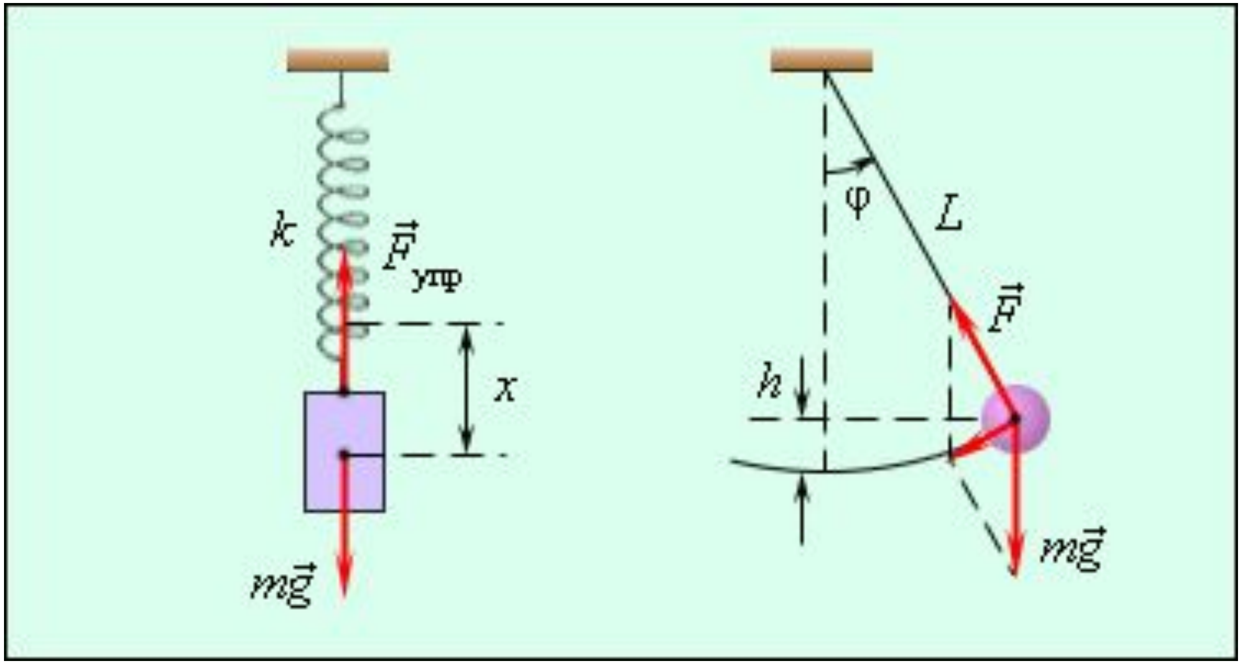
Механические колебания

- Периодическим называется повторяющееся движение, у которого каждый цикл в точности воспроизводит любой другой цикл.
- Продолжительность одного цикла называется периодом.
- Период равномерного вращения равен продолжительности одного оборота.
- Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.
- В зависимости от природы повторяющегося процесса различают колебания:
- Механические,
- Электромагнитные,
- Электромеханические и др.

- В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают:
- Свободные (собственные) колебания,
- Вынужденные колебания,
- Автоколебания,
- Параметрические колебания.
- Свободными называются такие колебания, которые совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий.

Свободные колебания

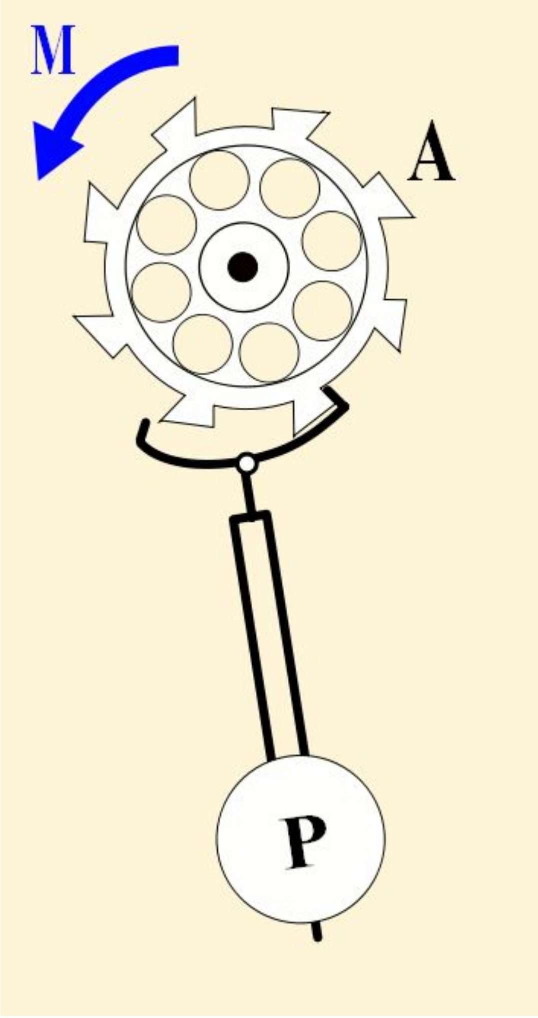


- Свободными называются такие колебания, которые совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий.

Вынужденные колебания

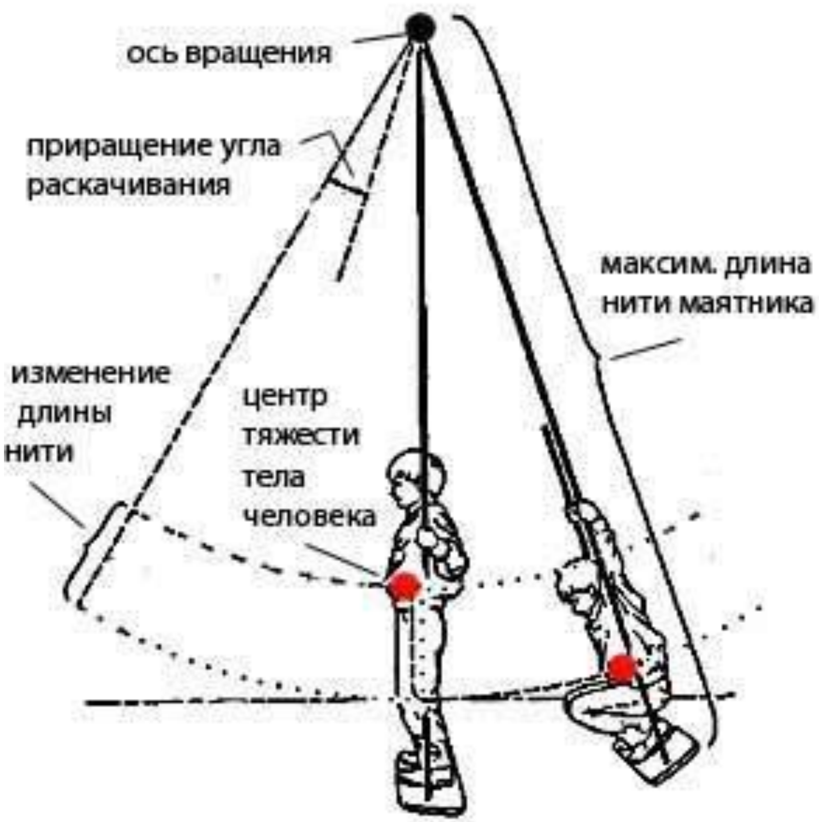
- Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодической изменяющейся силы.

Автоколебания



- Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако, моменты времени, когда осуществляются эти воздействия задаются самой колеблющейся системой.

Параметрические колебания



- При параметрических колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы.

Гармонические колебания

- Гармонические колебания – это колебания, при которых колеблющаяся величина (например, отклонение маятника) изменяется по закону синуса или косинуса.

$$q = q_m \cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha_0)$$

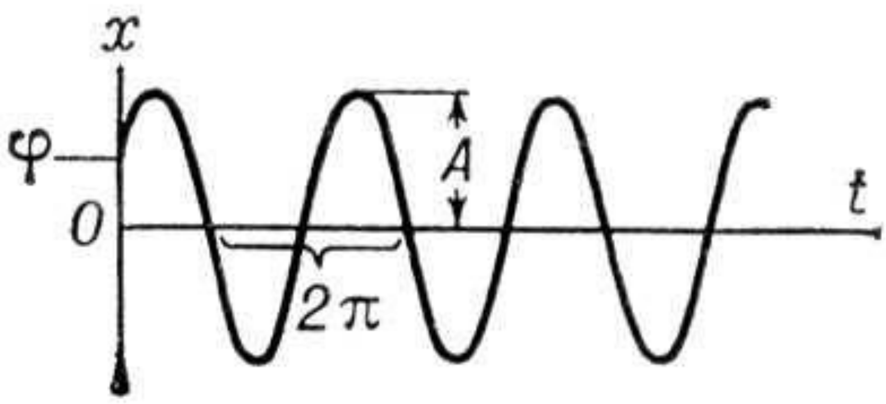
$$u = U_m \cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$e = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$\mathcal{E}_m = B\omega S$$

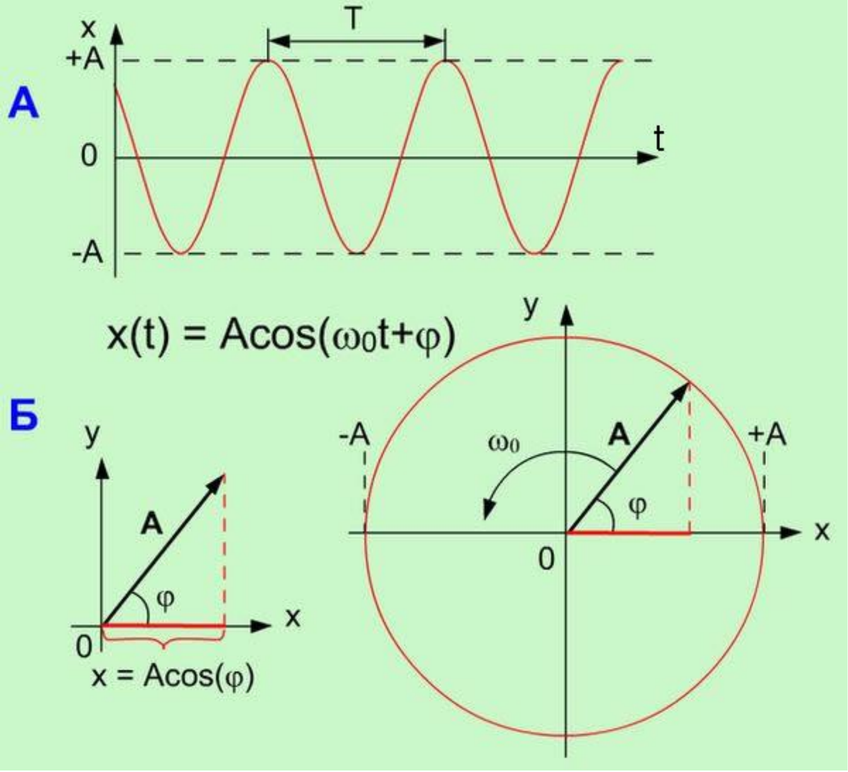
$$U_m = \frac{q_m}{C}$$

Гармонические колебания



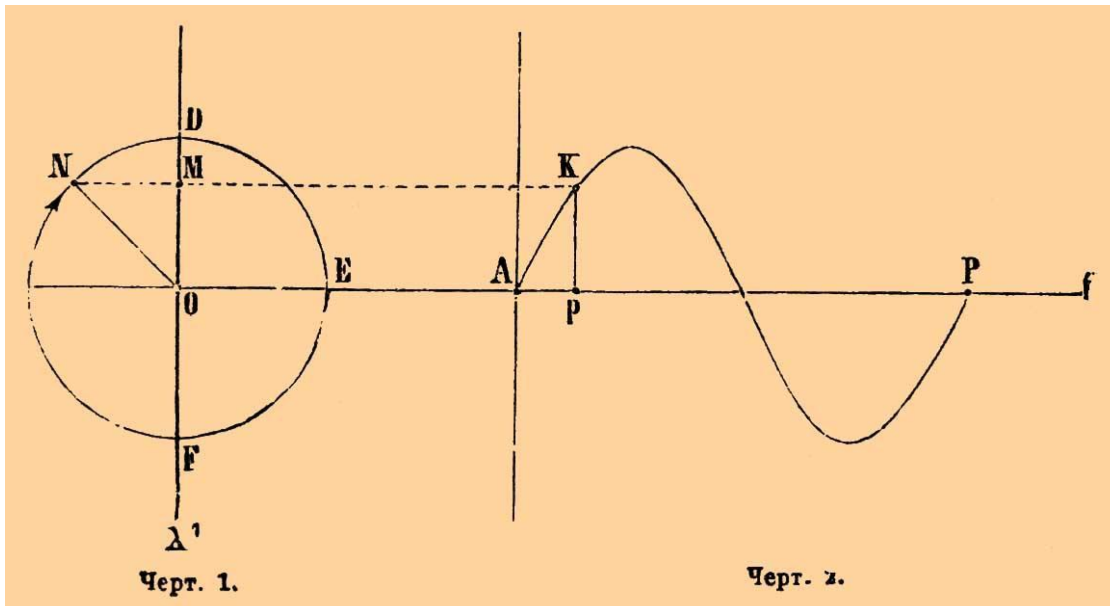
- T=2π – период,
- A –амплитуда колебаний (максимальное значение колеблющейся величины),
- ϕ – начальная фаза колебаний (рад),
- t – время колебаний (с),
- X – колеблющаяся величина (удаление от положения равновесия в любой момент времени).

Гармонические колебания



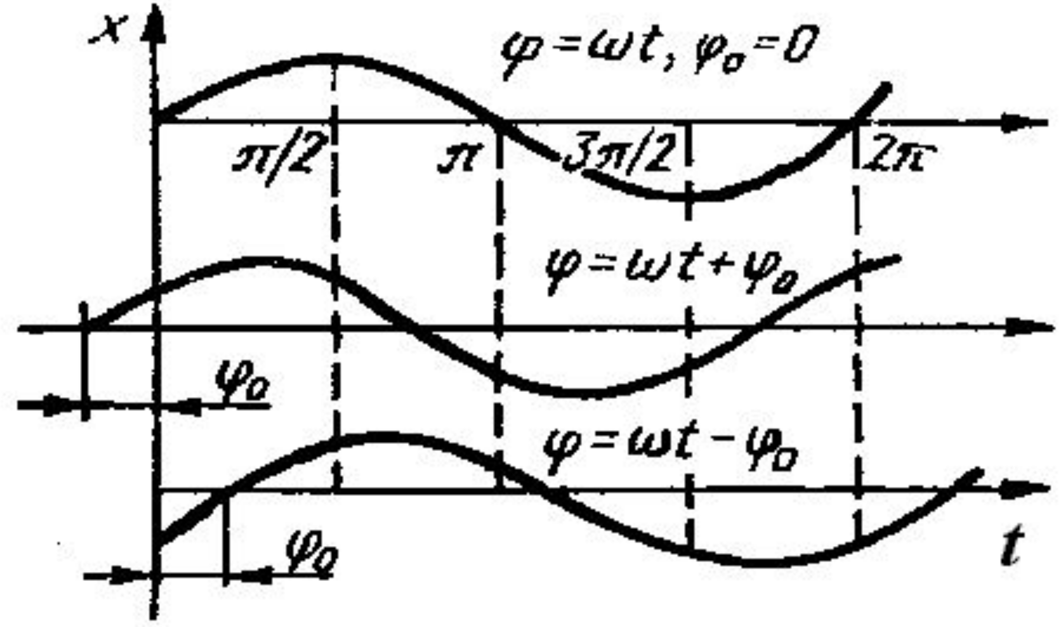
- ω_0- круговая (циклическая) частота,
- $(\omega_0 t + \phi)$ – фаза колебаний в момент времени t (рад),

Гармонические колебания



- Представим себе, что по кругу радиуса *a* (на черт. 1 изображен круг, имеющий центр в *O*) движется точка *N* с постоянной скоростью в сторону, указанную стрелкой, причем полный оборот по окружности она совершает в течение времени *T*.

Гармонические колебания



$$x = x_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

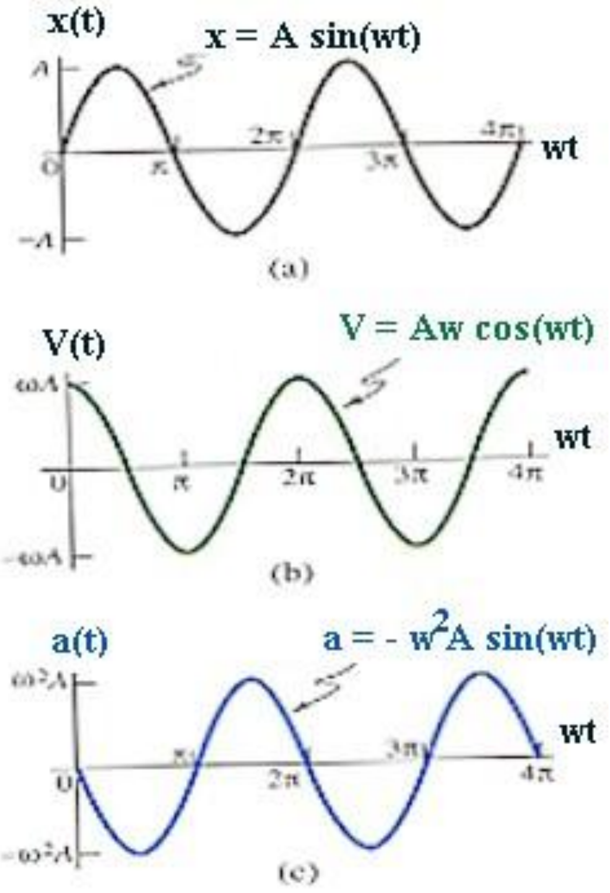
Уравнение гармонического осциллятора

- Гармонические колебания описываются законом

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- A – амплитуда колебаний,
- $\omega_0 t + \varphi_\circ$ - фаза колебаний,
- $\omega_\circ$- собственная частота колебаний (рад/с).
- Для характеристики колебаний вводят понятие периода T
- $T=\frac{2\pi}{\omega_\circ}$ - время одного колебания и
- частоты $\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega_\circ}{2\pi}$, определяющей число колебаний в единицу времени (Гц).

Уравнение гармонического осциллятора



Уравнение гармонического осциллятора

- Дифференцируя дважды по времени уравнение

X(t)= $A\cos(\omega_\circ t+\varphi_\circ)$ получаем

$\dot{X}$ =V= - $A\omega_\circ\sin(\omega_\circ+\varphi_\circ) = A\omega_\circ\cos(\omega_\circ t+\varphi_\circ+\frac{\pi}{2})$,

$\ddot{X}$ =a = $-A\omega^2\cos(\omega_\circ t+\varphi_\circ) = A\cos(\omega_\circ t+\varphi_\circ+\pi) = -\omega_\circ{}^2 X$

Амплитуды скорости и ускорения равны соответственно

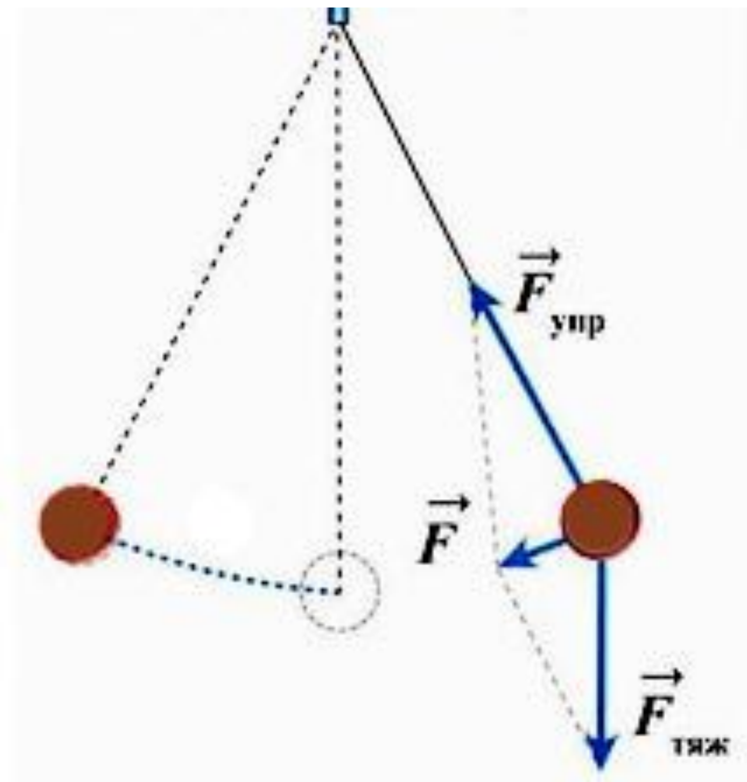
$A\omega_\circ$ и $A\omega_\circ{}^2$,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_0{}^2x(t)=0$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка и у него есть два независимых решения: $A\cos(\omega_\circ t+\varphi_\circ)$ и $A\sin(\omega_\circ t+\varphi_\circ)$.

Энергия механической системы при гармонических колебаниях

- Сила F=ma, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m
- $F=-m\omega_o^2x$
- Сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (сторону равновесия).



Энергия механической системы при гармонических колебаниях

- Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (141.3)$$

или

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)].$$

Энергия механической системы при гармонических колебаниях

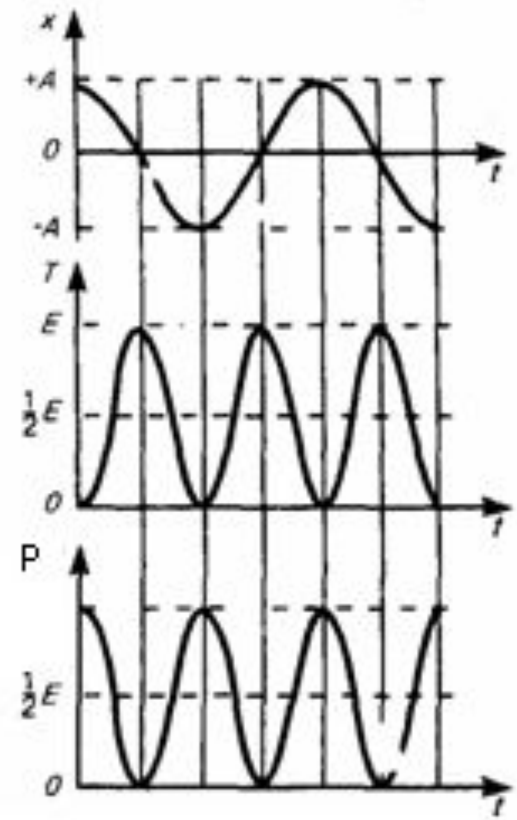
- Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Pi == \frac{mA^2\omega_0^2}{2}[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

Энергия механической системы при гармонических колебаниях

- Полная энергия
- $E = T + П = \frac{mA^2}{2} \omega_o{}^2$
- Полная энергия механической системы при гармонических колебаниях сохраняется
- E=const
- Кинетическая и потенциальная энергии – периодические функции с периодом, равным половине периода колебаний.



Превращение механической энергии при гармонических колебаниях

Кинетическая и потенциальная энергии колеблются в противофазе: когда кинетическая энергия достигает максимума, значение потенциальной энергии минимально.

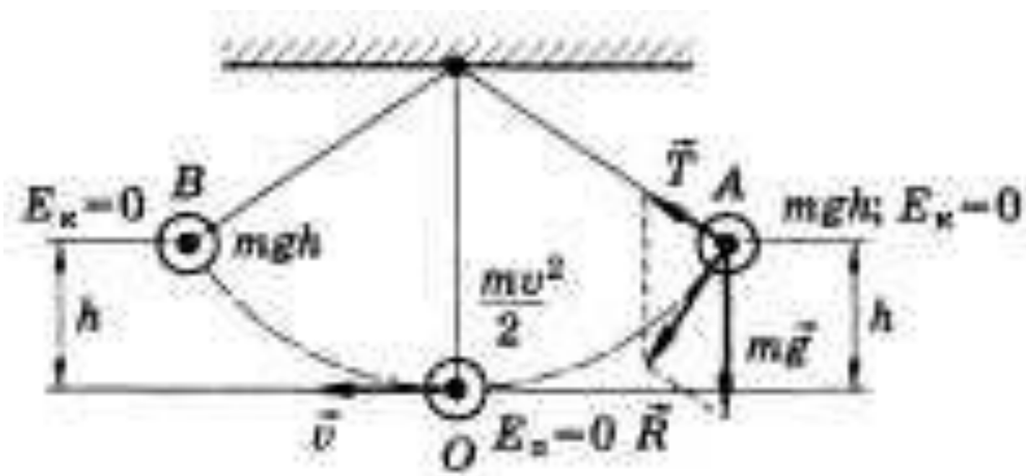


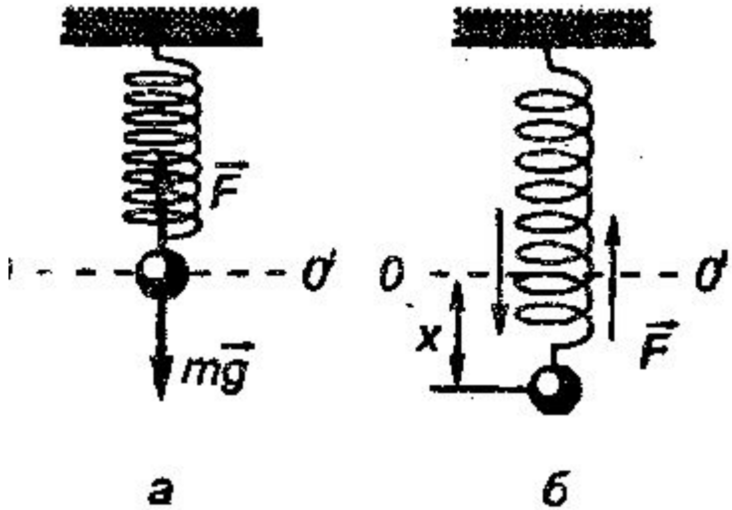
Рис. 10

Гармонический осциллятор

- Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида

- $\ddot{s} + \omega_o{}^2 s=0$ (x=s)
- Разница между физическими системами заключена в определении величины ω_o и в физическом смысле переменной s: это может быть координата (смещение), угол, заряд, ток и т.д.
- Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники, колебательный контур.

Пружинный маятник



- Пружинный маятник – это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы
- $F=-kx$, где k – коэффициент жесткости.

Пружинный маятник

- Запишем уравнение 2-го закона Ньютона $m\ddot{x} = -kx$

  или $$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Из уравнения гармонического осциллятора вытекает, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону x=Acos(ω_ot+φ) с циклической частотой $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- и периодом $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Потенциальная энергия пружинного маятника

- $П=\frac{kx^2}{2}$

Физический маятник

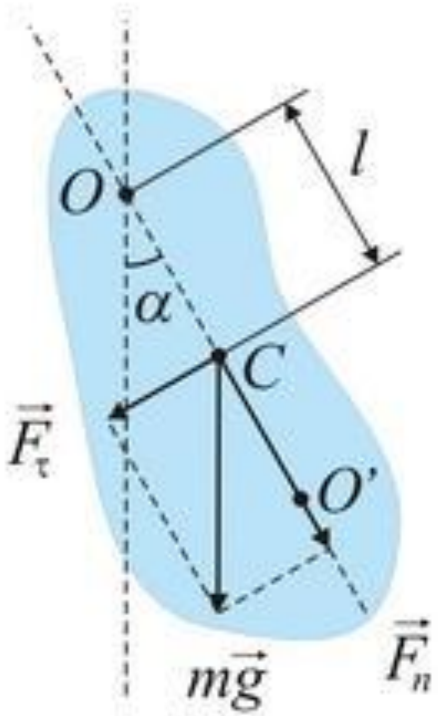
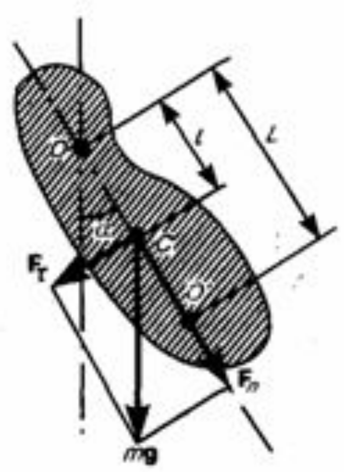


Рис.1

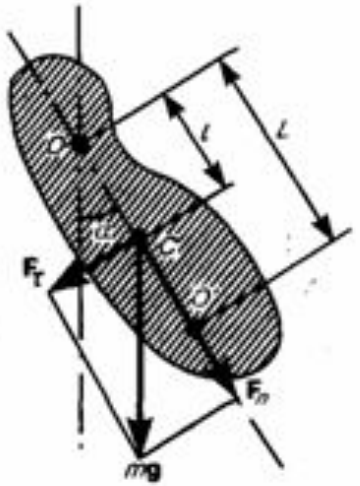
-это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной неподвижной оси подвеса, не проходящей через центр масс C тела.

Физический маятник



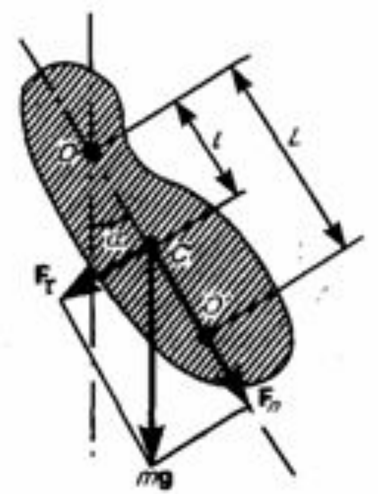
- Отклоним маятник из положения равновесия на угол α.
- Запишем уравнение динамики вращательного движения твердого тела
- M= I ε = I $\ddot{\alpha} = F_\tau\,\ell$ = - mg$\ell\sin\alpha$ ≈
- ≈ - mg$\ell\alpha$, где I –момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку О;
- М – момент возвращающей силы;
- ℓ - расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника;

Физический маятник



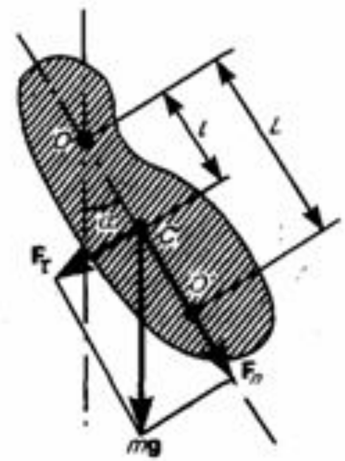
- F_τ=-mgsin α ≈ mgα – возвращающая сила.
- $I\ddot{\alpha} + mg\ell = 0$
- $\ddot{\alpha} + \frac{mg\ell}{I}\alpha = 0$
- $\omega_\circ = \sqrt[2]{\frac{mg\ell}{I}}$
- $\ddot{\alpha} + \omega_\circ^2\alpha = 0$
- Решение этого уравнения
- $\alpha = \alpha_\circ \cos(\omega_\circ t + \varphi)$

Физический маятник



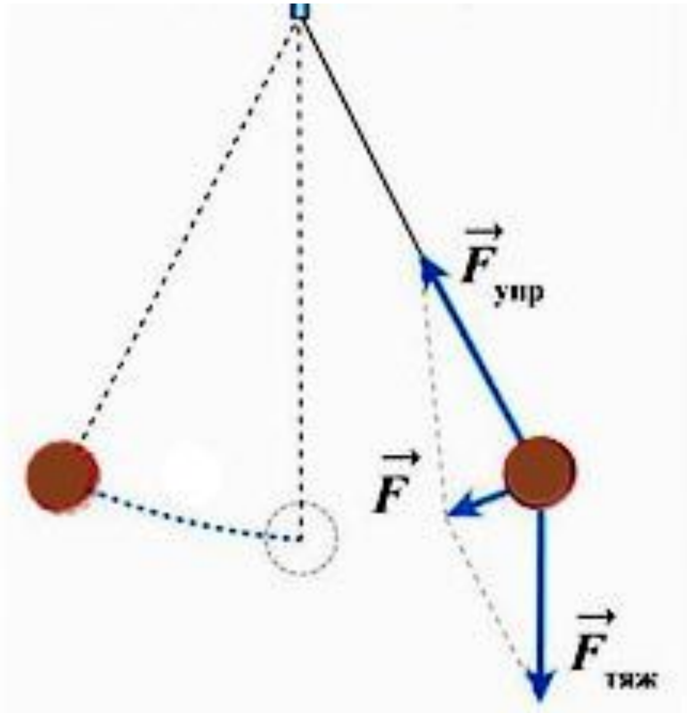
- При малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega_\circ$ и периодом
- $T = \dfrac{2\pi}{\omega_\circ} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, где
- $L = \dfrac{I}{m\ell}$ - приведенная длина физического маятника.

Физический маятник



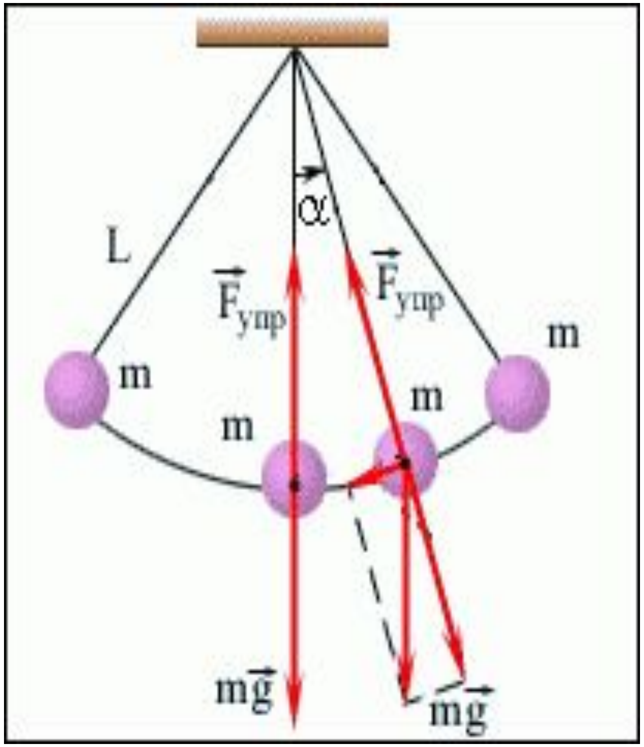
- Точка O′ - центр качаний физического маятника.
- По теореме Штейнера
- $L = \frac{I}{m\ell} = \frac{I_C + m\,\ell^2}{m\ell} = \ell + \frac{I_C}{m\ell} > \ell$
- OO′ всегда больше OC.
- Точка подвеса O и центр качаний обладают свойством взаимозаменяемости.

Математический маятник



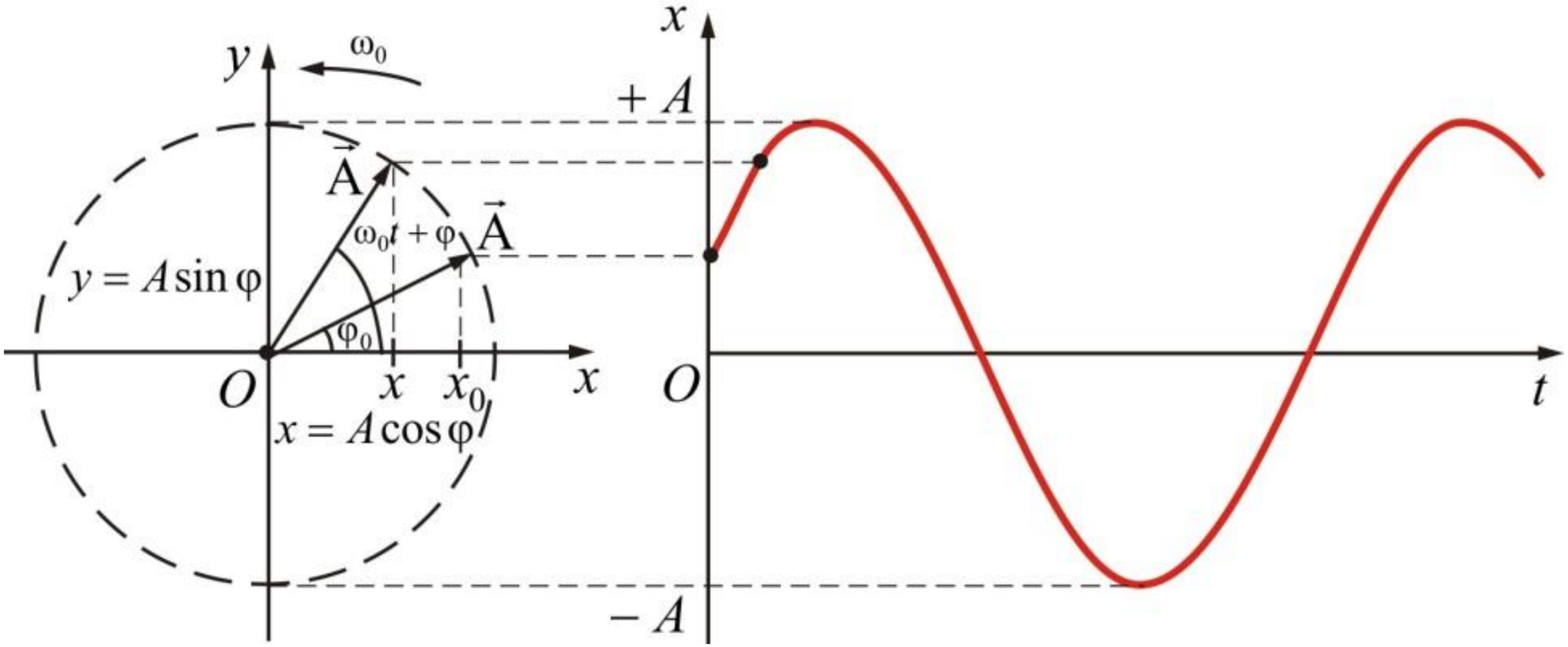
- \- это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющейся под действием силы тяжести.
- Момент инерции математического маятника
- $I = m\ell^2$, ℓ - длина маятника.

Математический маятник



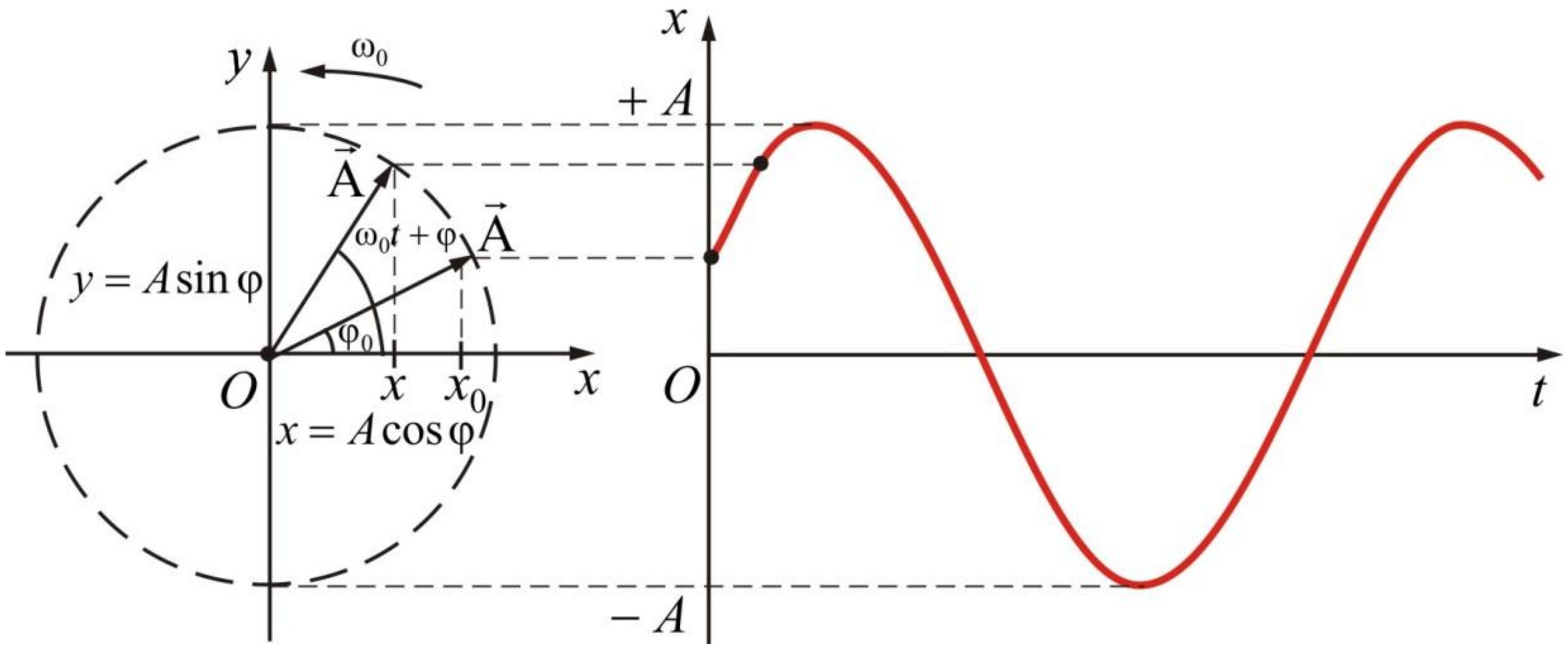
- Период малых колебаний математического маятника
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
- Если приведенная длина L физического маятника равна длине ℓ математического маятника, то их периоды колебаний одинаковы.

Представление гармонических колебаний методом векторных диаграмм



- Гармонические колебания можно изобразить графически с помощью вращающегося вектора амплитуды А на плоскости.
- Вектор А равномерно вращается вокруг точки О с угловой скоростью, равной циклической частоте ω_0.

Представление гармонических колебаний методом векторных диаграмм



- Проекция точки А на ось ОХ: Х = $A\cos\varphi = A\cos(\omega_\circ t + \varphi_\circ)$,
- Проекция точки А на ось ОY: Y = $A\sin\varphi = A\sin(\omega_\circ t + \varphi_\circ)$,
- $\varphi = (\omega_\circ t + \varphi_\circ)$ - угол, равный фазе колебаний в данный момент времени.

Сложение гармонических колебаний

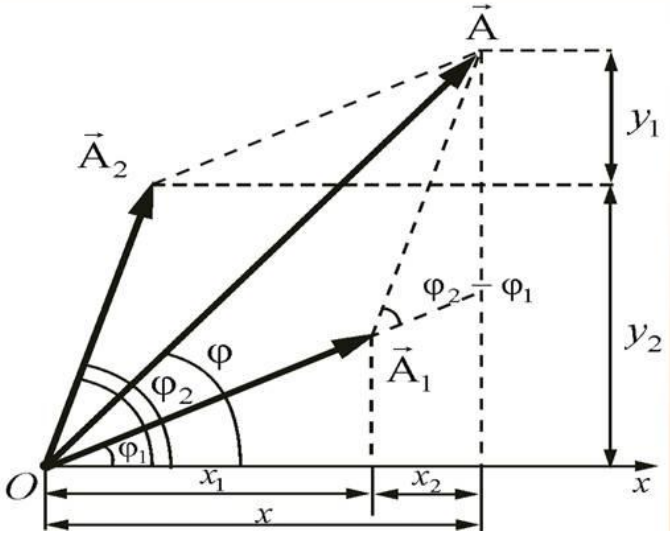
- Под сложением колебаний понимают нахождение закона результирующих колебаний, когда эта система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах.
- Различают два предельных случая: сложение колебаний одинакового направления и сложение взаимно перпендикулярных колебаний.
- Например, груз подвешен на пружине к потолку рессорного вагона. Груз будет совершать колебания относительно точки подвеса, которая в свою очередь совершает колебания на рессорах вагона. Т.о. груз будет совершать движение, складывающееся из двух колебаний одного направления.

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.

Пусть *точка* одновременно участвует *в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.*

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (2.2.1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$



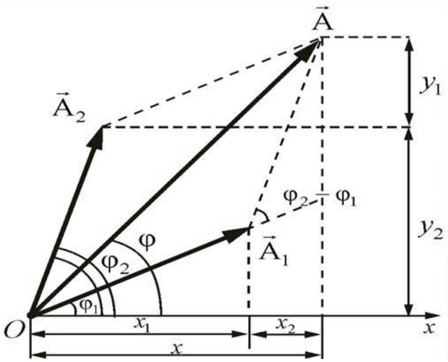
Такие два колебания называются ***когерентными****,*
их разность фаз не зависит от времени:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$$

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.

Пусть *точка* одновременно участвует *в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.*

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \qquad (2.2.1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$



*Такие два колебания называются **когерентными**, их разность фаз не зависит от времени:*

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathrm{const}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1); \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.

- Проанализируем выражение для амплитуды результирующего колебания

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1); \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

- в зависимости от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$:
- 1) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ (m=0, 1, 2, ...), тогда $A=A_1+A_2$, т. е. амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний; $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$;
- 2) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$ (m=0, 1, 2, ...), тогда $A=|A_1-A_2|$, т. е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний; $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$.

Биения

- Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами называются биениями (амплитуды этого колебания, то увеличиваются, то уменьшаются).
- A – амплитуды складываемых колебаний,
- ω и $(\omega+\Delta\omega)$ – частоты складываемых колебаний, причем $\Delta\omega \ll \omega$,
- $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ – начальные фазы колебаний одинаковы и =0,

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega t, \\ x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)\, t. \end{cases}$$

Биения

$$x = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t.$$

- результирующее колебание при условии Δω/2<<ω

$$A_б = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|.$$

- амплитуда биения

$$\omega_б = \Delta\omega.$$

- частота биений

$$T_б = 2\pi/\Delta\omega.$$

- период биений

Биения

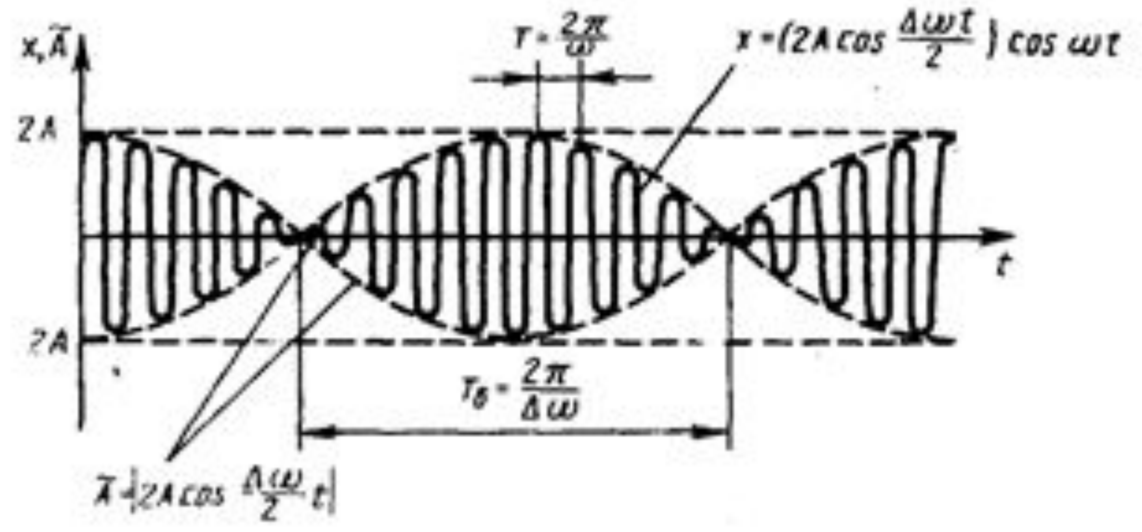


Рис. 204

- Сплошные линии – график результирующего колебания,
- Огибающие их (пунктирные) – график медленно изменяющейся амплитуды.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t, \\ y = B\cos(\omega t + \alpha), \end{cases}$$

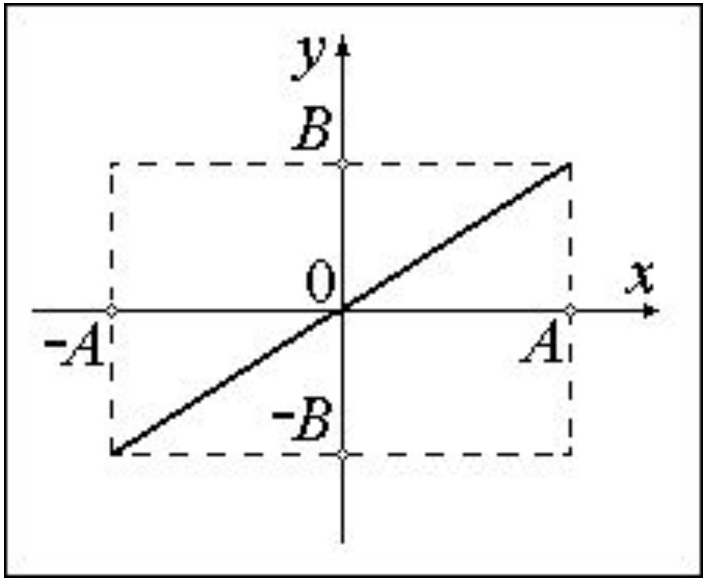
- Колебания происходят во взаимно перпендикулярных направлениях x и y с одинаковой частотой ω ,
- начальная фаза первого колебания =0, тогда α – разность фаз колебаний,
- A и B – амплитуды складываемых колебаний.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

- Уравнение результирующего колебания y = y (x).
- Уравнение эллипса.
- Такие колебания называются эллиптически поляризованными.
- Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз α.

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\alpha.$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

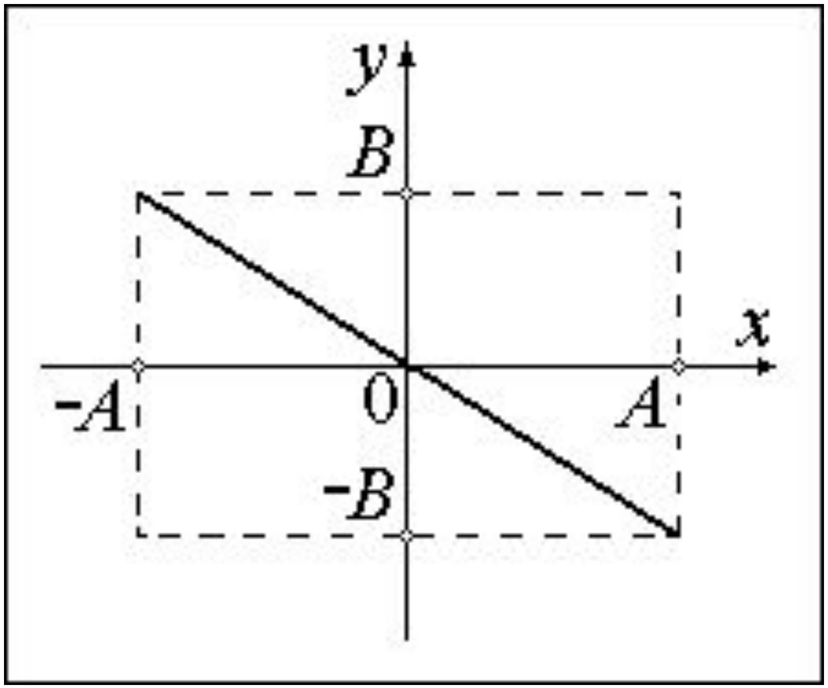


- 1. $\alpha = m\pi$ ($m=0,\pm1,\pm2, \dots$)
- Эллипс вырождается в отрезок прямой, где знак (+) соответствует нулю и четным значениям m, а знак (-) –нечетным значениям m.

$$y = \pm(B/A)\,x,$$

- m= 0,±2,±4, …

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

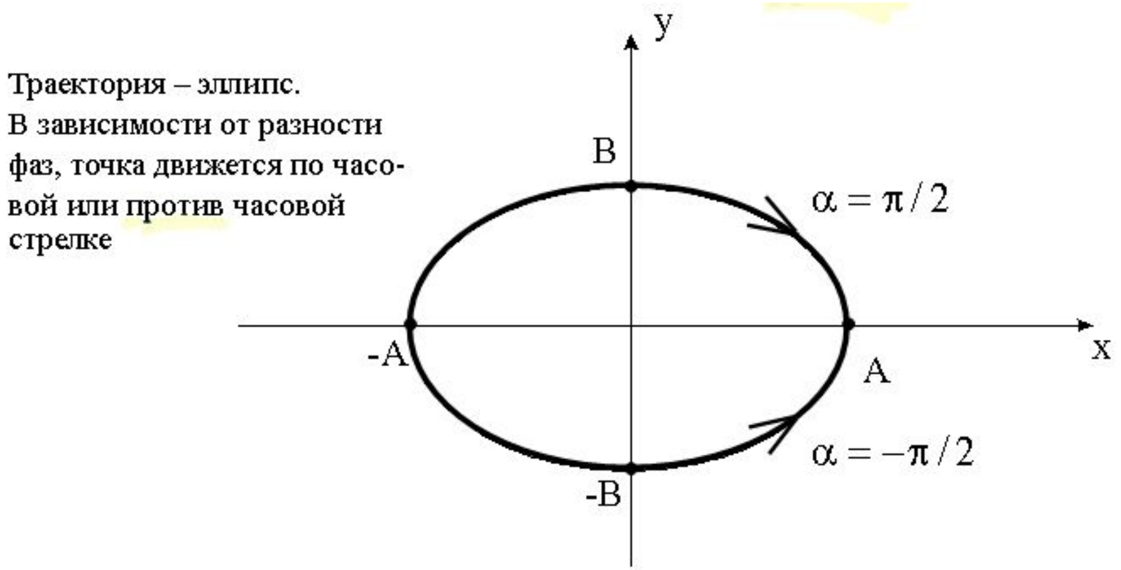


- Результирующее колебание является гармоническим с частотой ω и амплитудой

$$\sqrt{A^2 + B^2}$$

- Такие колебания называются линейно-поляризованными.
- m= ±1,±3

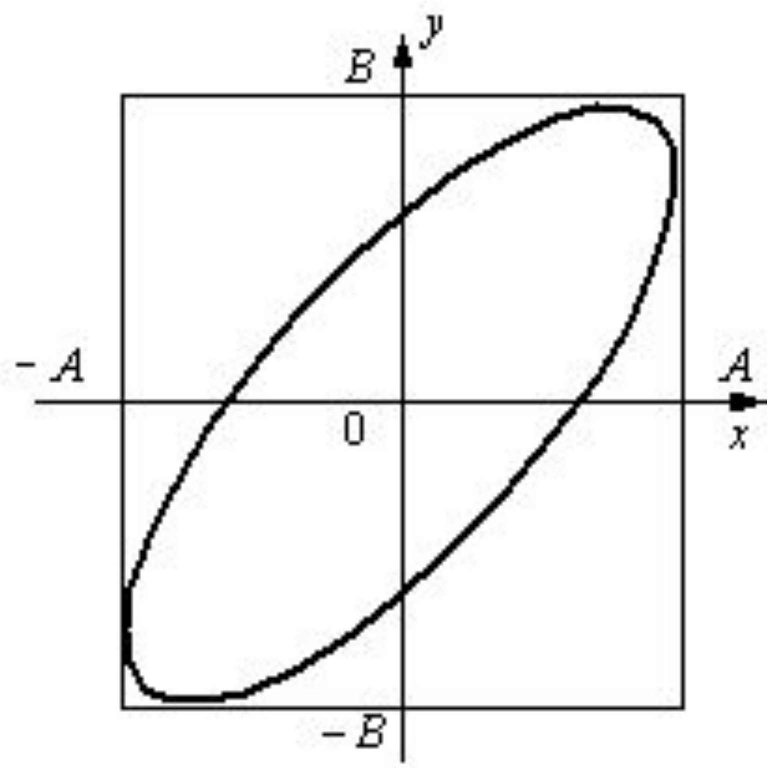
Сложение взаимно перпендикулярных колебаний



- 2. α=(2m+1)π/2   m=0,±1,±2, уравнение имеет вид эллипса.

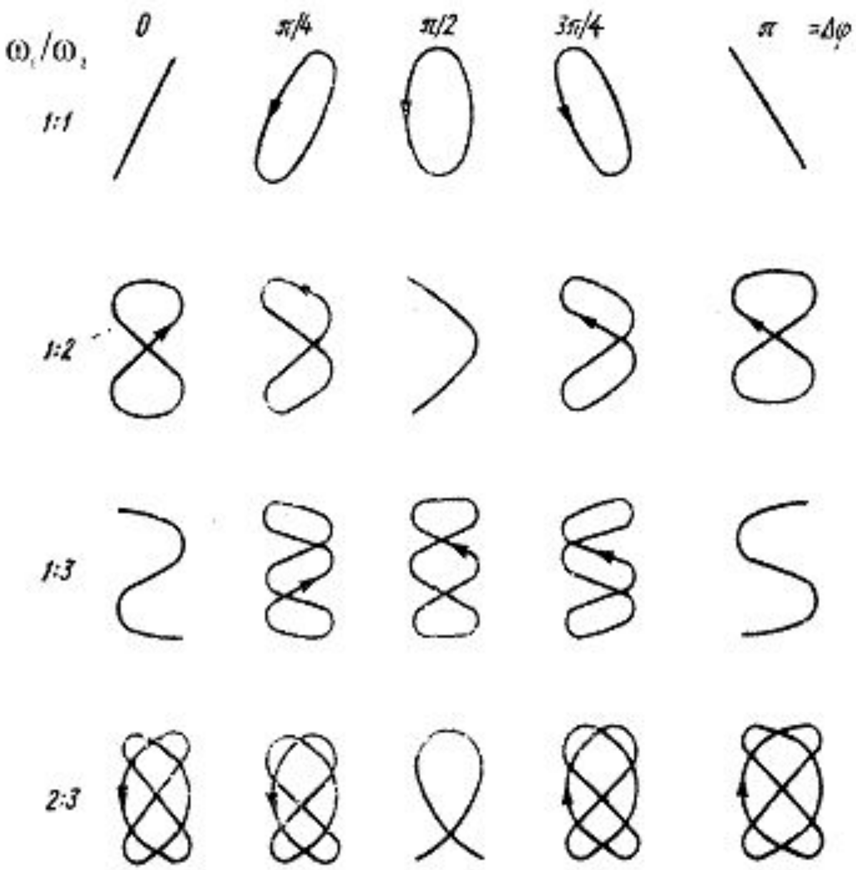
$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1.$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний



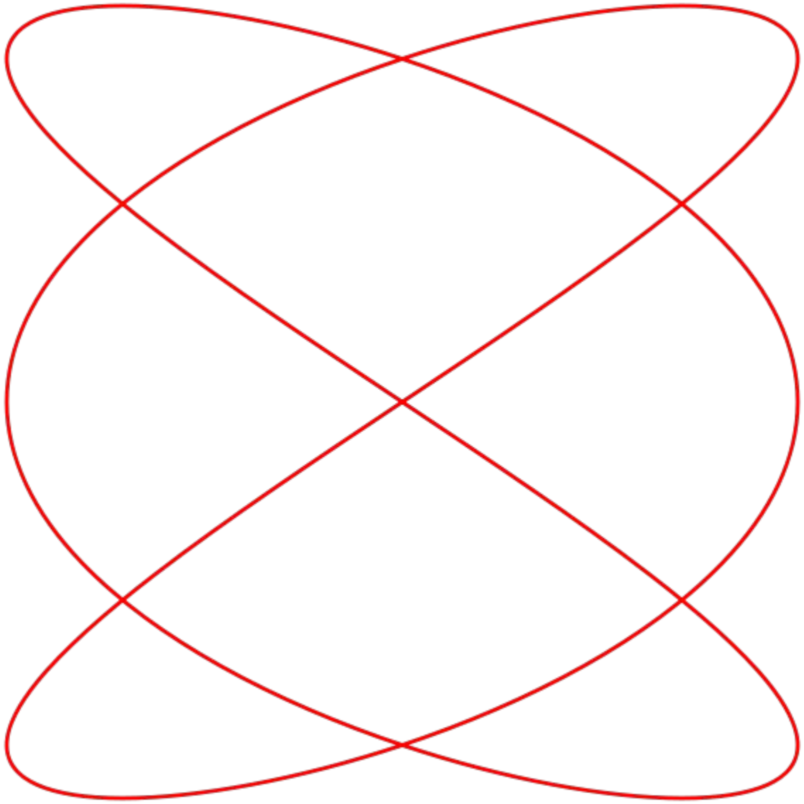
- Если A=B, то эллипс вырождается в окружность – это колебания поляризованные по кругу.
- В общем случае произвольной разности фаз α получаем уравнение эллипса, но с повернутыми осями.

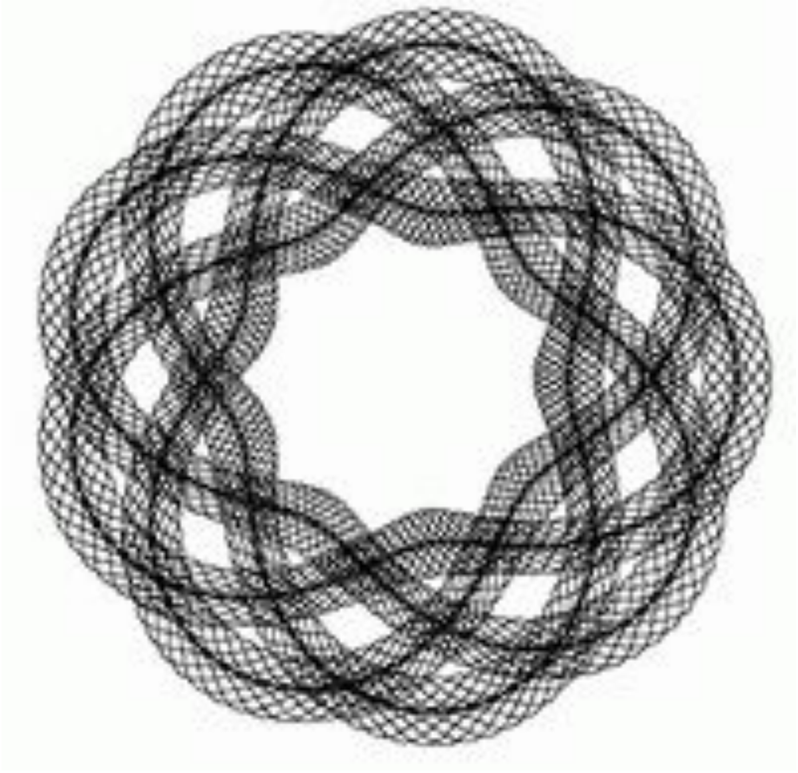
Сложение взаимно перпендикулярных колебаний



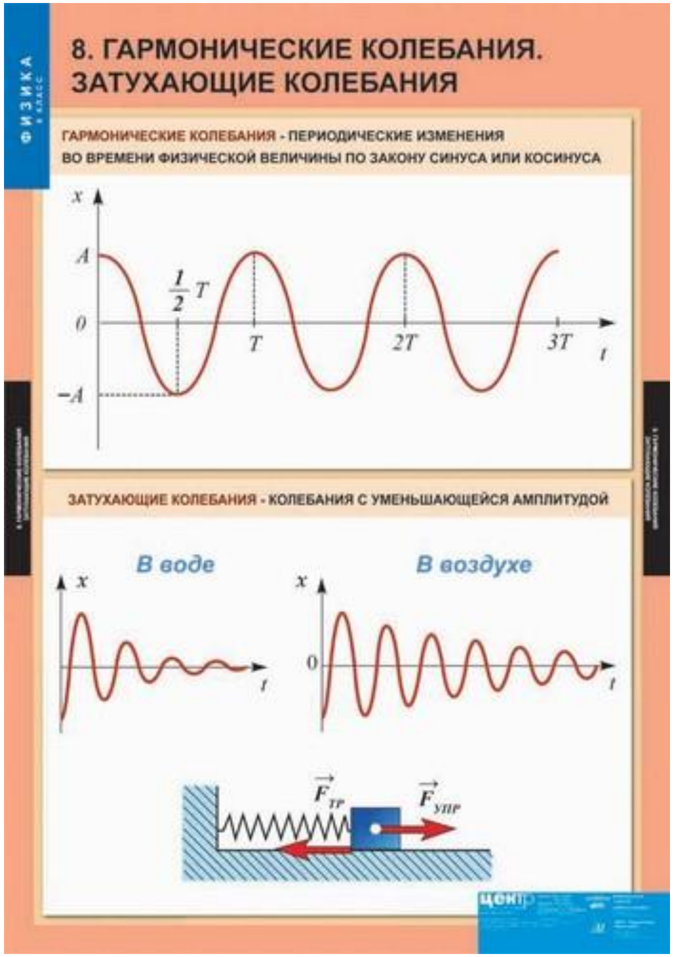
- Фигуры Лиссажу – замкнутые траектории результирующего колебания, если частоты складываемых колебаний различны (могут быть различны разности фаз).

Фигуры Лиссажу





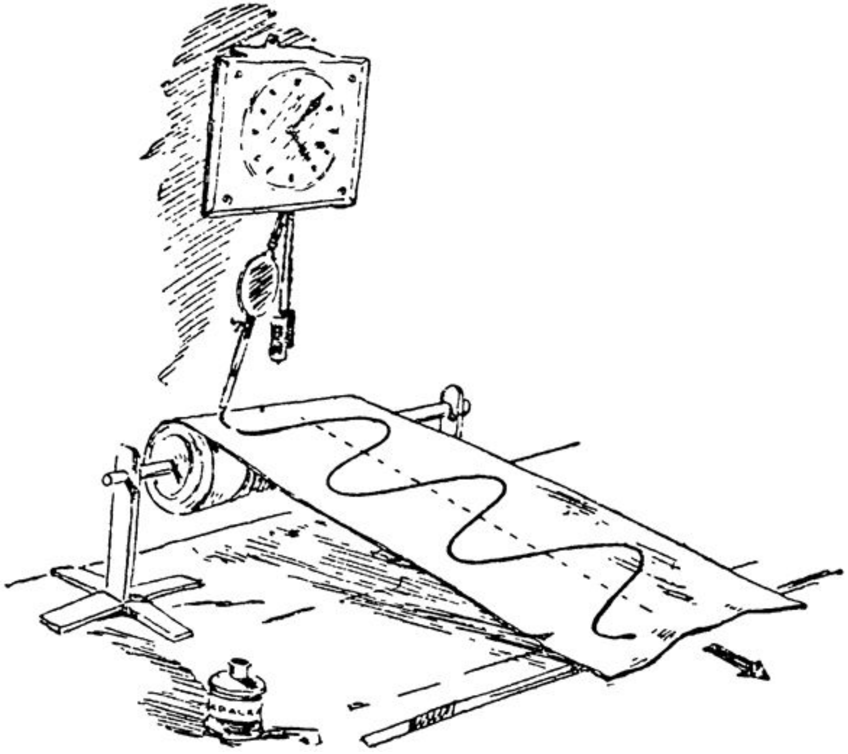
Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний



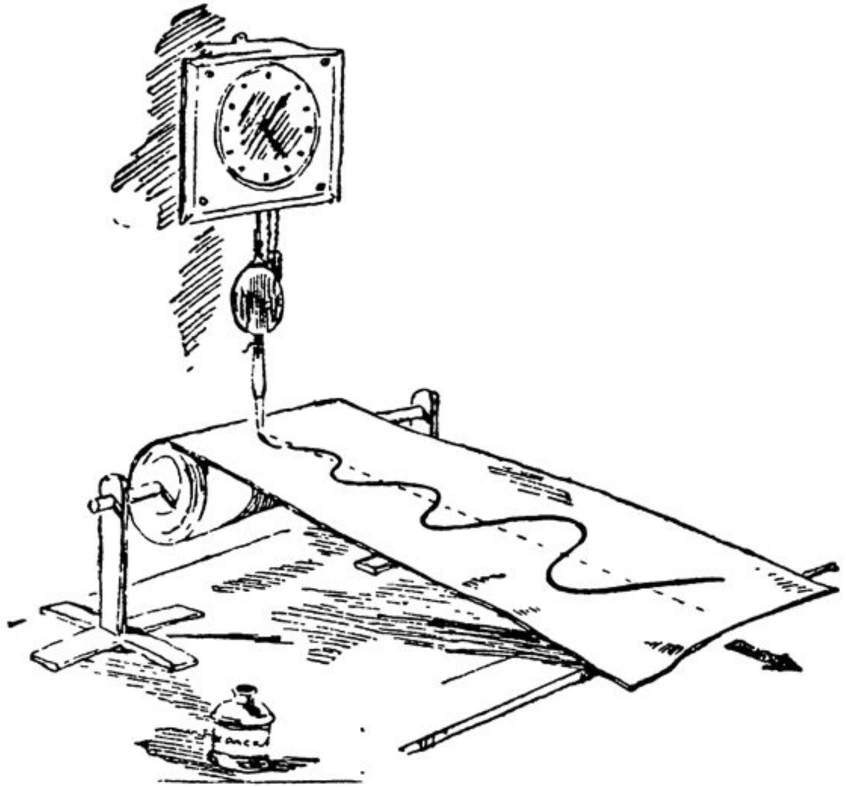
- Свободные затухающие колебания- это колебания амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.
- Простейшим механизмом уменьшения энергии колебаний является превращение ее в теплоту вследствие трения в механических колебательных системах.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

Незатухающие колебания

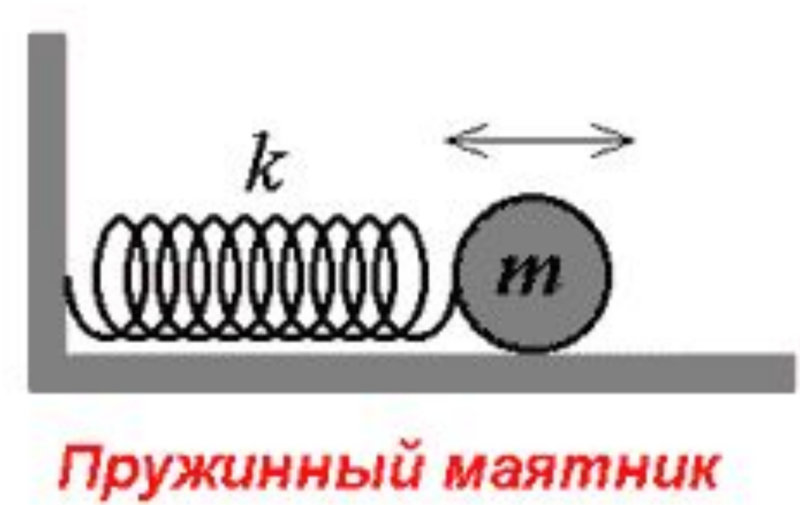


Затухающие колебания



Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

Линейная система – **пружинный маятник**



- Закон затухающих колебаний определяется свойствами колебательных систем.
- Рассматривают линейные системы – идеализированные реальные системы, в которых параметры , определяющие свойства системы в ходе процесса не изменяются.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2\delta\frac{ds}{dt}+\omega_0^2 s=0, \qquad (1)$$

- S – колеблющаяся величина (переменная) – смещение, заряд и др.
- δ = const – коэффициент затухания,
- ω_0- циклическая частота свободных незатухающих колебаний,
- δ = 0 – отсутствие потерь энергии.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

- Решение уравнения (1) имеет вид

$$s = e^{-\delta t}\,u, \qquad (2)$$

где $u=u(t)$ – новая переменная

- Дифференцируем ур. (2) дважды и используя (1)
- Получаем
- $\ddot{u} + (\omega_0^{\,2} - \delta^2)\,u = 0$

- Пусть $\delta < \omega_0$,
- Тогда вводим параметр
- $\omega^2 = \omega_0^{\,2} - \delta^2$
- Получаем уравнение
- $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ –
- - уравнение гармонических колебаний, решение которого
- $u = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

- Общее решение уравнения затухающих колебаний
- $S = A_\circ\, e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$
- $\omega = \sqrt{\omega_\circ{}^2 - \delta^2}$

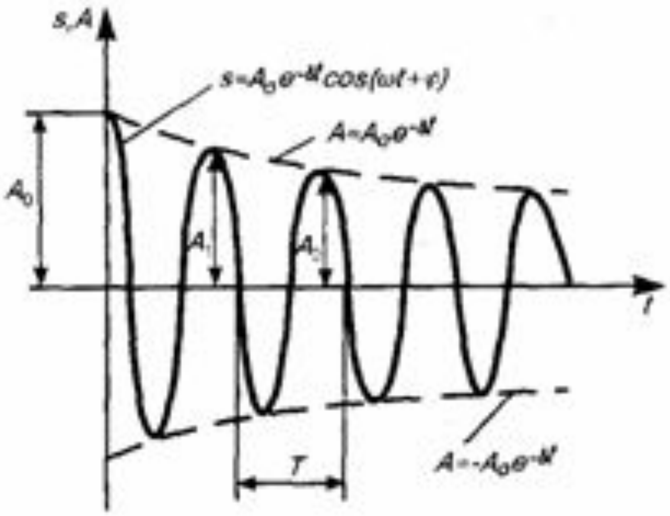
- Пусть $\delta << \omega_\circ$ -
- В этом случае движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой
- $A = A_\circ\, e^{-\delta t}$
- $A_\circ$ - начальная амплитуда

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

- δ – коэффициент затухания определяет скорость уменьшения амплитуды колебаний,
- $\tau = \frac{1}{\delta}$ - время релаксации – промежуток времени , за который амплитуда уменьшается в e раз.

- Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания не являются периодическими и к ним нельзя применять понятие периода или частоты.
- Однако, если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний



- Тогда период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}}$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

- Если A(t) и A(t + T) –

 - амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающихся на период, то соотношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta t}$$ - декремент затухания,

- Логарифм декремента затухания

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta\ t = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

- логарифмический декремент затухания

N_e - число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в е раз.

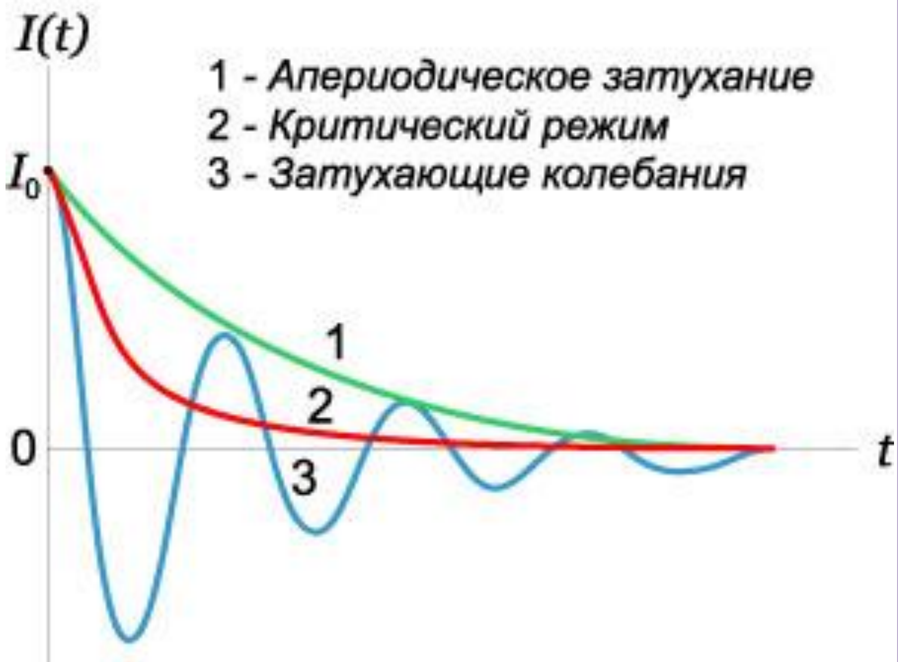
Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

- Логарифмический декремент затухания – постоянная для данной колебательной системы.
- Для характеристики колебательной системы пользуются понятием добротности Q
- $Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_\circ} = \frac{\omega_\circ}{2\delta}$ (3)

при $\delta << \omega_\circ$ $T = T_\circ$

- Из формулы (3) следует, что добротность пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за время релаксации.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний



- При увеличении затухания частота колебаний $\omega = \sqrt{\omega_{\circ}^{2} - \delta^{2}}$ стремится к нулю.
- При $\delta \rightarrow \omega_{\circ}$ период обращается в бесконечность, т.е. движение перестает быть периодическим
- При $\delta \geq \omega_{\circ}$ движение носит апериодический характер – выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний.

Свободные затухающие колебания пружинного маятника

- Для пружинного маятника массой m, совершающего малые колебания под действием упругой силы

$$F_{\text{тр}} = -r\,v = -r\,\dot{x}$$

r – коэффициент сопротивления, знак (-) указывает на противоположные направления силы трения и скорости.

- Закон движения маятника

$$m\,\ddot{x} = -k\,x - r\,\dot{x}$$

Используя $\omega_{\circ} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и $\delta = \frac{r}{2m}$

Получаем дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника

$$\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega_{\circ}^{2} x = 0$$

Свободные затухающие колебания пружинного маятника

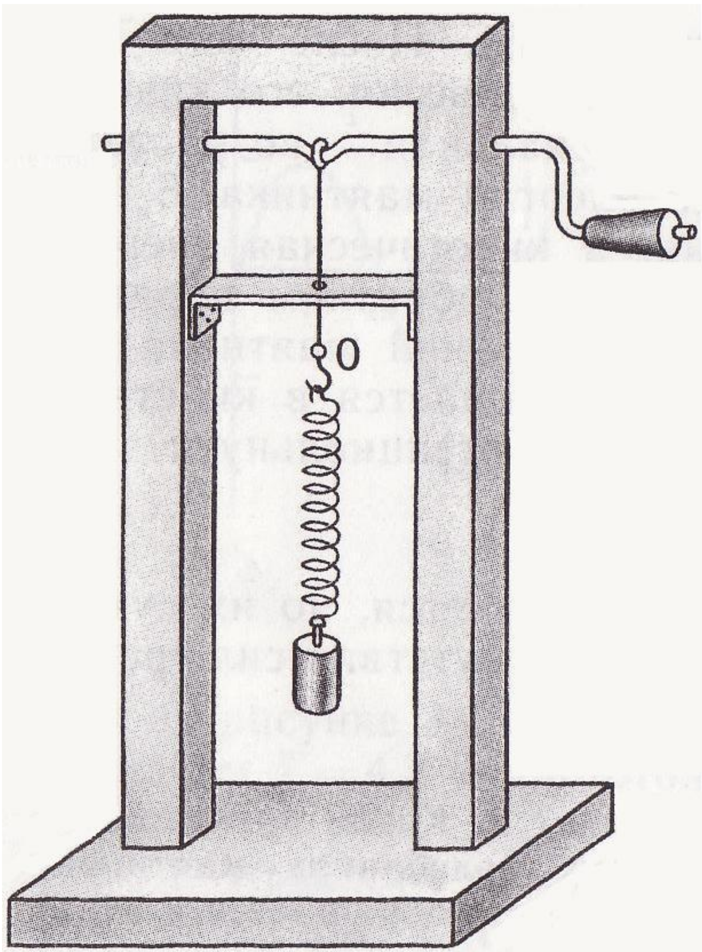
- Маятник колеблется по закону
- $X = A_{\circ}\, e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$

с частотой $\omega = \sqrt{\omega_{\circ}^{2} - \frac{r^2}{4m^2}}$

Добротность пружинного маятника

$Q = \frac{\omega_{\circ}}{2\delta} = \frac{1}{r}\sqrt{km}$

Вынужденные колебания



- Если на колебательную систему действует внешняя периодическая сила, то в системе устанавливаются незатухающие колебания, которые называются вынужденными.
- Внешняя вынуждающая сила F = $F_M \cos \omega t$
- Где F_M - амплитуда силы,
- ω – ее круговая частота.

Вынужденные колебания

- С учетом вынуждающей силы закон движения для пружинного маятника запишется в виде

$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_M \cos\omega t$

Используя $\omega_\circ = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и $\delta = \frac{r}{2m}$

Получаем уравнение

$\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega_\circ^2\,x = (\frac{F_M}{m})\cos\omega t$

- Опыт показывает, что при воздействии на пружинный маятник вынуждающей силы груз совершает установившиеся гармонические колебания с частотой этой силы.

Вынужденные колебания

- Таким образом вынужденные колебания происходят по закону

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- Можно показать , что при

$\varphi = 0$ амплитуда смещения

$$A = \frac{F_M}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \qquad (4)$$

Так как амплитуда – положительная величина, то выражение (4) имеет смысл, когда круговая частота вынуждающей силы ω меньше собственной круговой частоты системы ω_0 ($\omega<\omega_0$). В этом случае колебания системы происходят в одной фазе с колебаниями силы.

Если $\omega>\omega_0$, то колебания системы происходят в противофазе с колебаниями силы ($\phi= -\pi$), а для амплитуды смещения берут модуль

Резонанс

- При совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой системы ($\omega = \omega_\circ$) выражение (4) теряет смысл, ибо делить на нуль нельзя.
- $$A = \frac{F_M}{m(\omega_\circ^2 - \omega^2)}$$

- При $\omega \rightarrow \omega_\circ$ $A \rightarrow \infty$ что не имеет физического смысла.
- Это означает, что в данном случае нельзя пренебрегать затуханием.
- Случай, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой колебательной системы, называется резонансом.

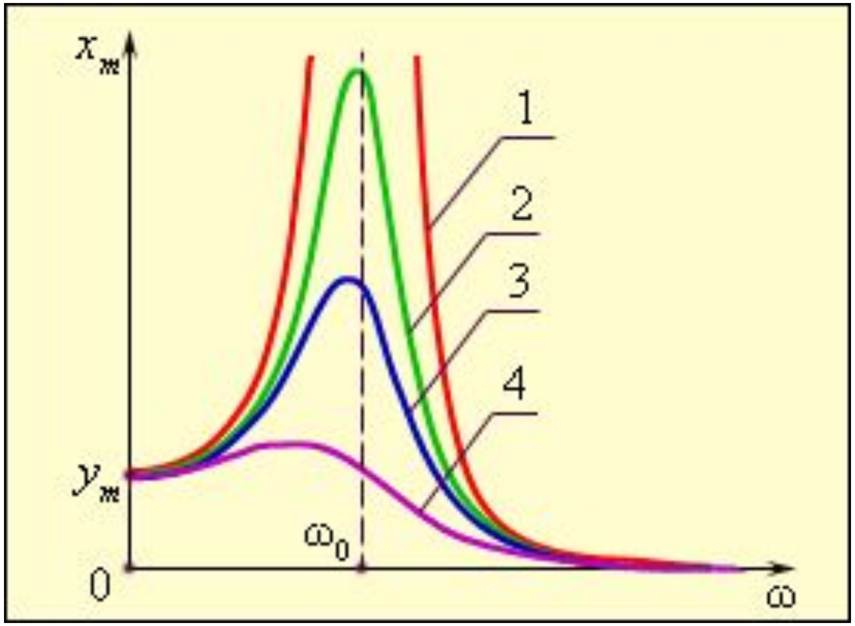
Резонанс

- Резонансная амплитуда смещения

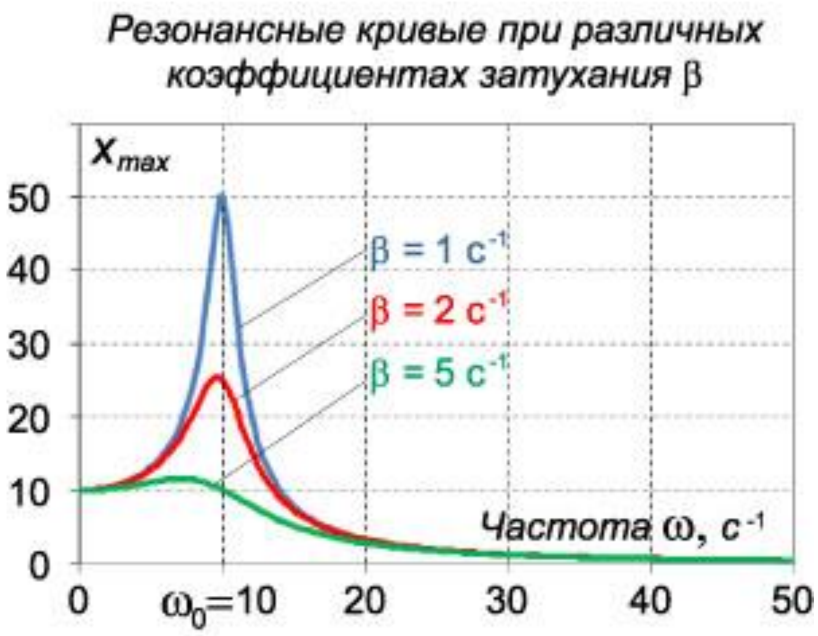
$$A_{рез} = \frac{F_M}{r\omega_o} = \frac{F_M}{m\omega_o^2}\,\frac{m\omega_o}{r} = Q\,A_{стат}$$

где $A_{стат} = \frac{F_M}{k} = \frac{F_M}{m\omega_o^2}$ -

Отклонение род действием постоянной силы.

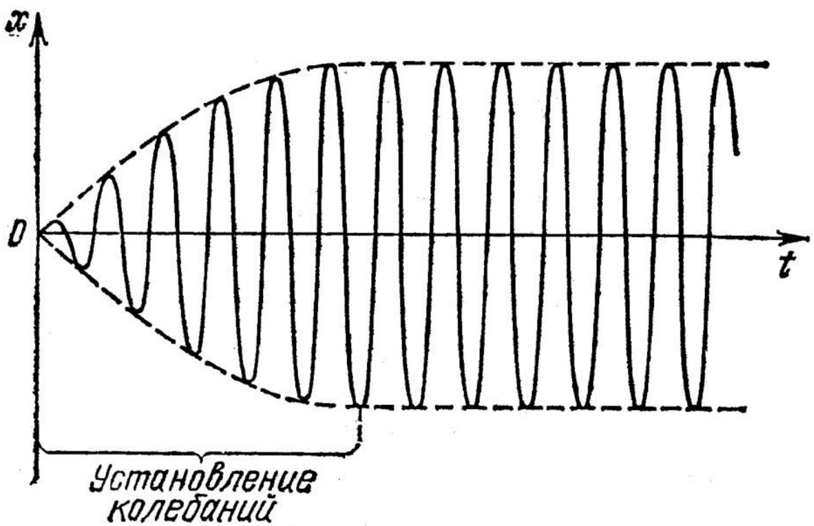


Резонанс



- Вдали от резонанса график строится по формуле (4).
- При частотах, близких к собственной частоте, амплитуда А близка к резонансной амплитуде.

Процесс установления вынужденных колебаний



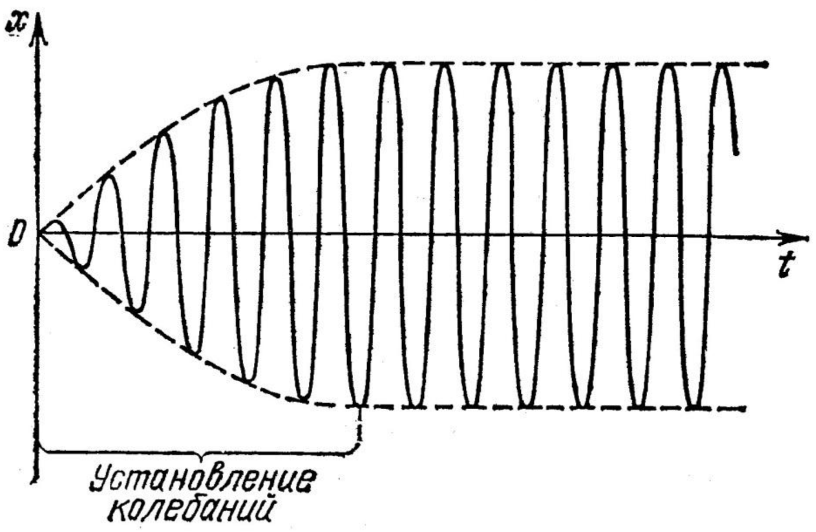
- Раскачка колебаний при резонансе происходит по закону

$X = \frac{F_M t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t$

ω_0 - частота свободных колебаний.

При отсутствии трения наблюдался бы беспредельный рост амплитуды.

Процесс установления вынужденных колебаний



- На самом деле рост амплитуды продолжается лишь до тех пор, пока работа сил трения не уравновесит работу вынуждающей силы.
- Этим условием и определяется установившаяся резонансная амплитуда.
- Время нарастания колебаний при резонансе вдвое больше времени релаксации свободных колебаний $\tau_{рез} = 2\tau$