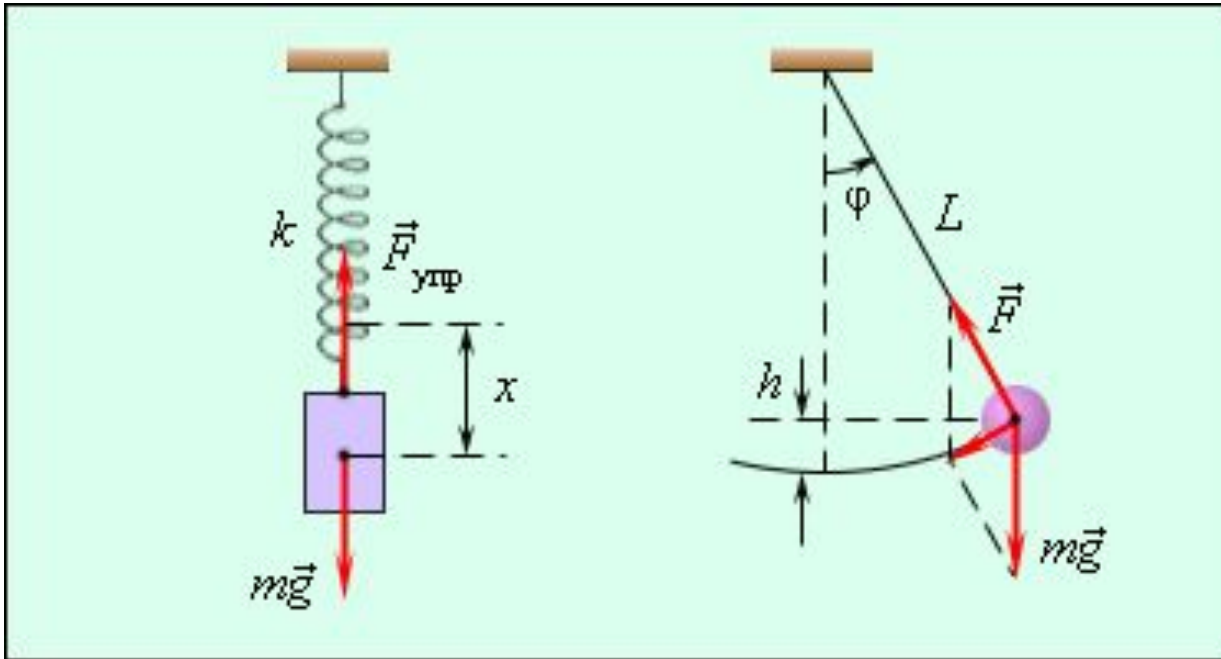


Механические колебания

- **Периодическим** называется повторяющееся движение, у которого каждый цикл в точности воспроизводит любой другой цикл.
- Продолжительность одного цикла называется **периодом**.
- Период равномерного вращения равен продолжительности одного оборота.
- **Колебаниями** называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.
- В зависимости от природы повторяющегося процесса различают колебания:
 - Механические,
 - Электромагнитные,
 - Электромеханические и др.

- В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают:
- Свободные (собственные) колебания,
- Вынужденные колебания,
- Автоколебания,
- Параметрические колебания.
- Свободными называются такие колебания, которые совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий.

Свободные колебания



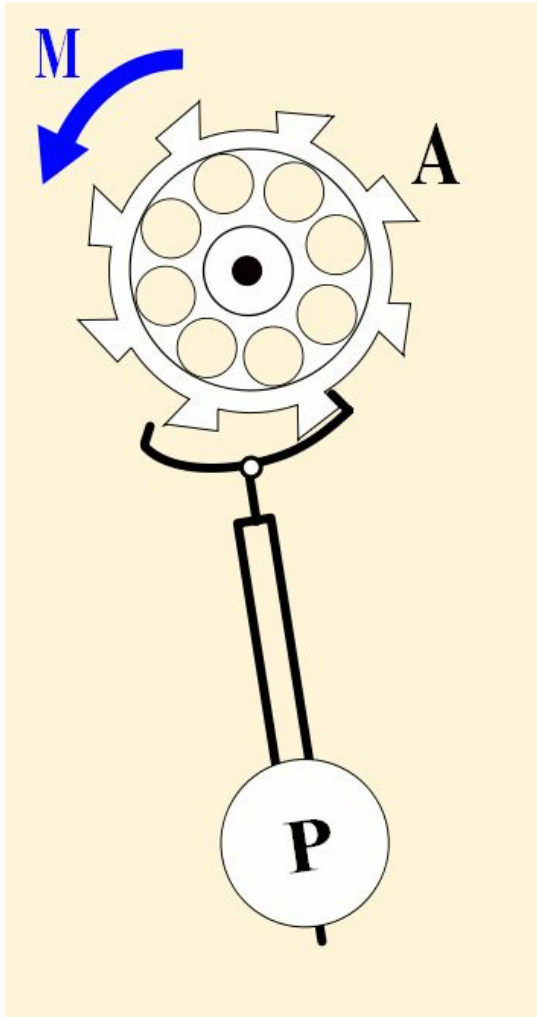
- Свободными называются такие колебания, которые совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий.

Вынужденные колебания

- **Вынужденными** называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодической изменяющейся силы.



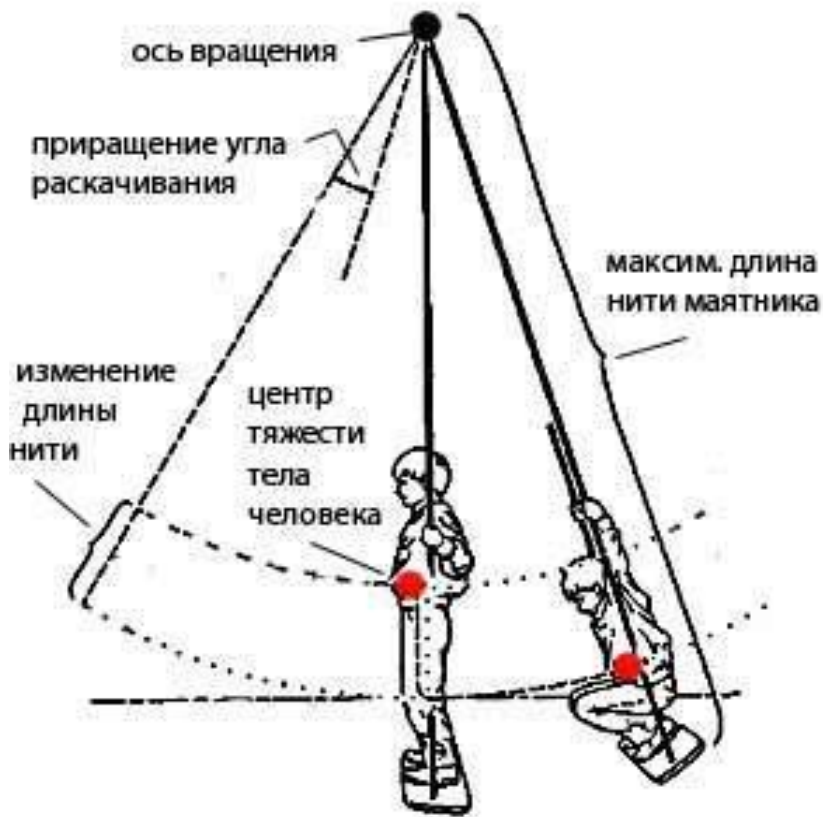
Автоколебания



- Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако, моменты времени, когда осуществляются эти воздействия задаются самой колеблющейся системой.

Параметрические колебания

- При параметрических колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы.



Гармонические колебания

- Гармонические колебания – это колебания, при которых колеблющаяся величина (например, отклонение маятника) изменяется по закону синуса или косинуса.

$$q = q_m \cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha_0)$$

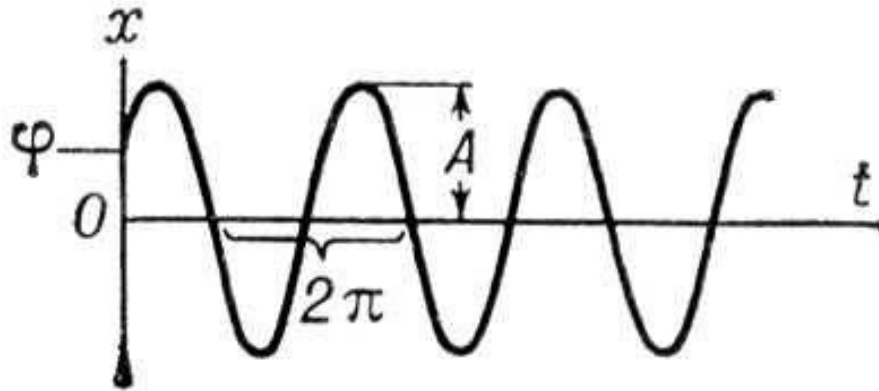
$$u = U_m \cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$e = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$\mathcal{E}_m = B\omega S$$

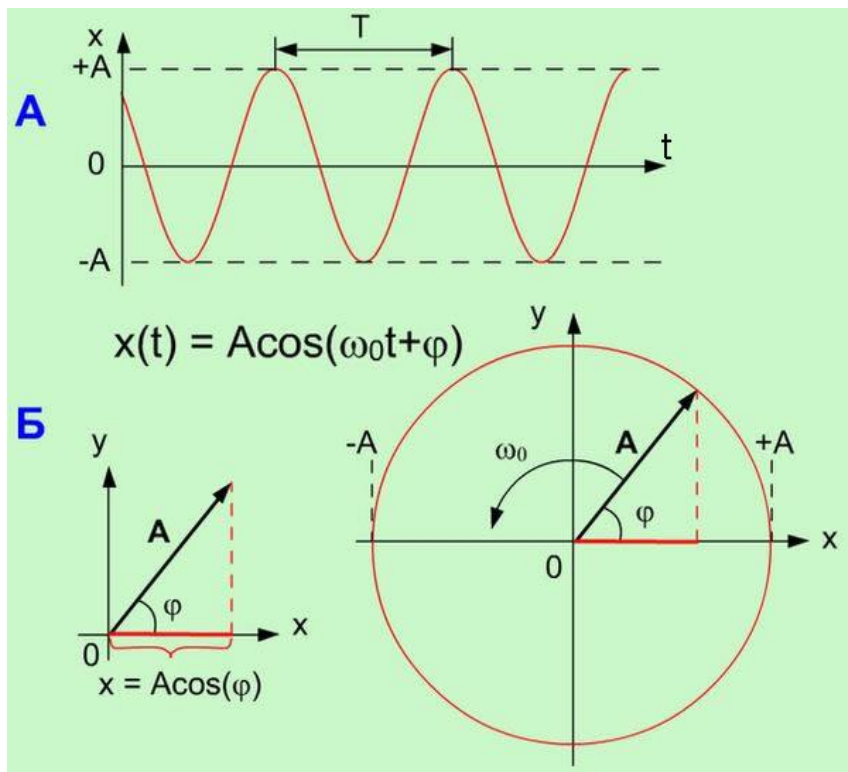
$$U_m = \frac{q_m}{C}$$

Гармонические колебания



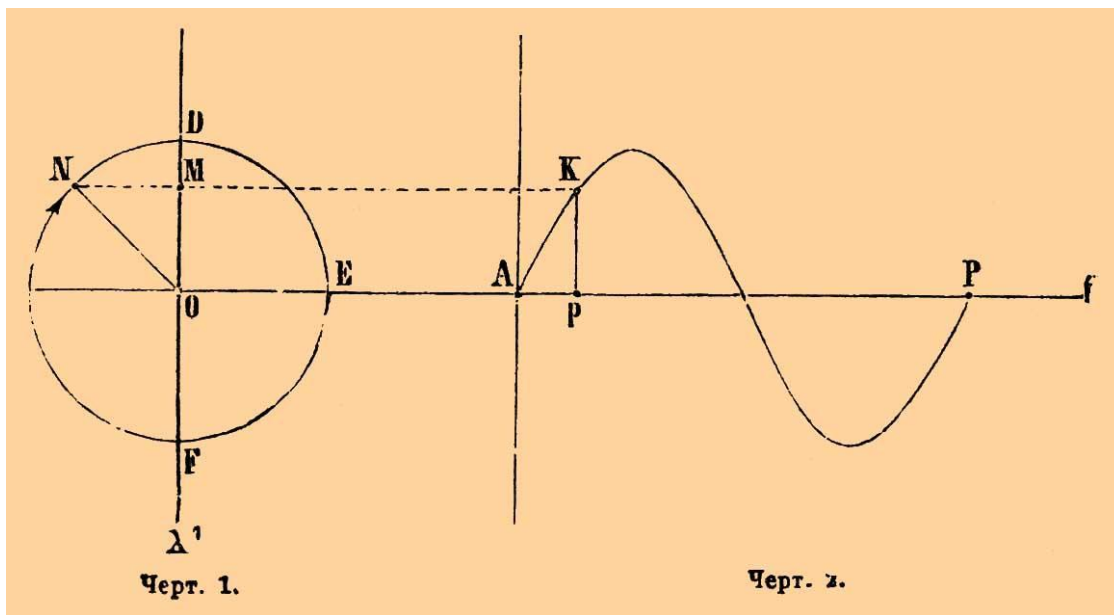
- $T=2\pi$ – период,
- A – амплитуда колебаний (максимальное значение колеблющейся величины),
- φ – начальная фаза колебаний (рад),
- t – время колебаний (с),
- X – колеблющаяся величина (удаление от положения равновесия в любой момент времени).

Гармонические колебания



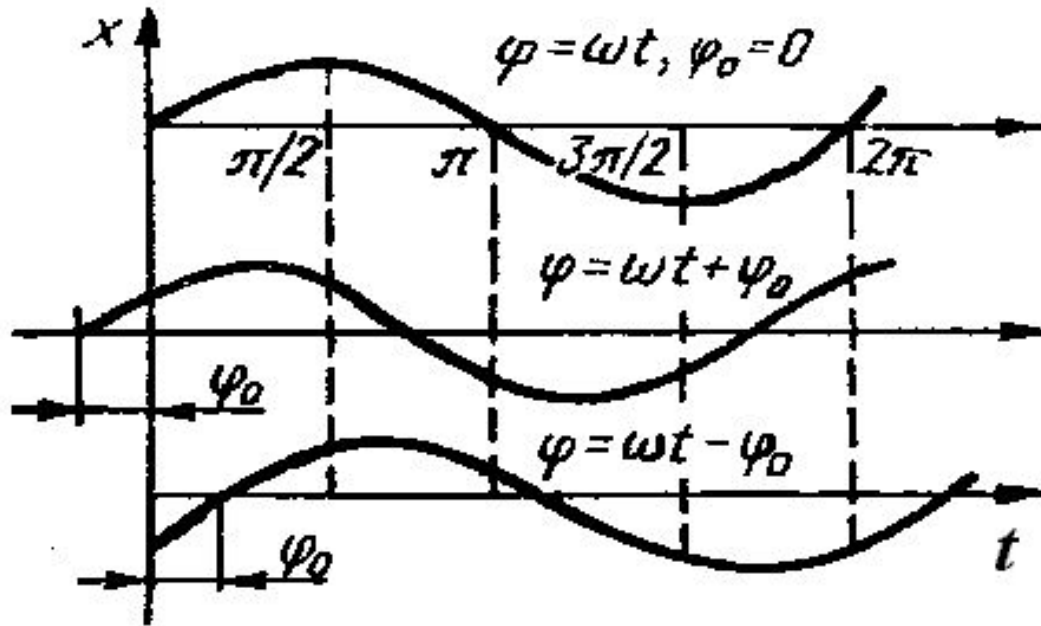
- ω_0 - круговая (циклическая) частота,
- $(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза колебаний в момент времени t (рад),

Гармонические колебания



- Представим себе, что по кругу радиуса a (на черт. 1 изображен круг, имеющий центр в O) движется точка N с постоянной скоростью в сторону, указанную стрелкой, причем полный оборот по окружности она совершает в течение времени T .

Гармонические колебания



$$x = x_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

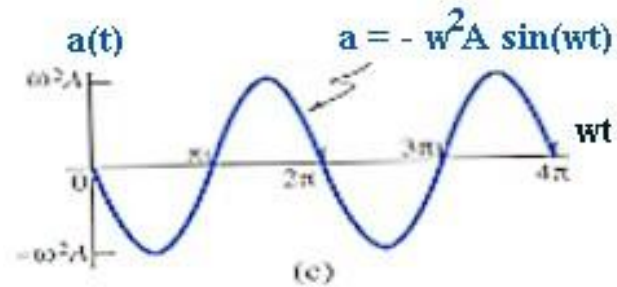
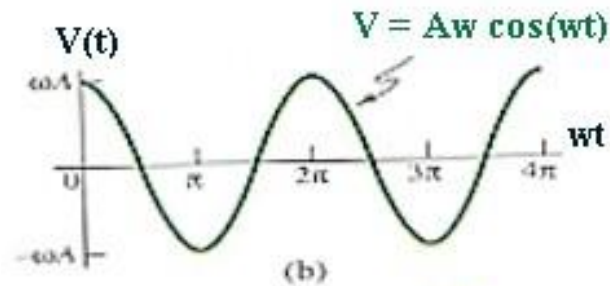
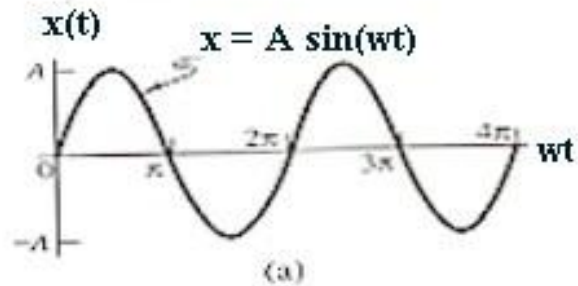
Уравнение гармонического осциллятора

- Гармонические колебания описываются законом

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- A – амплитуда колебаний,
- $\omega_0 t + \varphi_0$ - фаза колебаний,
- ω_0 - собственная частота колебаний (рад/с).
- Для характеристики колебаний вводят понятие периода T
- $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ - время одного колебания и
- частоты $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$, определяющей число колебаний в единицу времени (Гц).

Уравнение гармонического осциллятора



Уравнение гармонического осциллятора

- Дифференцируя дважды по времени уравнение

$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ получаем

$$\dot{X} = V = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

$$\ddot{X} = a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) = -\omega_0^2 X$$

Амплитуды скорости и ускорения равны соответственно

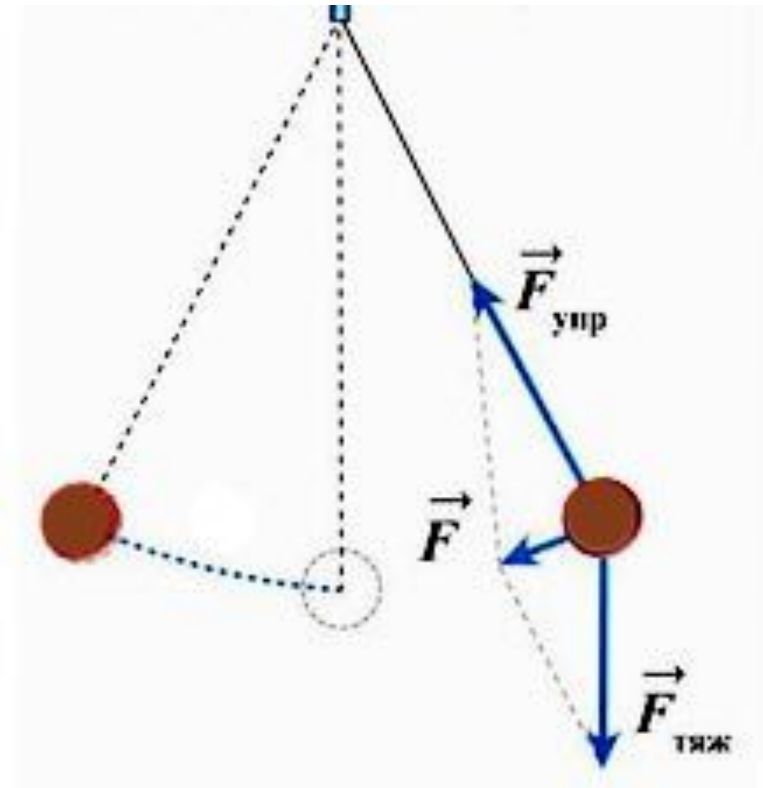
$A\omega_0$ и $A\omega_0^2$,

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка и у него есть два независимых решения: $A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и $A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Энергия механической системы при гармонических колебаниях

- Сила $F=ma$, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m
- $F=-m\omega_0^2x$
- Сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (сторону равновесия).



Энергия механической системы при гармонических колебаниях

- Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (141.3)$$

или

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)].$$

Энергия механической системы при гармонических колебаниях

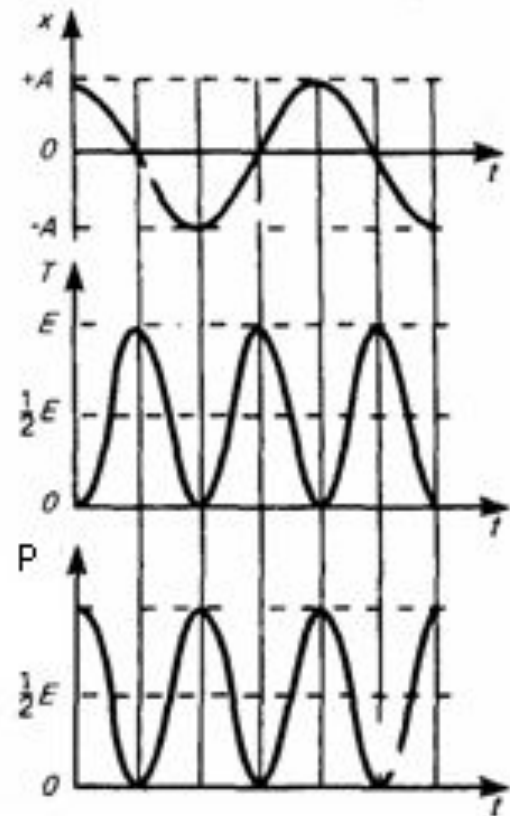
- Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F

$$\Pi = - \int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

Энергия механической системы при гармонических колебаниях

- Полная энергия
- $E = T + \Pi = \frac{mA^2}{2} \omega_0^2$
- Полная энергия механической системы при гармонических колебаниях сохраняется
- $E = \text{const}$
- Кинетическая и потенциальная энергии – периодические функции с периодом, равным половине периода колебаний.



Преобразование механической энергии при гармонических колебаниях

Кинетическая и потенциальная энергии колеблются в противофазе: когда кинетическая энергия достигает максимума, значение потенциальной энергии минимально.

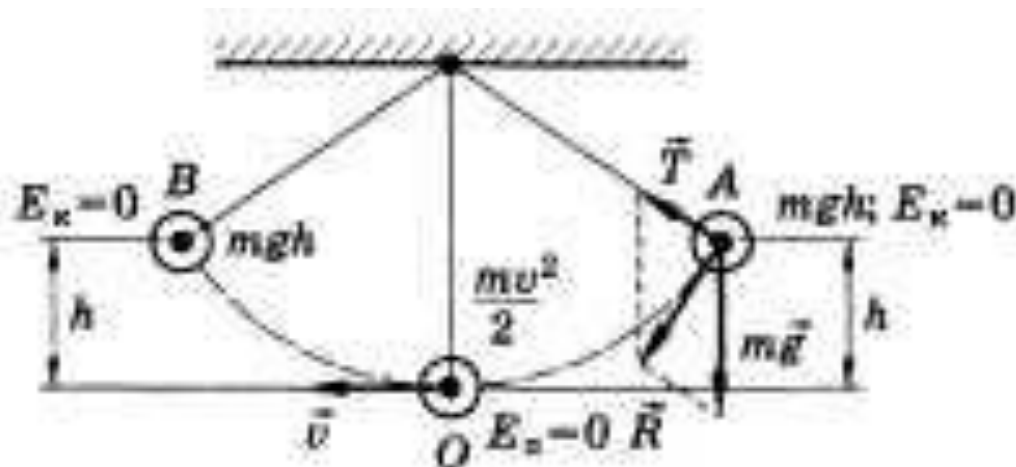
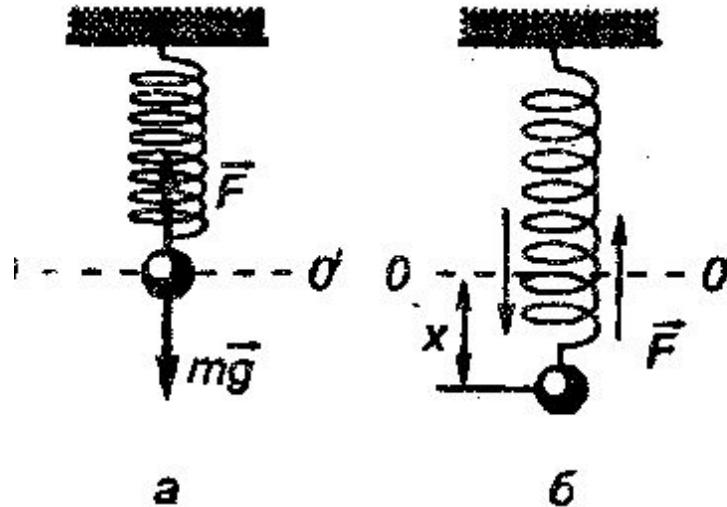


Рис. 10

Гармонический осциллятор

- Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида
- $\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$ ($x=s$)
- Разница между физическими системами заключена в определении величины ω_0 и в физическом смысле переменной s : это может быть координата (смещение), угол, заряд, ток и т.д.
- Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники, колебательный контур.

Пружинный маятник



- Пружинный маятник – это груз массой m , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы
- $F = -kx$, где k – коэффициент жесткости.

Пружинный маятник

- Запишем уравнение 2-го закона Ньютона $m\ddot{x} = -kx$

или

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Из уравнения гармонического осциллятора вытекает, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Потенциальная энергия пружинного маятника

- $\Pi = \frac{kx^2}{2}$

Физический маятник

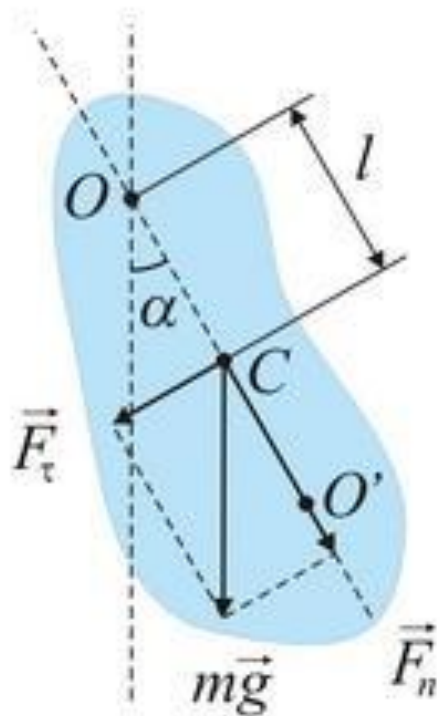
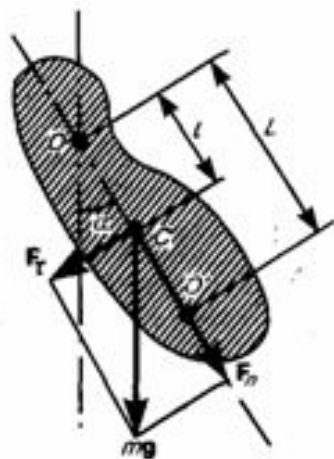


Рис.1

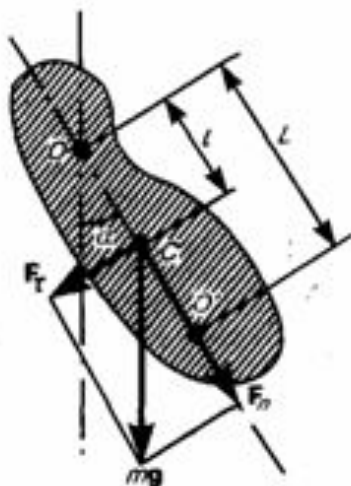
-это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной неподвижной оси подвеса, не проходящей через центр масс C тела.

Физический маятник



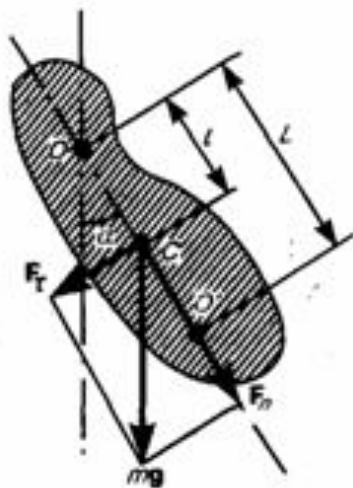
- Отклоним маятник из положения равновесия на угол α .
- Запишем уравнение динамики вращательного движения твердого тела
- $M = I \varepsilon = I \ddot{\alpha} = F_T \ell = -mg\ell \sin \alpha \approx$
- $\approx -mg\ell \alpha$, где I – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O ;
- M – момент возвращающей силы;
- ℓ – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника;

Физический маятник



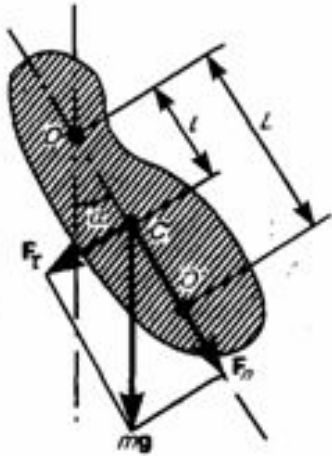
- $F_{\tau} = -mg \sin \alpha \approx mg \alpha$ – возвращающая сила.
- $I \ddot{\alpha} + mg \ell = 0$
- $\ddot{\alpha} + \frac{mg \ell}{I} \alpha = 0$
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{2mg \ell}{I}}$
- $\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$
- Решение этого уравнения
- $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Физический маятник



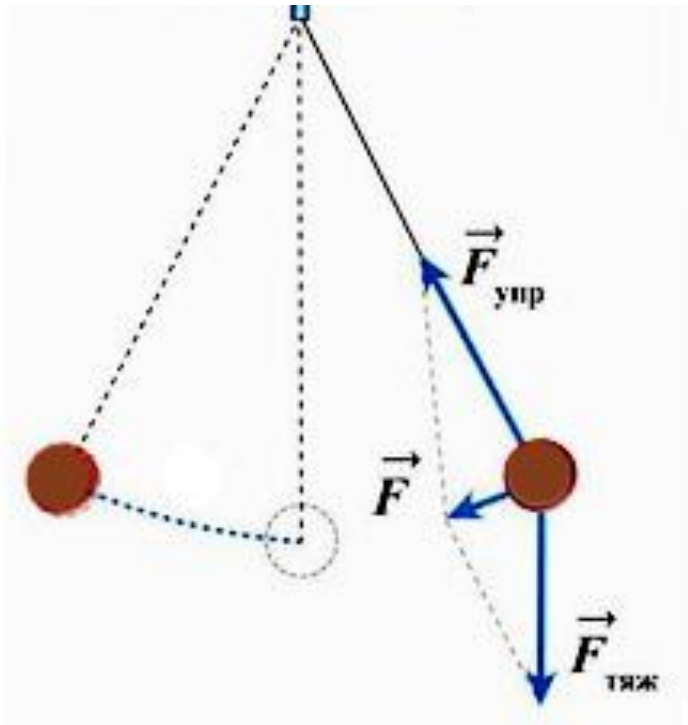
- При малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и периодом
- $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$, где
- $L = \frac{I}{m\ell}$ - приведенная длина физического маятника.

Физический маятник



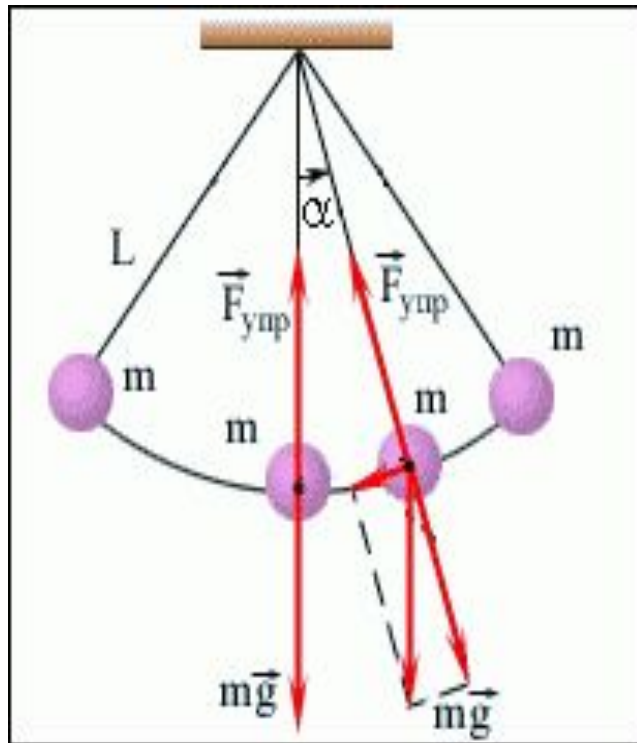
- Точка O' - центр качаний физического маятника.
- По теореме Штейнера
- $$L = \frac{I}{m\ell} = \frac{I_C + m\ell^2}{m\ell} = \ell + \frac{I_C}{m\ell} > \ell$$
- OO' всегда больше OC .
- Точка подвеса O и центр качаний обладают свойством взаимозаменяемости.

Математический маятник



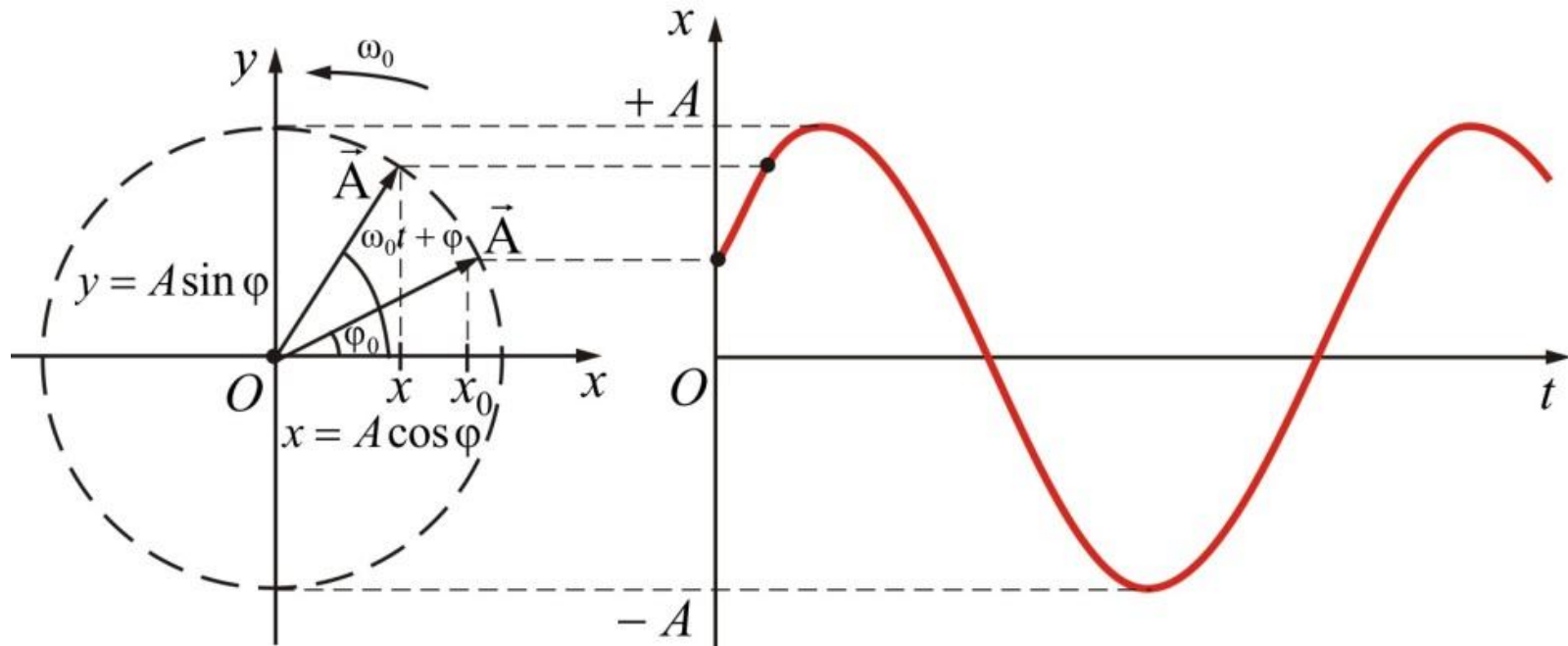
- - это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющейся под действием силы тяжести.
- Момент инерции математического маятника
- $I = m\ell^2$, ℓ - длина маятника.

Математический маятник



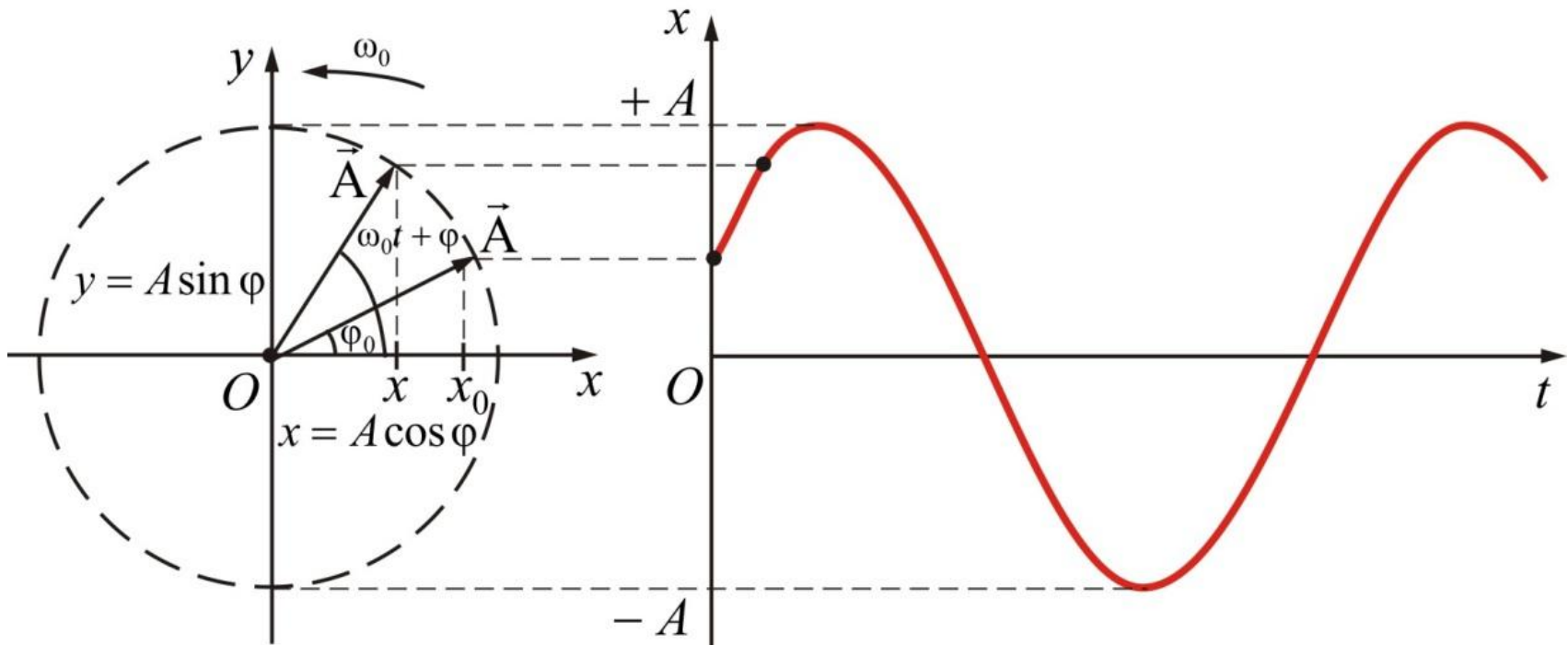
- Период малых колебаний математического маятника
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$
- Если приведенная длина L физического маятника равна длине ℓ математического маятника, то их периоды колебаний одинаковы.

Представление гармонических колебаний методом векторных диаграмм



- Гармонические колебания можно изобразить графически с помощью вращающегося вектора амплитуды A на плоскости.
- Вектор A равномерно вращается вокруг точки O с угловой скоростью, равной циклической частоте ω_0 .

Представление гармонических колебаний методом векторных диаграмм



- Проекция точки A на ось Ox : $X = A \cos \varphi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,
- Проекция точки A на ось Oy : $Y = A \sin \varphi = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$,
- $\varphi = (\omega_0 t + \varphi_0)$ - угол, равный фазе колебаний в данный момент времени.

Сложение гармонических колебаний

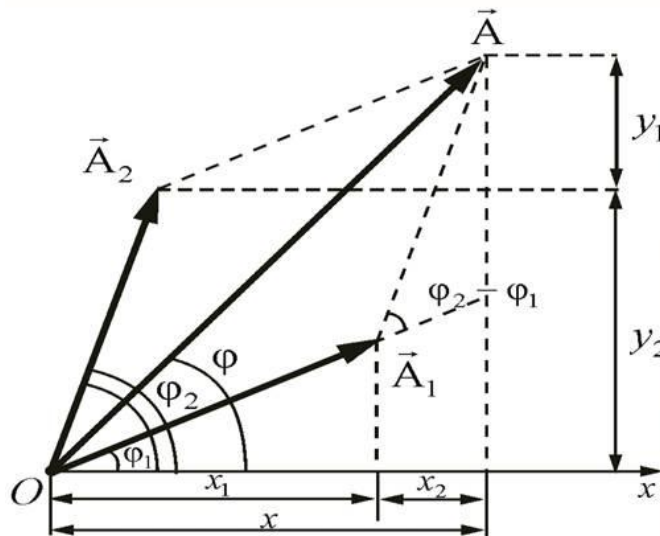
- Под сложением колебаний понимают нахождение закона результирующих колебаний, когда эта система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах.
- Различают два предельных случая: сложение колебаний одинакового направления и сложение взаимно перпендикулярных колебаний.
- Например, груз подвешен на пружине к потолку рессорного вагона. Груз будет совершать колебания относительно точки подвеса, которая в свою очередь совершает колебания на рессорах вагона. Т.о. груз будет совершать движение, складывающееся из двух колебаний одного направления.

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.

Пусть *точка* одновременно участвует в *двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.*

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (2.2.1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$



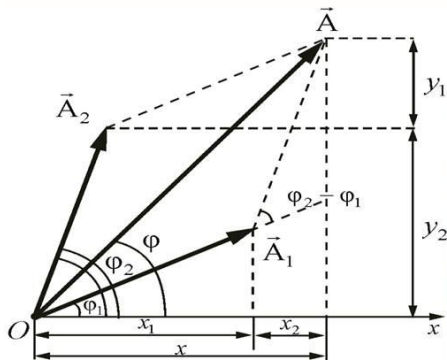
Такие два колебания называются *когерентными*, их разность фаз не зависит от времени:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$$

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.

Пусть *точка* одновременно участвует в *двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.*

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$



Такие два колебания называются *когерентными*, их разность фаз не зависит от времени:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.

- Проанализируем выражение для амплитуды результирующего колебания

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

- в зависимости от разности фаз ($\varphi_2 - \varphi_1$):
- 1) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ ($m=0, 1, 2, \dots$), тогда $A=A_1+A_2$, т. е. амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний; $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$;
- 2) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$ ($m=0, 1, 2, \dots$), тогда $A=|A_1-A_2|$, т. е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний; $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$.

Биения

- Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами называются **биениями** (амплитуды этого колебания, то увеличиваются, то уменьшаются).
- A – амплитуды складываемых колебаний,
- ω и $(\omega + \Delta\omega)$ – частоты складываемых колебаний, причем $\Delta\omega \ll \omega$,
- $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ – начальные фазы колебаний одинаковы и $= 0$,

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t, \\ x_2 = A \cos (\omega + \Delta\omega) t. \end{cases}$$

Биения

$$x = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t.$$

$$A_{\text{б}} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|.$$

$$\omega_{\text{б}} = \Delta\omega.$$

$$T_{\text{б}} = 2\pi / \Delta\omega.$$

- результирующее колебание при условии $\Delta\omega/2 \ll \omega$

- амплитуда биения

- частота биений

- период биений

Биения

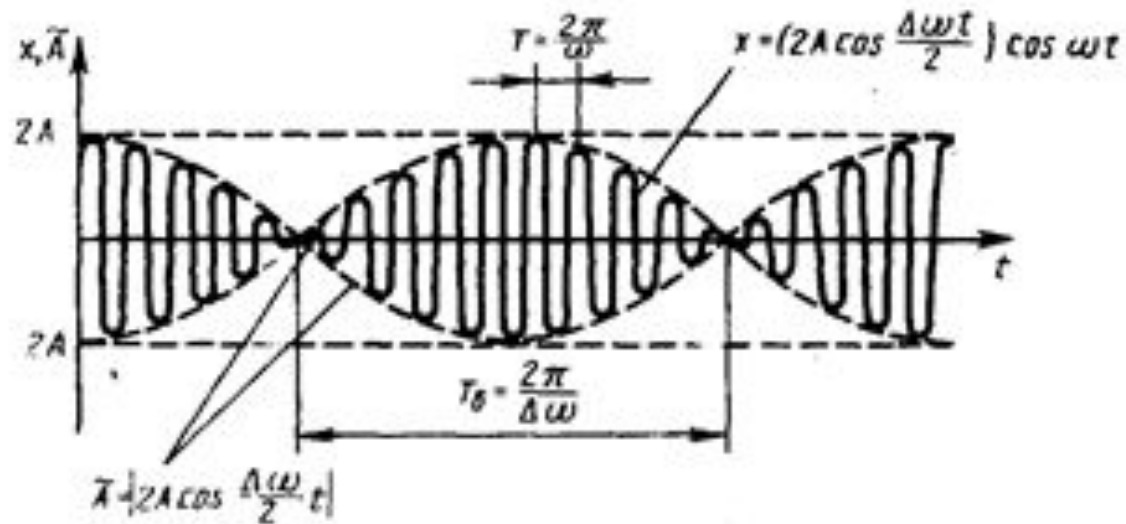


Рис. 204

- Сплошные линии – график результирующего колебания,
- Огибающие их (пунктирные) – график медленно изменяющейся амплитуды.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t, \\ y = B \cos (\omega t + \alpha), \end{cases}$$

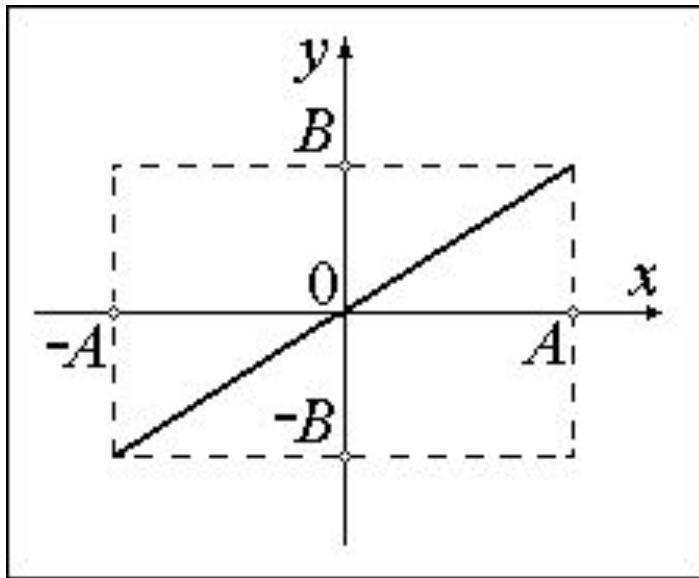
- Колебания происходят во взаимно перпендикулярных направлениях x и y с одинаковой частотой ω ,
- начальная фаза первого колебания $= 0$, тогда α – разность фаз колебаний,
- A и B – амплитуды складываемых колебаний.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

- Уравнение результирующего колебания $y = y(x)$.
- Уравнение эллипса.
- Такие колебания называются эллиптически поляризованными.
- Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз α .

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha.$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

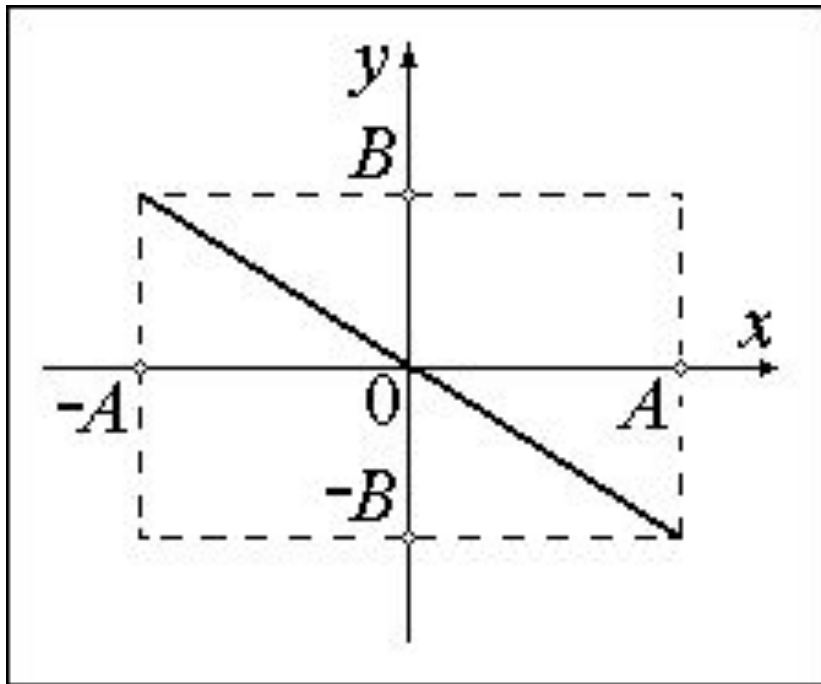


- 1. $\alpha = m\pi$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
- Эллипс вырождается в отрезок прямой, где знак (+) соответствует нулю и четным значениям m , а знак (-) – нечетным значениям m .

$$y = \pm (B/A) x,$$

- $m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний



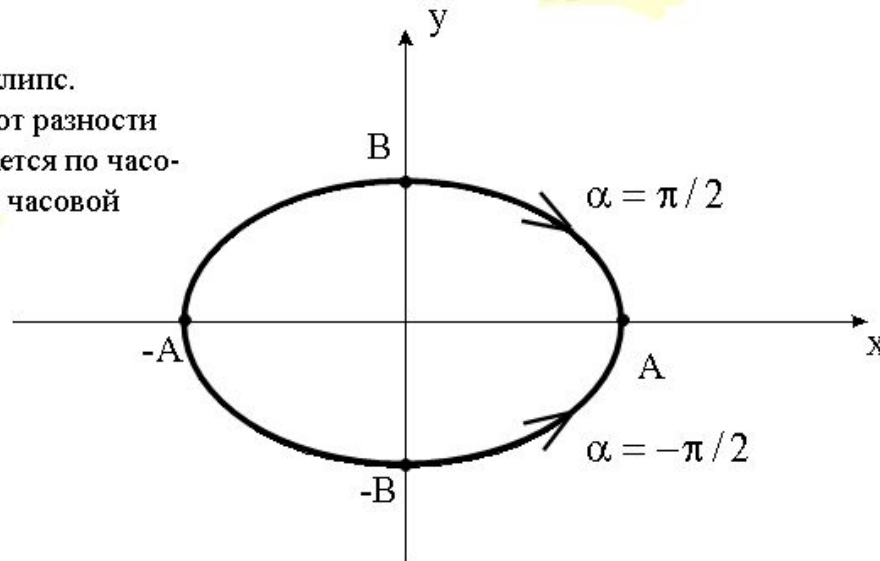
- Результирующее колебание является гармоническим с частотой ω и амплитудой

$$\sqrt{A^2 + B^2}$$

- Такие колебания называются **линейно-поляризованными**.
- $m = \pm 1, \pm 3$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

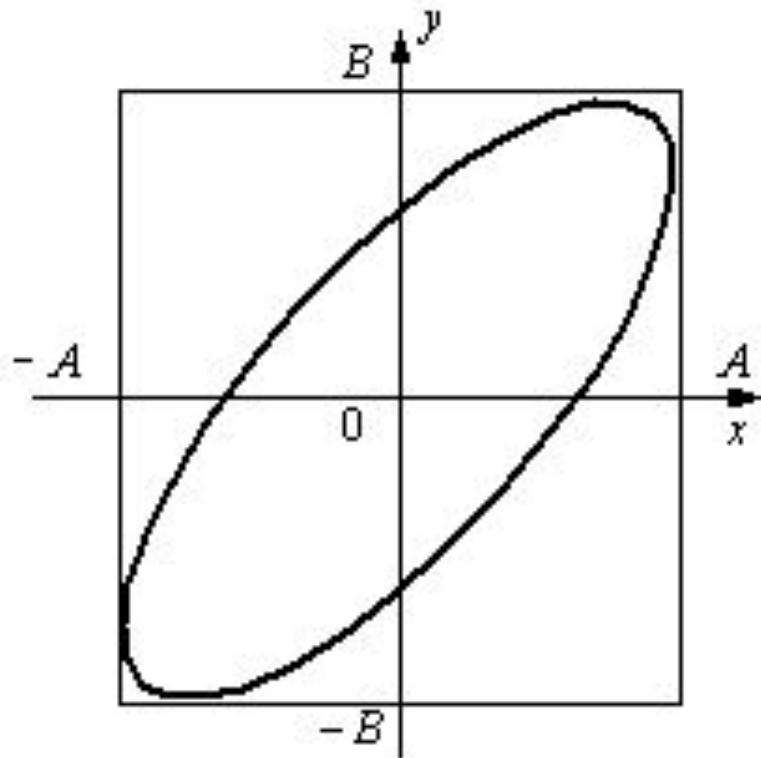
Траектория – эллипс.
В зависимости от разности фаз, точка движется по часовой или против часовой стрелке



- 2. $\alpha = (2m+1)\pi/2$ $m=0, \pm 1, \pm 2$, уравнение имеет вид эллипса.

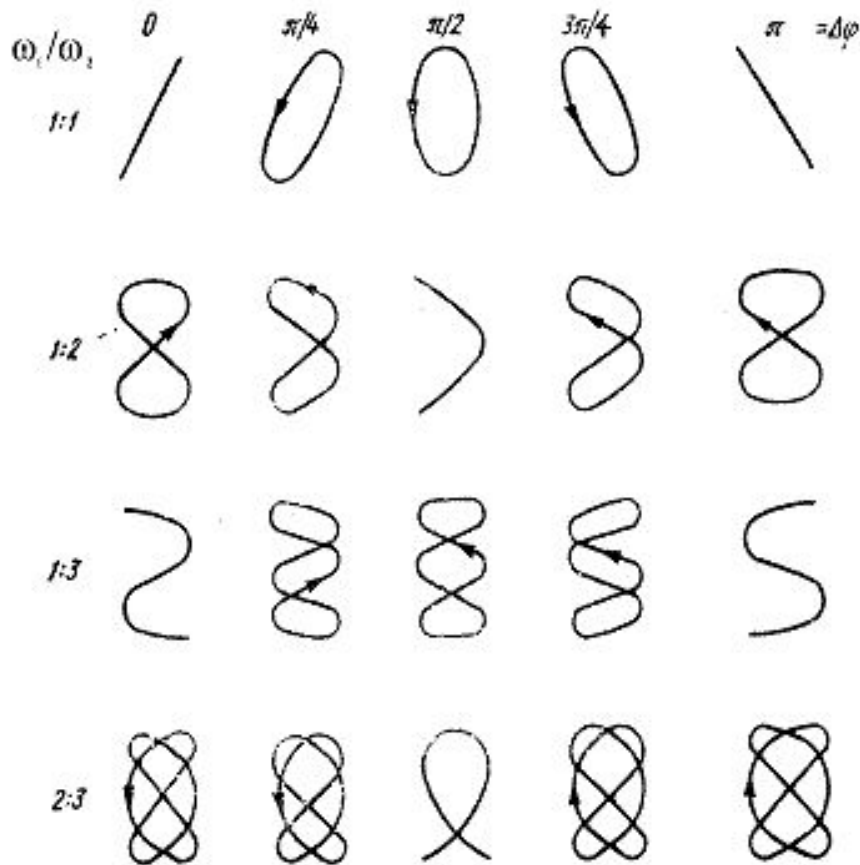
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний



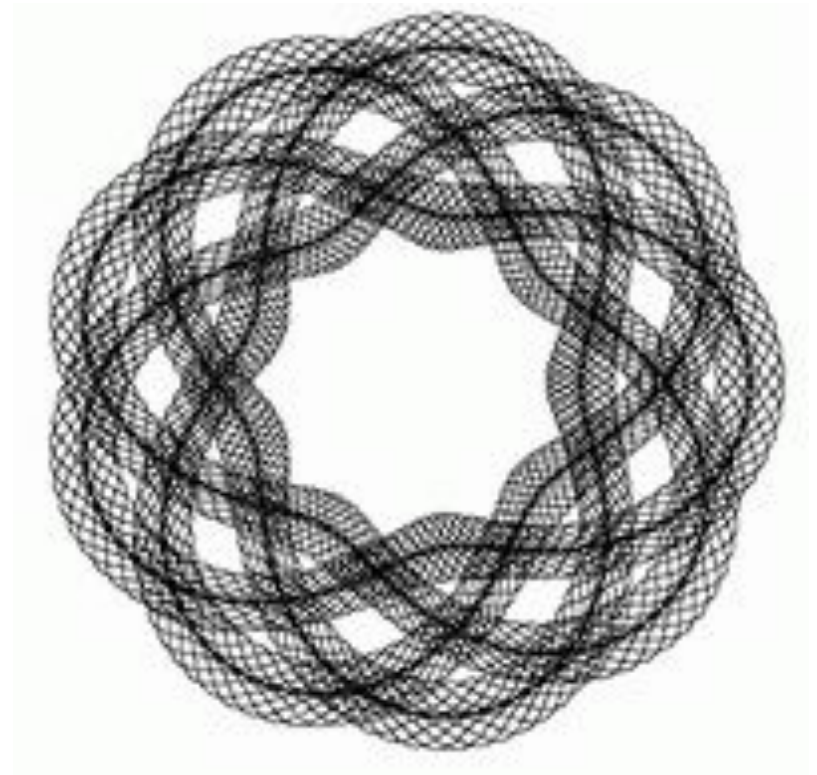
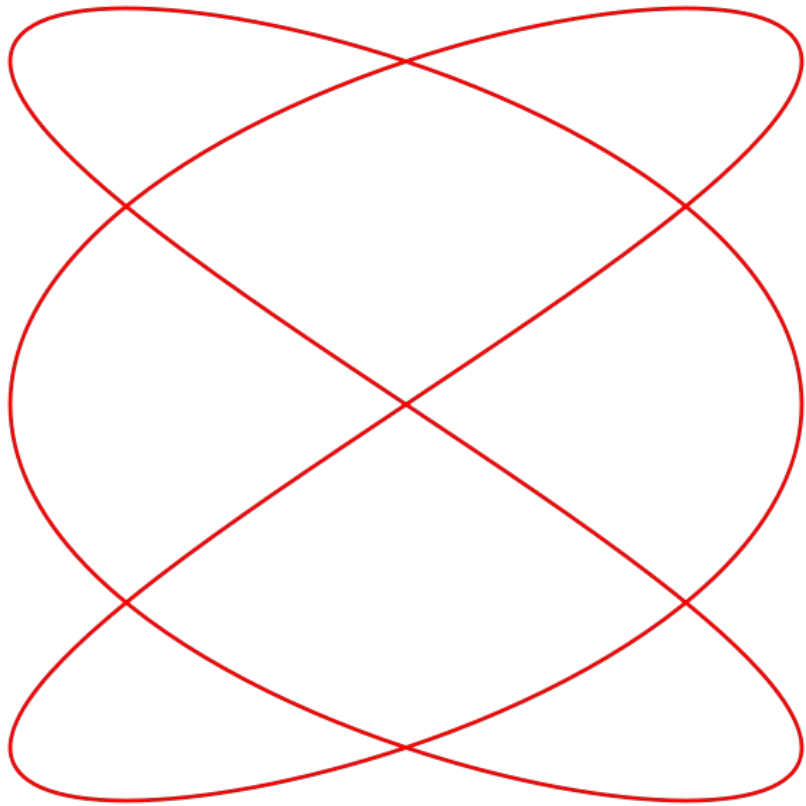
- Если $A=B$, то эллипс вырождается в окружность – это колебания поляризованные по кругу.
- В общем случае произвольной разности фаз α получаем уравнение эллипса, но с повернутыми осями.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

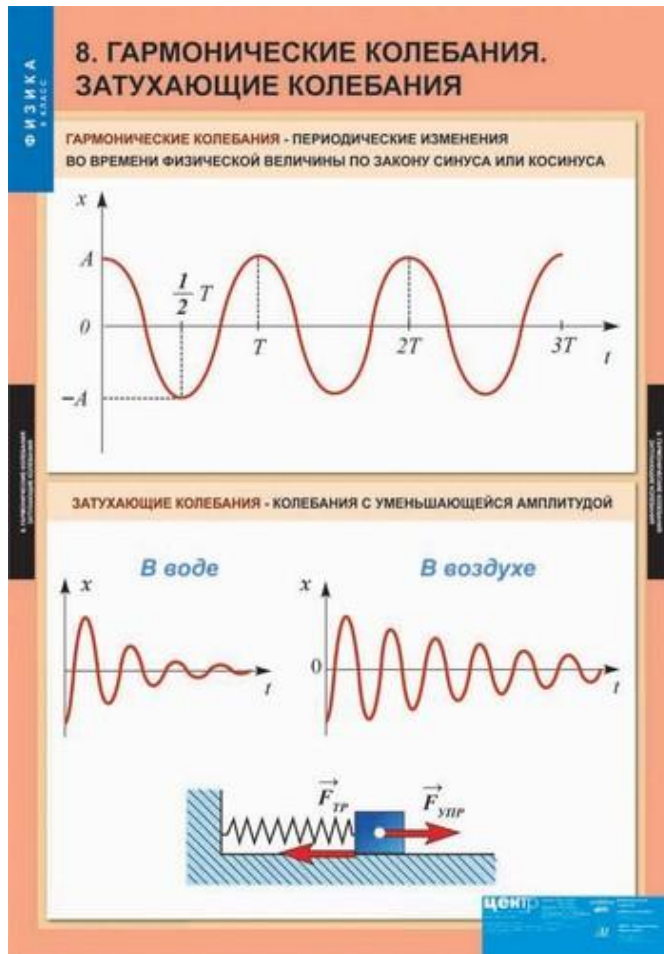


- Фигуры Лиссажу – замкнутые траектории результирующего колебания, если частоты складываемых колебаний различны (могут быть различны разности фаз).

Фигуры Лиссажу



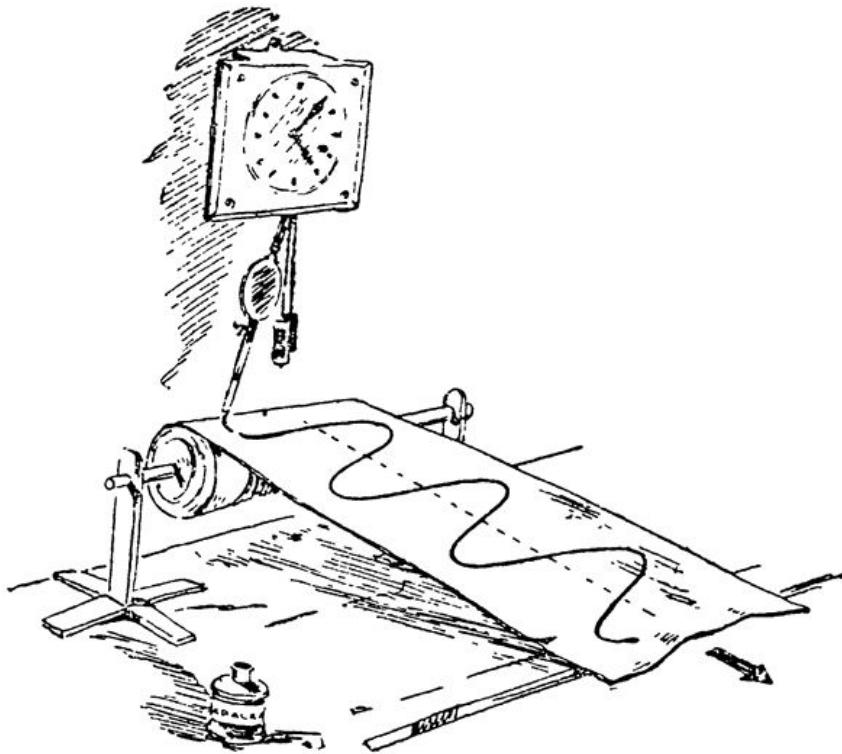
Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний



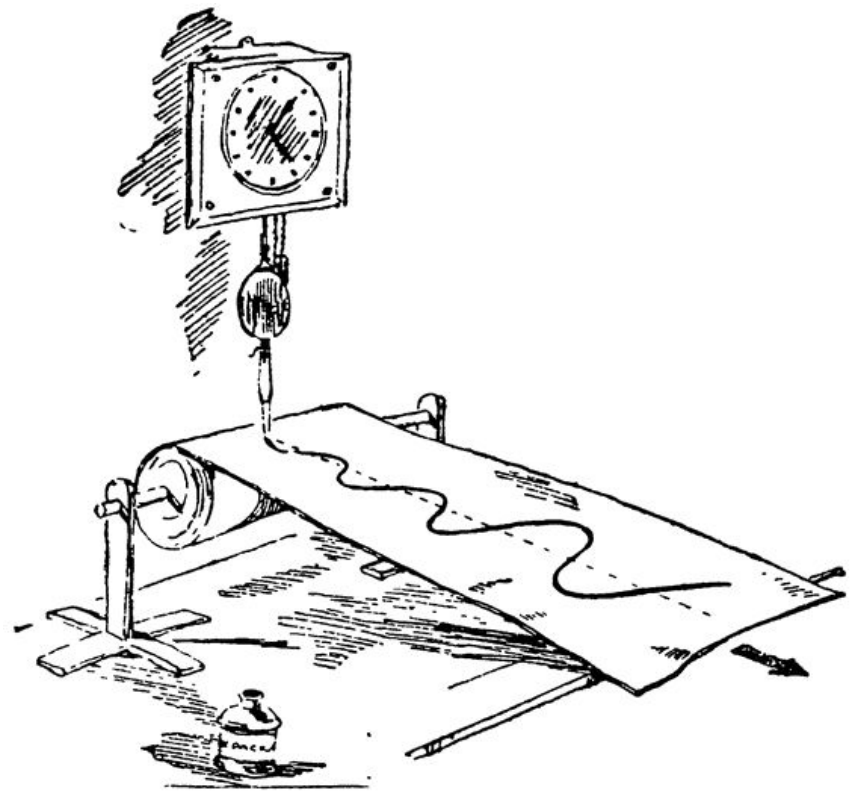
- Свободные затухающие колебания- это колебания амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.
- Простейшим механизмом уменьшения энергии колебаний является превращение ее в теплоту вследствие трения в механических колебательных системах.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

Незатухающие колебания

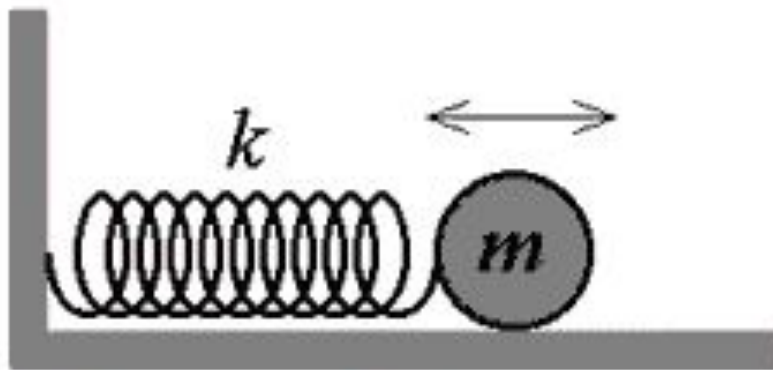


Затухающие колебания



Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

Линейная система – пружинный маятник



Пружинный маятник

- Закон затухающих колебаний определяется свойствами колебательных систем.
- Рассматривают **линейные системы** – идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие свойства системы в ходе процесса не изменяются.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0,$$

(1)

- s – колеблющаяся величина (переменная) – смещение, заряд и др.
- $\delta = \text{const}$ – коэффициент затухания,
- ω_0 - циклическая частота свободных незатухающих колебаний,
- $\delta = 0$ – отсутствие потерь энергии.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

- Решение уравнения (1) имеет вид

$$s = e^{-\delta t} u, \quad (2)$$

где $u=u(t)$ – новая переменная

- Дифференцируем ур. (2) дважды и используя (1)
- Получаем
- $u \ddot{+} (\omega_0^2 - \delta^2) u = 0$

- Пусть $\delta < \omega_0$,
- Тогда вводим параметр
- $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$
- Получаем уравнение
- $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ –
- - уравнение гармонических колебаний, решение которого
- $u = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

- Общее решение уравнения затухающих колебаний

- $S = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$

- $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

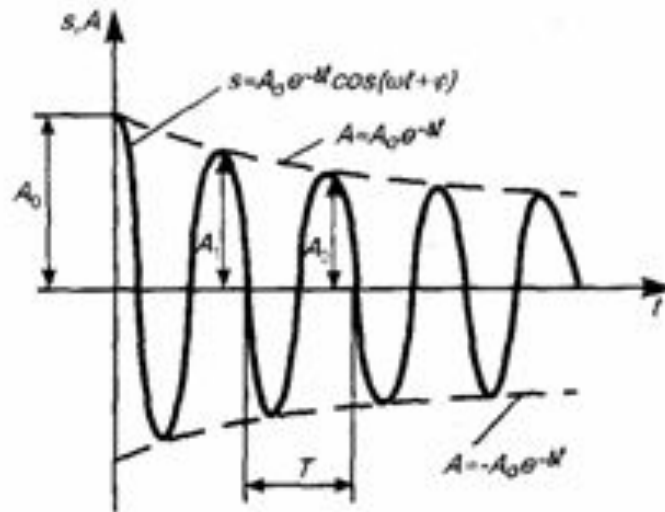
- Пусть $\delta \ll \omega_0$ -
- В этом случае движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой
- $A = A_0 e^{-\delta t}$
- A_0 - начальная амплитуда

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

- δ – коэффициент затухания определяет скорость уменьшения амплитуды колебаний,
- $\tau = \frac{1}{\delta}$ – время релаксации – промежуток времени, за который амплитуда уменьшается в e раз.

- Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания не являются периодическими и к ним нельзя применять понятие периода или частоты.
- Однако, если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний



- Тогда период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

- Если $A(t)$ и $A(t + T)$ –
- амплитуды двух
последовательных
колебаний, соответствующих
моментам времени,
отличающихся на период, то
соотношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta t} - \text{декремент затухания,}$$

- Логарифм декремента затухания

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta t = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

- логарифмический декремент затухания

N_e - число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

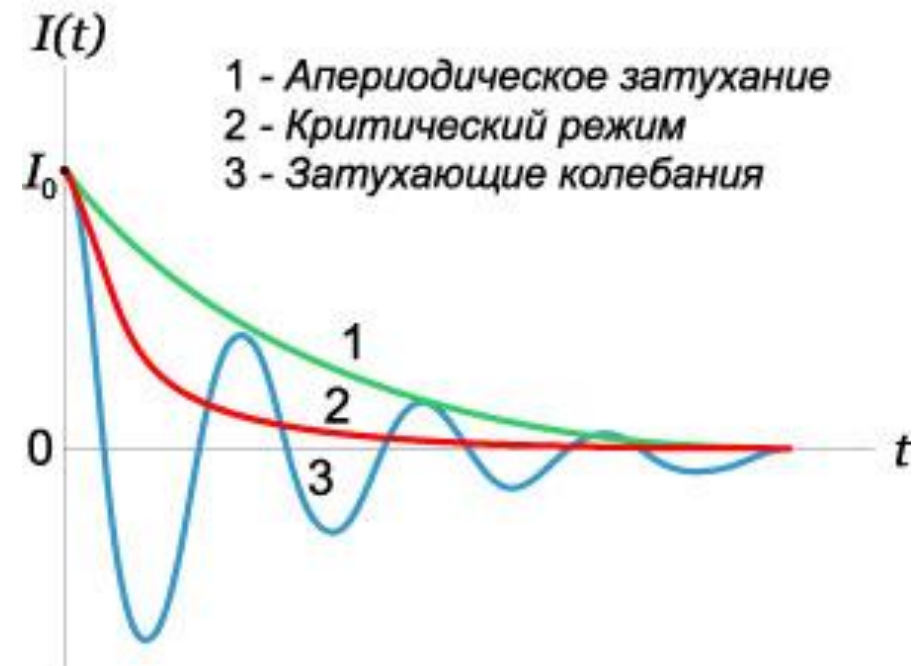
- Логарифмический декремент затухания – постоянная для данной колебательной системы.
- Для характеристики колебательной системы пользуются понятием добротности Q

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (3)$$

при $\delta \ll \omega_0$ $T = T_0$.

- Из формулы (3) следует, что добротность пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за время релаксации.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний



- При увеличении затухания частота колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ стремится к нулю.
- При $\delta \rightarrow \omega_0$ период обращается в бесконечность, т.е. движение перестает быть периодическим
- При $\delta \geq \omega_0$ движение носит аперриодический характер – выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний.

Свободные затухающие колебания пружинного маятника

- Для пружинного маятника массой m , совершающего малые колебания под действием упругой силы

$$F_{\text{тр}} = - r v = - r \dot{x}$$

r – коэффициент сопротивления, знак (-) указывает на противоположные направления силы трения и скорости.

- Закон движения маятника

$$m \ddot{x} = - k x - r \dot{x}$$

Используя $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и $\delta = \frac{r}{2m}$

Получаем дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Свободные затухающие колебания пружинного маятника

- Маятник колеблется по закону

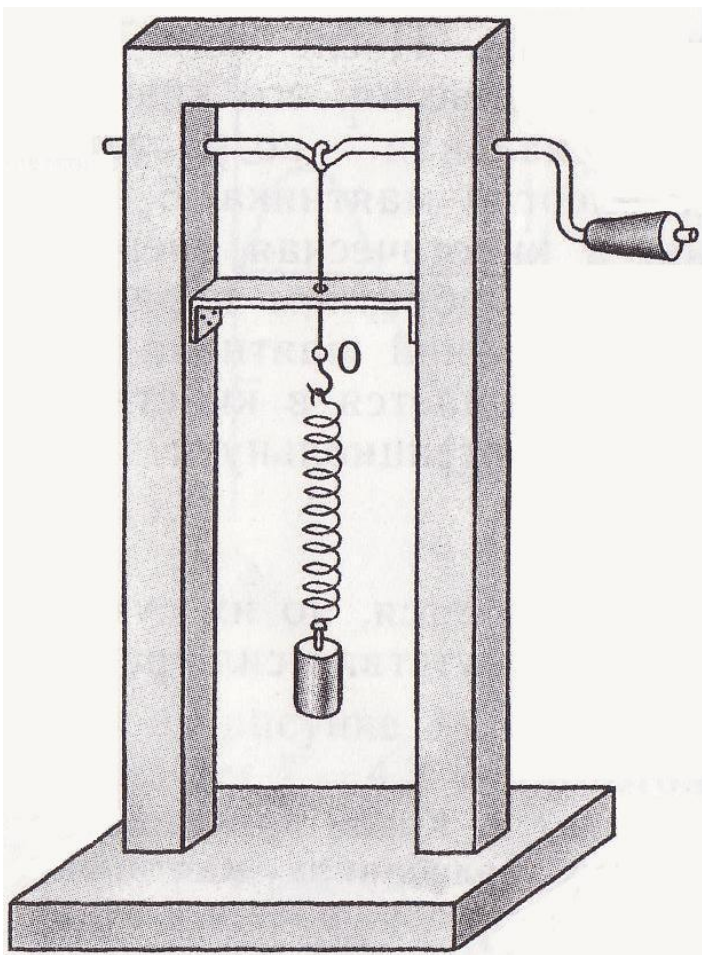
- $x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$

с частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$

Добротность пружинного маятника

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{r} \sqrt{km}$$

Вынужденные колебания



- Если на колебательную систему действует внешняя периодическая сила, то в системе устанавливаются незатухающие колебания, которые называются **вынужденными**.
- Внешняя вынуждающая сила $F = F_M \cos \omega t$
- Где F_M - амплитуда силы,
- ω – ее круговая частота.

Вынужденные колебания

- С учетом вынуждающей силы закон движения для пружинного маятника запишется в виде

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_M \cos \omega t$$

Используя $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и $\delta = \frac{r}{2m}$

Получаем уравнение

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \left(\frac{F_M}{m}\right) \cos \omega t$$

- Опыт показывает, что при воздействии на пружинный маятник вынуждающей силы груз совершает установившиеся гармонические колебания с частотой этой силы.

Вынужденные колебания

- Таким образом вынужденные колебания происходят по закону

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

- Можно показать, что при $\varphi = 0$ амплитуда смещения

$$A = \frac{F_M}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (4)$$

Так как амплитуда – положительная величина, то выражение (4) имеет смысл, когда круговая частота вынуждающей силы ω меньше собственной круговой частоты системы ω_0 ($\omega < \omega_0$). В этом случае колебания системы происходят в одной фазе с колебаниями силы.

Если $\omega > \omega_0$, то колебания системы происходят в противофазе с колебаниями силы ($\varphi = -\pi$), а для амплитуды смещения берут модуль

Резонанс

- При совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой системы ($\omega = \omega_0$) выражение (4) теряет смысл, ибо делить на нуль нельзя.

- $$A = \frac{F_M}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

- При $\omega \rightarrow \omega_0$ $A \rightarrow \infty$ что не имеет физического смысла.
- Это означает, что в данном случае нельзя пренебрегать затуханием.
- Случай, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой колебательной системы, называется **резонансом**.

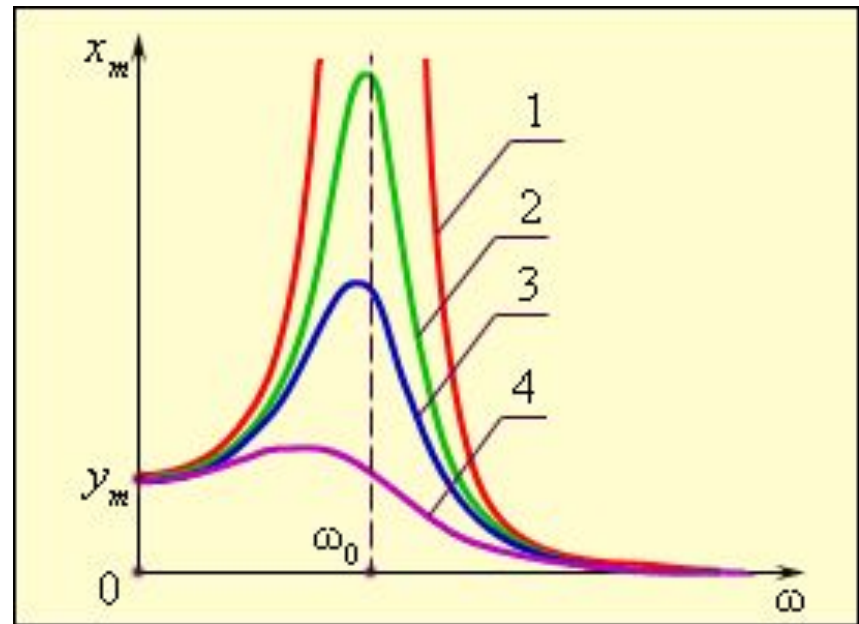
Резонанс

Резонансная амплитуда
смещения

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_M}{r\omega_0} = \frac{F_M}{m\omega_0^2} \frac{m\omega_0}{r} = Q A_{\text{стат}}$$

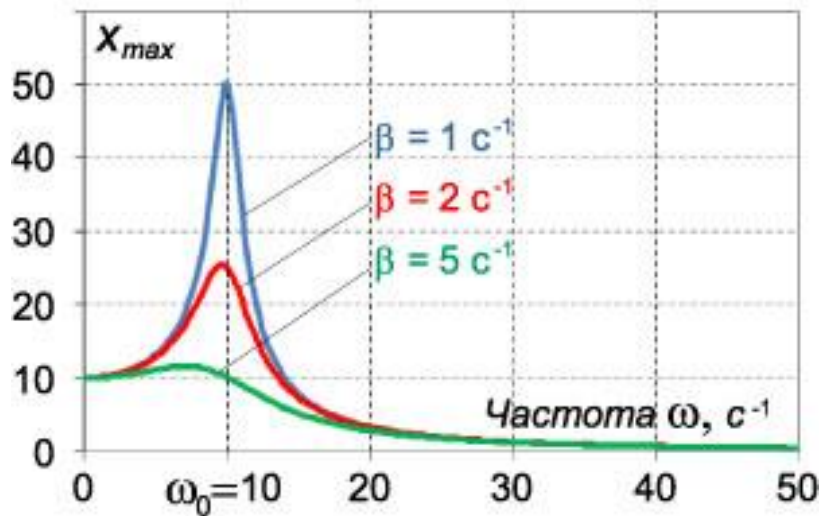
где $A_{\text{стат}} = \frac{F_M}{k} = \frac{F_M}{m\omega_0^2}$ -

Отклонение под действием
постоянной силы.



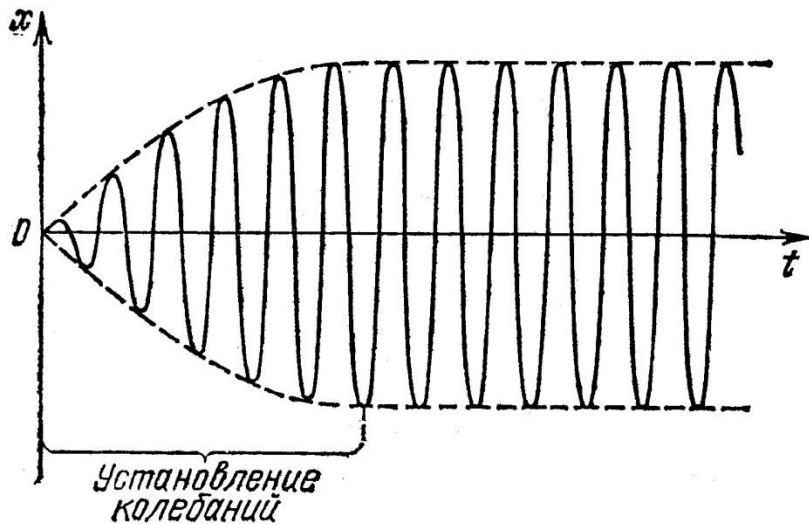
Резонанс

Резонансные кривые при различных коэффициентах затухания β



- Вдали от резонанса график строится по формуле (4).
- При частотах, близких к собственной частоте, амплитуда A близка к резонансной амплитуде.

Процесс установления вынужденных колебаний



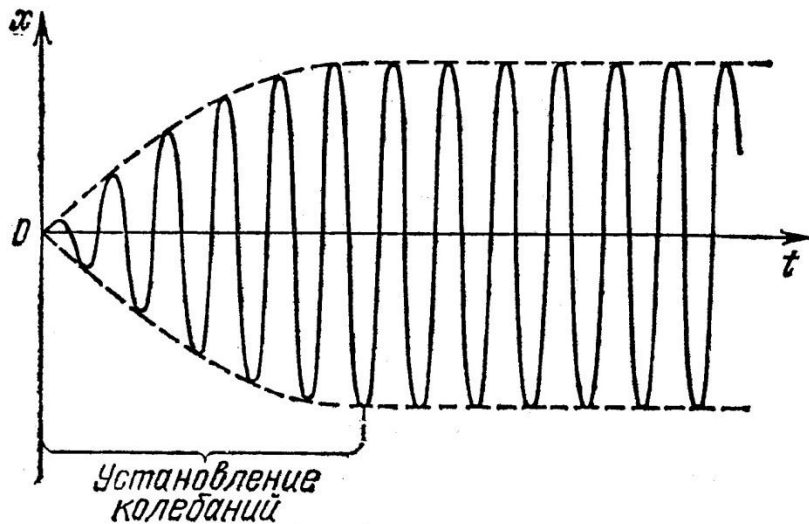
- Раскачка колебаний при резонансе происходит по закону

$$X = \frac{F_M t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t$$

ω_0 - частота свободных колебаний.

При отсутствии трения наблюдался бы беспредельный рост амплитуды.

Процесс установления вынужденных колебаний



- На самом деле рост амплитуды продолжается лишь до тех пор, пока работа сил трения не уравнивает работу вынуждающей силы.
- Этим условием и определяется установившаяся резонансная амплитуда.
- Время нарастания колебаний при резонансе вдвое больше времени релаксации свободных колебаний $\tau_{рез} = 2\tau$