

МЕХАНИКА ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Раздел технической гидромеханики,
изучающий законы движения
жидкости, называется
гидродинамикой

Основные виды движения жидкости

- Установившееся движение жидкости

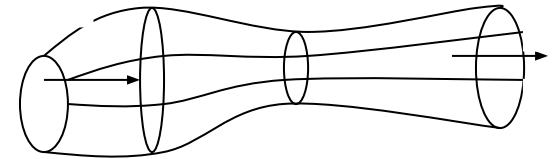
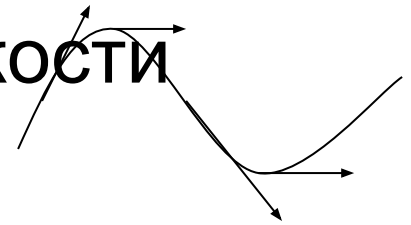
$$p = f_1(x, y, z), \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$u = f_2(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

- Неустановившееся движение жидкости

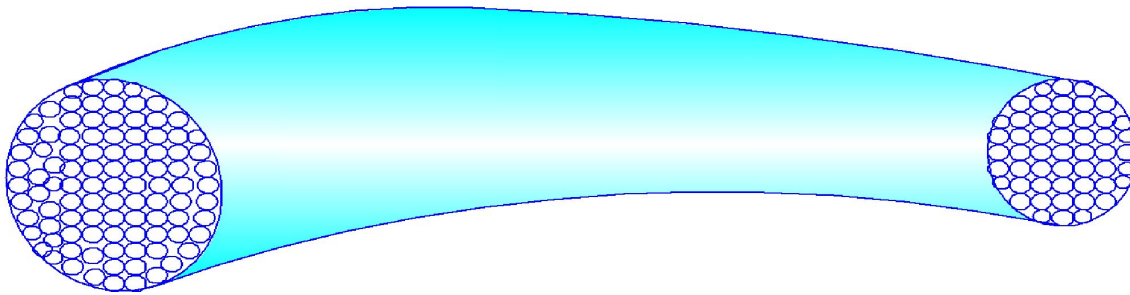
$$p = f_1(x, y, z, t), \quad u = f_2(x, y, z, t),$$

Различают напорные и безнапорные течения жидкости



Основные понятия струйчатого движения

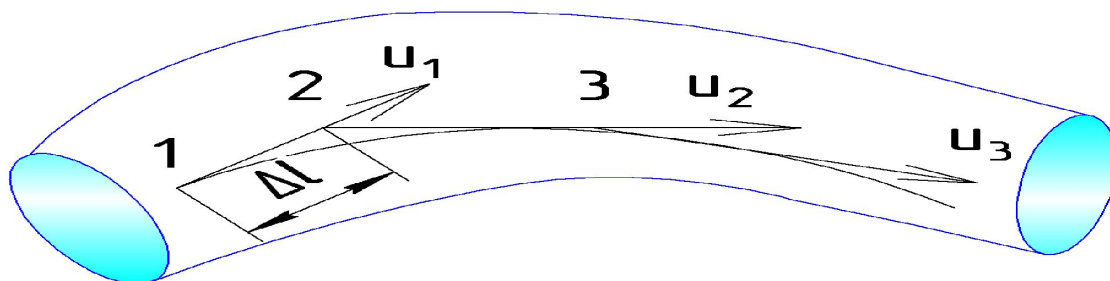
- *Траекторией* жидкой частицы называют кривую линию, которую она описывает при движении.



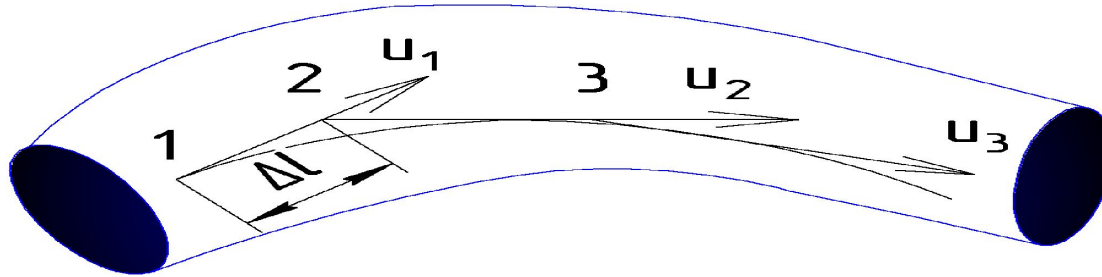
Струйчатая модель жидкости

- При этом *жидкой частицей* называют такой малый объем жидкости, для которого можно пренебречь изменением его формы


- Касательная кривая, проведенная к векторам движения частиц жидкости и характеризующая направление движения ряда последовательно расположенных частиц в жидкости в данный момент времени, называется *линией тока*.



Малый замкнутый контур образованный линиями тока \rightarrow трубка тока.



- Масса жидкости, движущаяся внутри трубки тока, образует *элементарную струйку*.

- 1) скорости и площади поперечных сечений струек в одном живом сечении не меняются вследствие их малости;
- 2) скорости и площади поперечных сечений струек в различных живых сечениях могут меняться, однако произведение скорости v отдельных частиц струйки на площади их поперечного сечения S остаются постоянными  (уравнение неразрывности элементарной струйки).

Методы изучения движения жидкости

- В гидромеханике существуют два метода изучения движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера.
- 1. Метод Лагранжа заключается в изучении движения каждой отдельной частицы жидкости. Движение определяется положением частицы жидкости в функции от времени t . Движение частицы будет определено, если точно определить координаты x , y , и z в заданный момент времени t , что дает возможность построить траекторию движения частицы жидкости.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad U_x = \frac{dx}{dt} \quad U_y = \frac{dy}{dt} \quad U_z = \frac{dz}{dt}$$

- Местная скорость
$$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$$

Метод Эйлера

Метод Эйлера основан на изучении поля скоростей, под которым понимается значение величины и скоростей во всех точках пространства, занятого движущейся жидкостью.

- Переменными Эйлера являются значения скоростей U_x , U_y , U_z , которые определяются в зависимости от координат точек пространства и времени, т. е.

$$U_x = f(x, y, z, t)$$

$$U_y = f(x, y, z, t)$$

$$U_z = f(x, y, z, t)$$

Расход жидкости

- Объем жидкости V , проходящей через живое сечение трубопровода в единицу времени t , называют расходом $Q = V/t$.

$$dQ = U d\omega \quad Q = \int_{\omega} U d\omega \quad \left[\frac{\text{м}^3}{\text{с}} \right]; \left[\frac{\text{л}}{\text{мин}} \right].$$

- Средняя скорость движения потока через сечение ω

$$U = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int U d\omega}{\omega} \quad \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right].$$

Уравнение неразрывности для элементарной струйки

$$u_1 \cdot s_1 = s_2 \cdot u_2 = s_i \cdot u_i = \text{const}$$

- Поток жидкости есть совокупность элементарных струек. Эта масса непрерывная (неразрывна) и движется в лювсья в одном направлении

Закон неразрывности потока

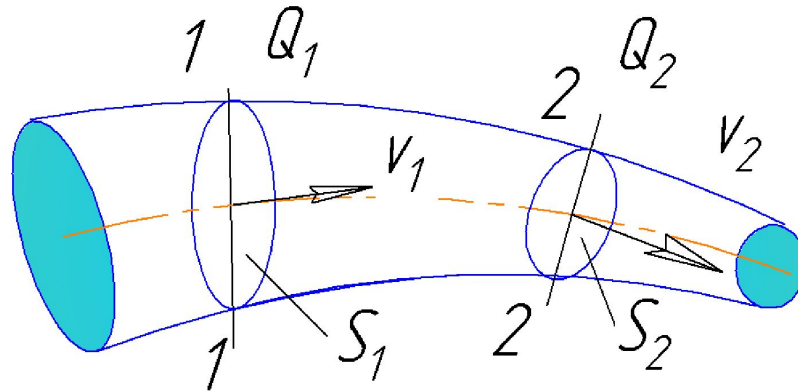


Схема потока

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 = \rho_i S_i v_i = const$$

где v_1, v_2, v_i – скорости жидкости в сечениях 1, 2 и i ;

S_1, S_2, S_i – площади двух поперечных сечений трубопровода;

ρ_1, ρ_2, ρ_i – плотности жидкости.

Дифференциальная форма уравнения неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0.$$

• или

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} v = 0.$$

Уравнение неразрывности при ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТИ

- При $\rho = \text{const}$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0,$$

- или в краткой форме

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

Уравнения движения идеальной жидкости

- Проекциями отнесенной к массе объема жидкости силы инерции на оси x , y , z

являются: $\frac{dv_x}{dt}$; $\frac{dv_y}{dt}$; $\frac{dv_z}{dt}$.

- Система дифференциальных уравнений Эйлера движения идеальной жидкости

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt}; \quad Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt}; \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt}.$$

Уравнение Эйлера в развернутом виде


$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z};$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y};$$

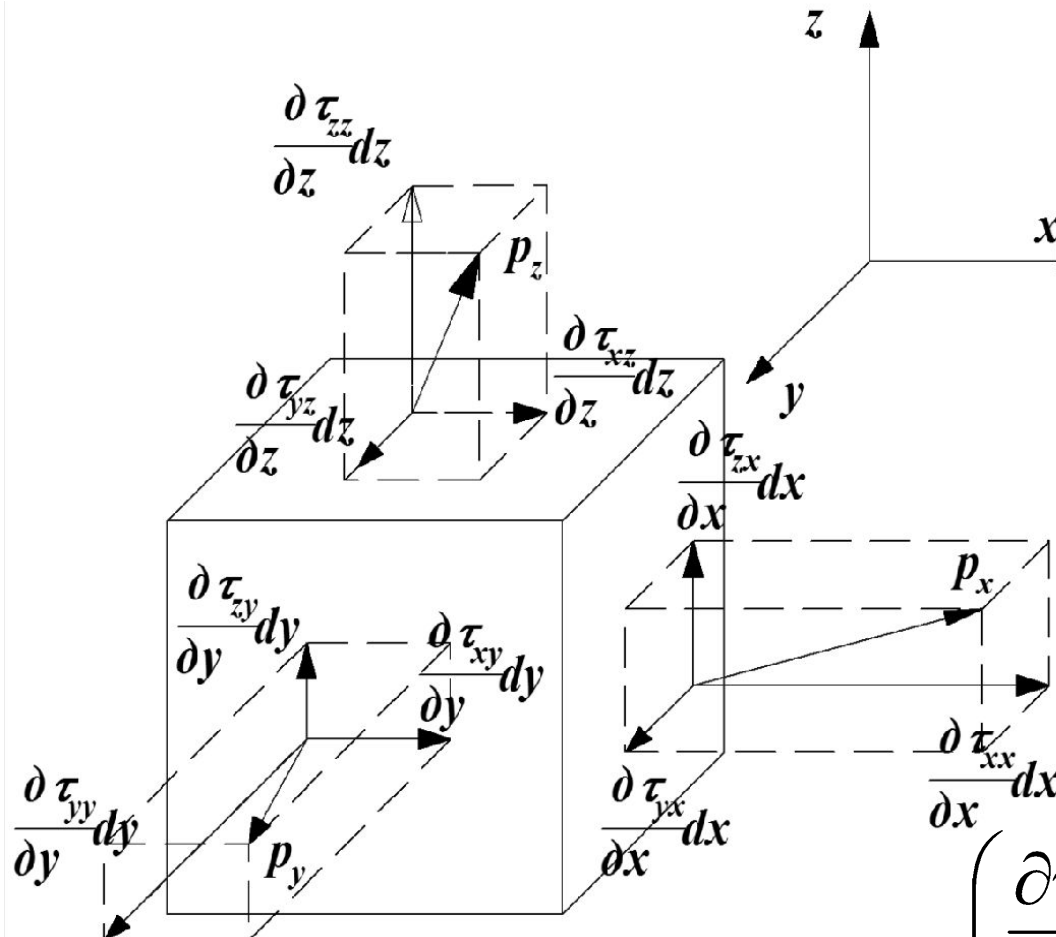
- В векторной форме вышезаписанные уравнения запишутся в следующем виде:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p.$$

- Для несжимаемой невязкой жидкости ($\rho = \text{const}$) данная система уравнений имеет четыре неизвестных v_x, v_y, v_z, p . Чтобы система стала замкнутой  уравнение неразрывности
$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0,$$

Уравнения Навье–Стокса

- Проекции на ось x сил трения действующих на прямоугольный параллелепипед дает следующее выражение:



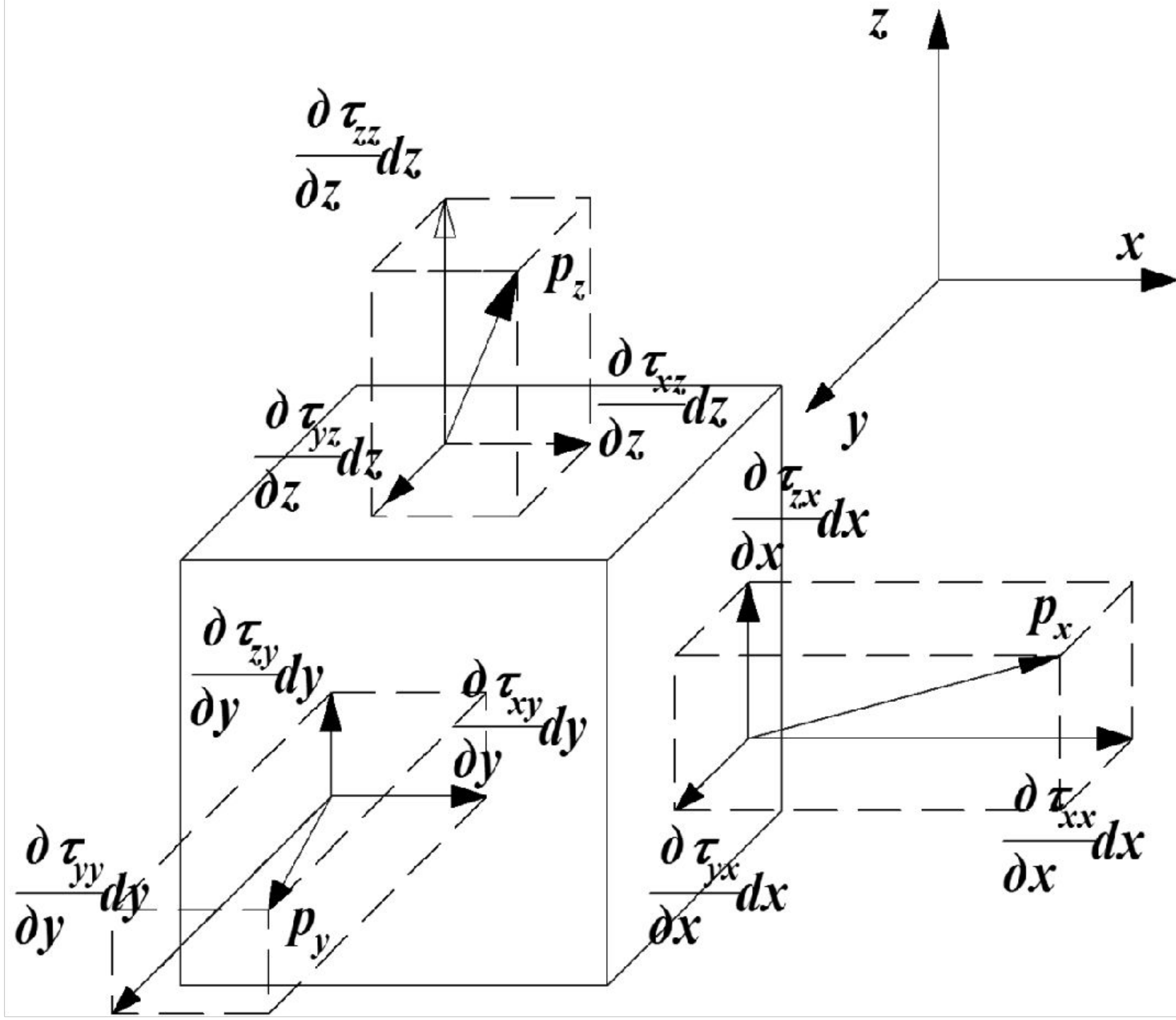
$$\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

- *Используя закон Ньютона $\tau = \mu \cdot \Delta v / \Delta l$, проекции сил трения можно записать в компонентах скорости v на оси x , y и z так:*

$$\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dx dy dz;$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dx dy dz = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) dx dy dz;$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) dx dy dz.$$



Уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right);$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).$$

В векторной форме

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{v},$$

• где

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \vec{i} +$$

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k};$$

$$+ \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \vec{k};$$

$$\text{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k};$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты осей

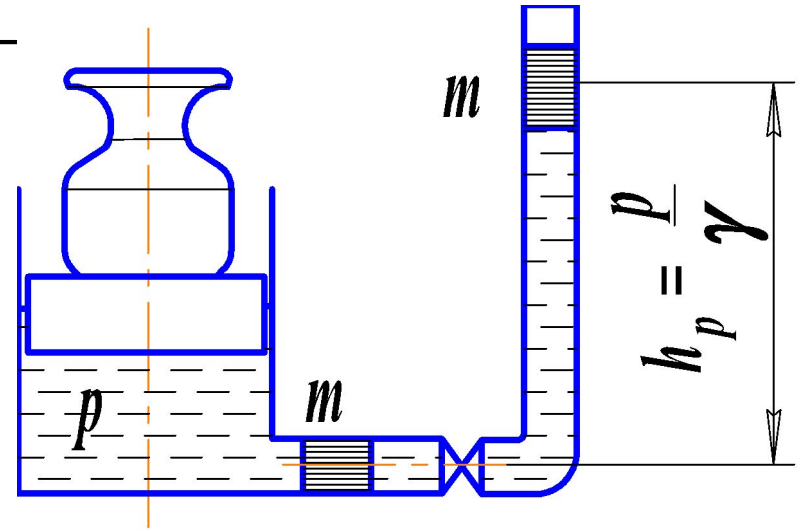
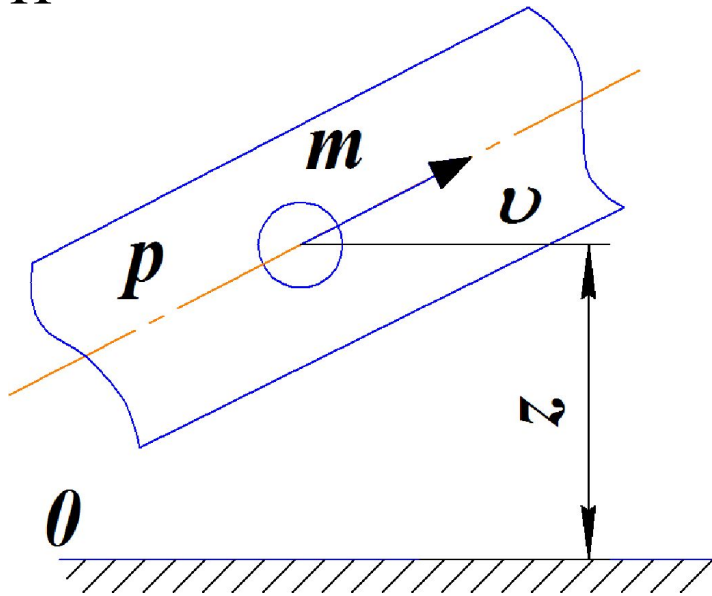
$$\nabla^2 \vec{v} = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \vec{k};$$

Энергия элементарной струйки

- Кинетическая $E_k = \frac{mv^2}{2}$
- Потенциальная

$$E_{\Pi} = m \cdot g \cdot z.$$



Энергия давления

$$E_D = p \cdot V.$$

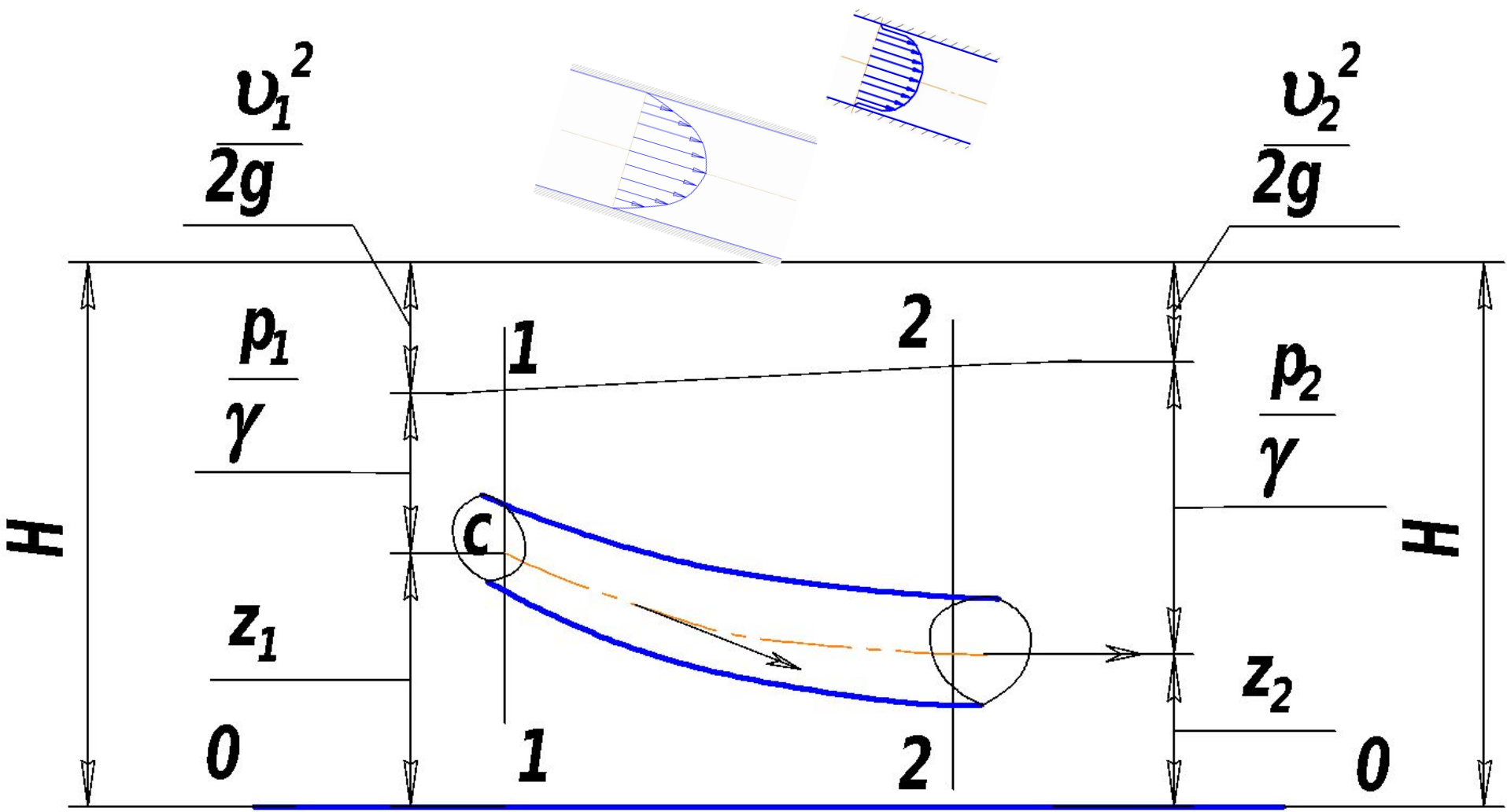
Полная механическая энергия

$$E = \frac{m \cdot u^2}{2} + m \cdot g \cdot z + p \cdot V.$$

- Так как $v = \frac{m}{\rho}$, то $E = \frac{m \cdot u^2}{2} + m \cdot g \cdot z + p \frac{m}{\rho}$.
- Удельная энергия струйки

$$\mathcal{E}_{\text{уд}} = \frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g}.$$

Энергия потока жидкости



Полная удельная энергия потока

$$\mathcal{E}_{\text{уд}} = \mathcal{E}_{\text{к}} + \mathcal{E}_{\text{п}},$$

Определим слагаемые правой части:

кинетическая энергия

$$\mathcal{E}_{\text{к}} = \frac{\sum \frac{u^2}{2g}}{n} = \alpha \frac{v^2}{2g},$$

где n – число элементарных струек;

u – скорости элементарных струек.

Коэффициент Кориолиса

- α – коэффициент Кориолиса, учитывающего неравномерность распределения скорости по сечению
- $\alpha=1,0$ – $1,13$ – для турбулентных потоков и $\alpha=2,0$ – для ламинарных потоков.
- Таким образом,
$$\mathcal{E}_K = \alpha \frac{v^2}{2g},$$
- где v – средняя скорость потока;

Потенциальная энергия

$$\mathcal{E}_{\text{п}} = z + p / \rho g.$$

- и полная удельная энергия

$$\mathcal{E}_{\text{уд}} = \alpha \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g}.$$

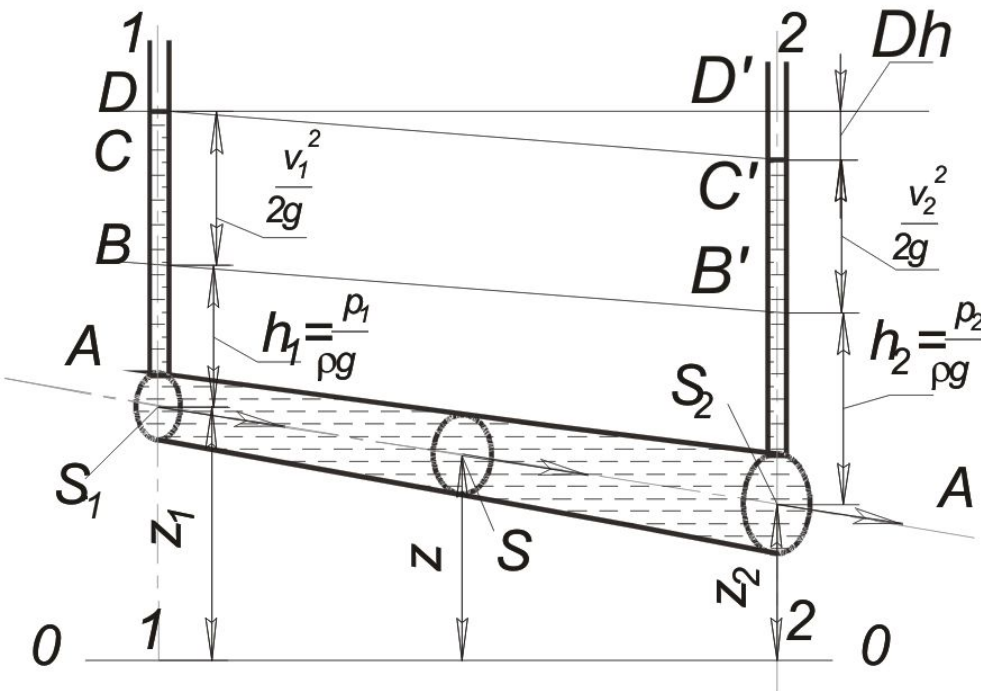
- Если использовать зависимость то

$$\mathcal{E}_{\text{уд}} = \alpha \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma}.$$

Баланс энергии

$$\mathcal{E}_{\text{уд}}^1 = \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g};$$

$$\mathcal{E}_{\text{уд}}^2 = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}.$$



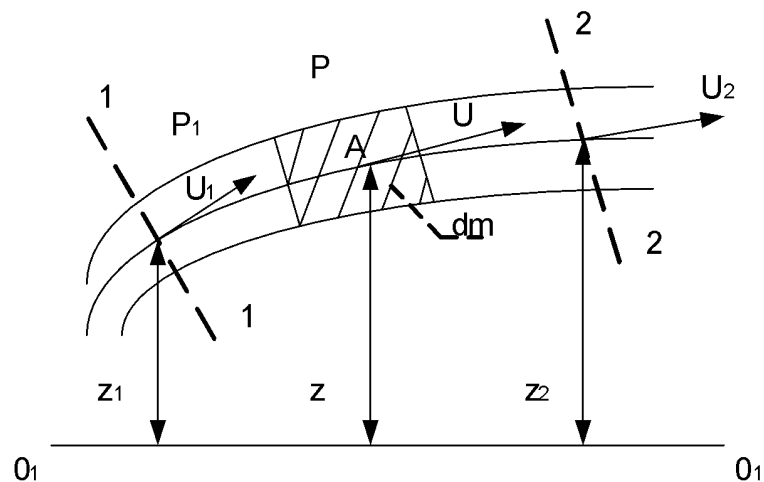
Уравнение Бернулли для реального потока жидкости

$$\alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + p_1 / \rho g = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + p_2 / \rho g + \Delta h.$$

Здесь Δh величина потерь энергии на преодоление сил трения между 1 и 2 участком

Физический смысл уравнения

- Физический (энергетический) смысл уравнения Бернулли состоит в том, что при установившемся движении жидкости сумма трех удельных энергий (положения, давления и кинетической) остается неизменной.



Гидродинамический напор

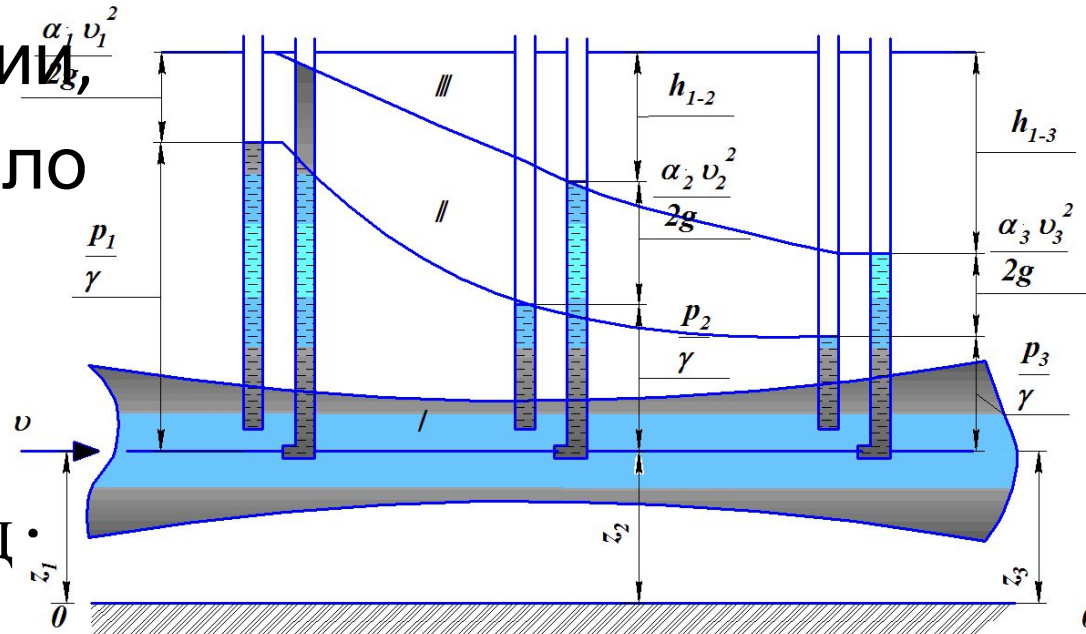
$\alpha \frac{v^2}{2g}$ - высота скоростного напора;

$\frac{p}{\rho g}$ - пьезометрическая высота, отсчитываемая в каждом сечении по пьезометру

Z – геометрическая высота положения

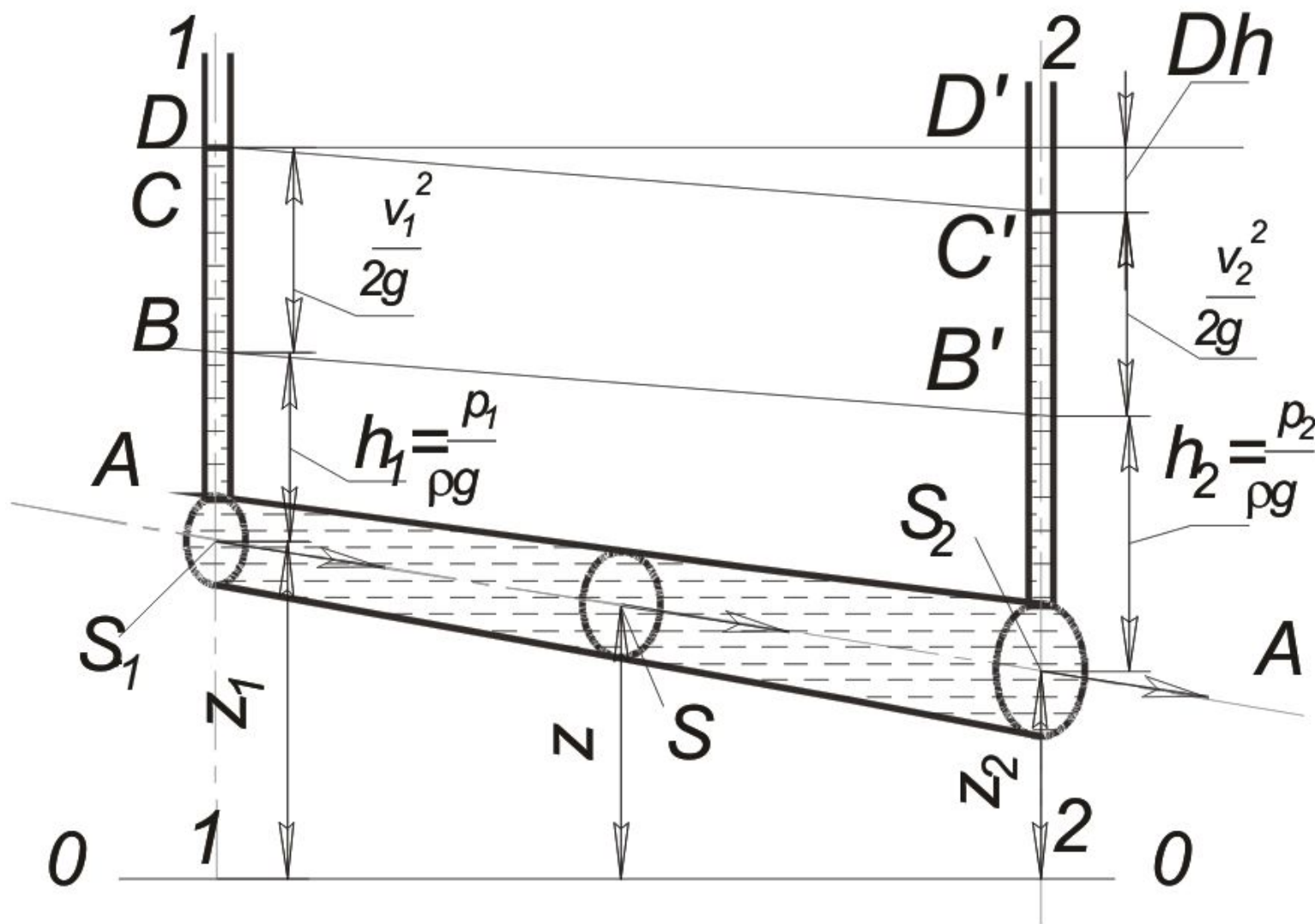
Δh – потерянный напор,

равный части энергии, превращенной в тепло



$$\alpha \frac{v^2}{2g} + z + p / \rho g = H_{ГД}$$

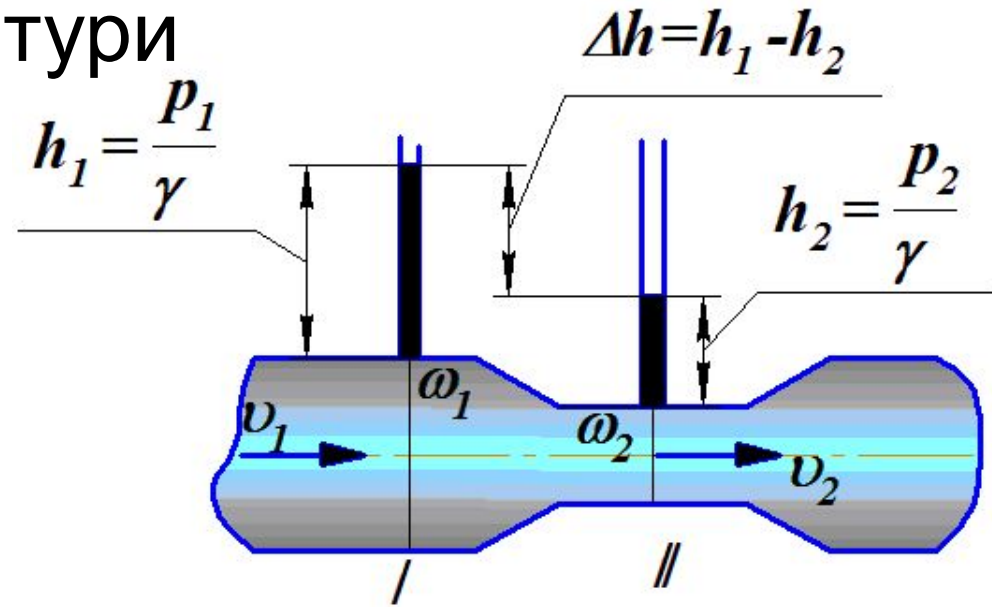
Графическое представление уравнения Бернулли



Применение уравнения Бернулли

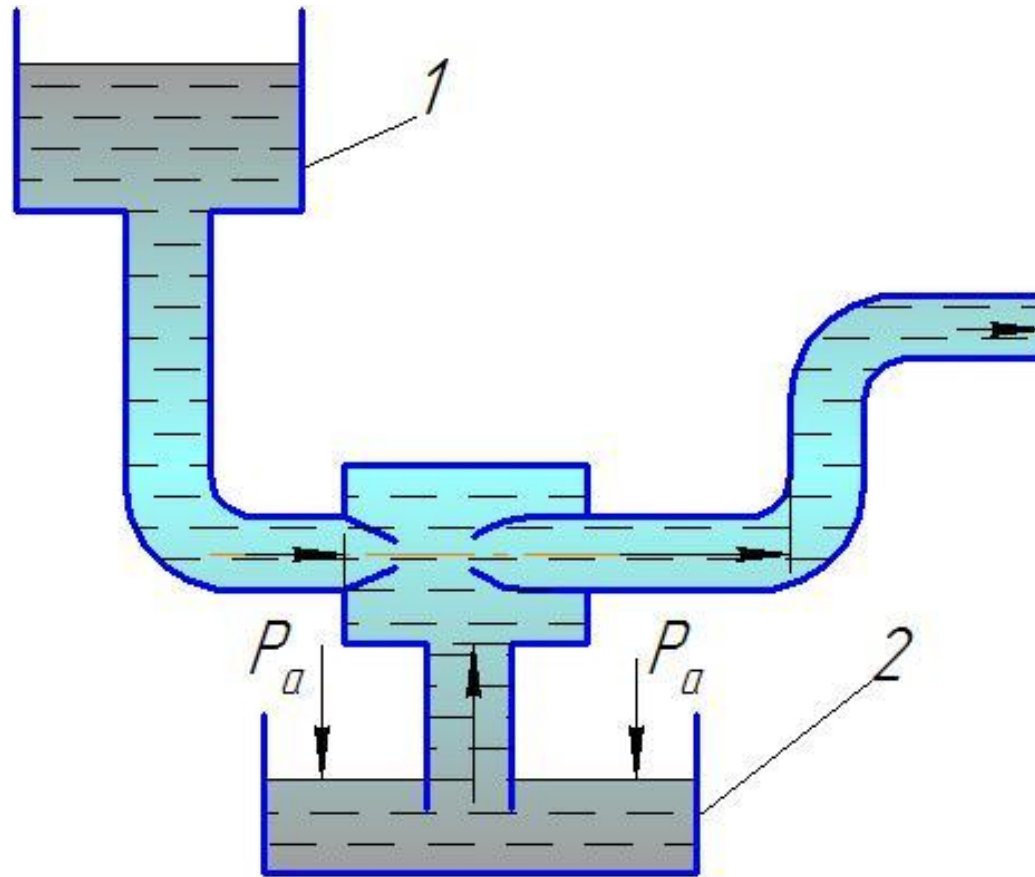
- Водомер Вентури

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}.$$



$$Q = v_1 S_1 = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{S_1}{S_2} - 1}}.$$

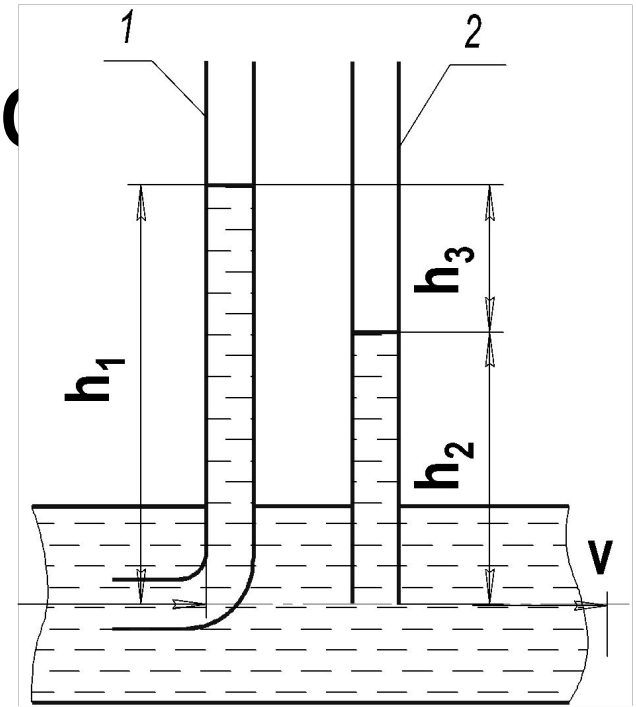
Водоструйный насос



Трубка Пито

- Полный напор трубки Пито, $h_1 = (p/\rho g) + v^2/(2g)$
- пьезометрический напор определяющей $h_2 = p/\rho g$

Скорость потока в точке расположения нижнего отверстия трубки Пито определяется высотой подъема жидкости $h_3 = v^2/(2g)$.



$$v = \sqrt{\frac{h_3}{2g}}$$

Формула Торричелли

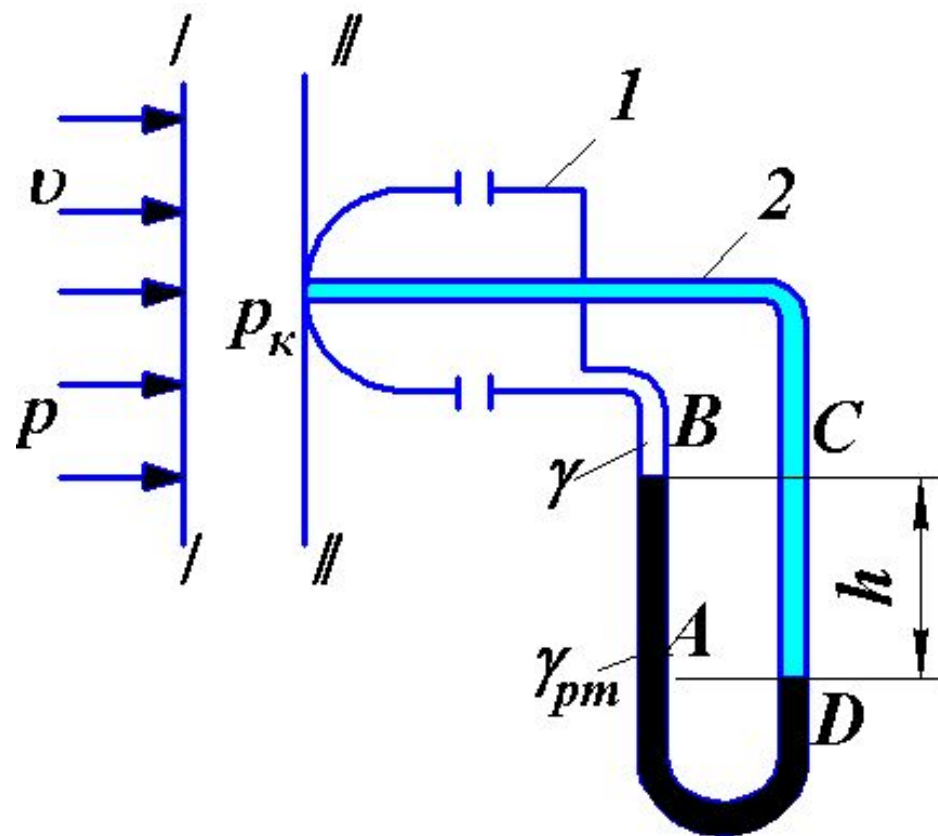
$$Q = \mu S \sqrt{2g\Delta h}, \quad Q = \mu S \sqrt{2\Delta \rho}$$

где μ – коэффициент расхода (истечения), который определяется экспериментально и зависит от вида (формы) отверстия;

S – площадь поперечного сечения отверстия;

$\Delta h = \Delta p / (\rho g)$ – напор.

Трубка Прандтля



Рекомендации по использованию уравнения Бернулли

