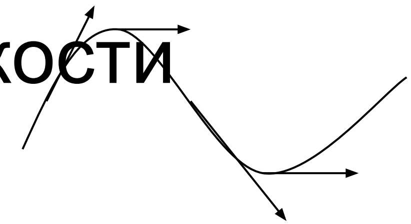
МЕХАНИКА ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Раздел технической гидромеханики, изучающий законы движения жидкости, называется *гидродинамикой*

Основные виды движения жидкости

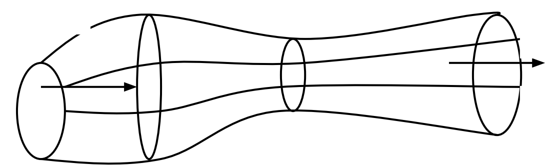
- Установившееся движение жидкости



$$p = f_1(x, y, z), \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$u = f_2(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

- Неустановившееся движение жидкости

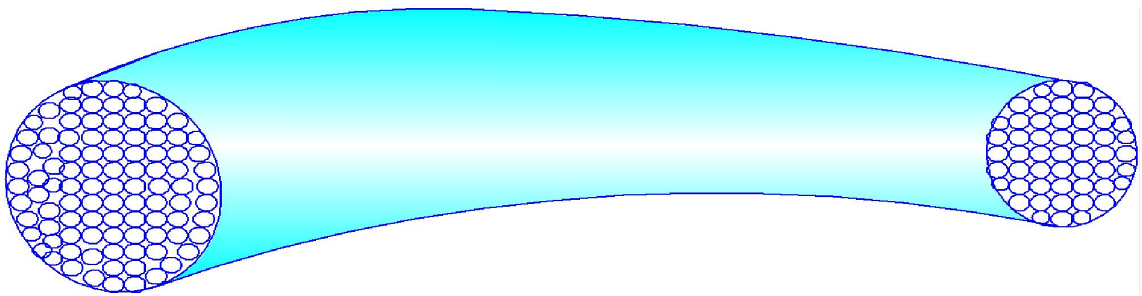


$$p = f_1(x, y, z, t), \; u = f_2(x, y, z, t),$$

Различают напорные и безнапорные течения жидкости

Основные понятия струйчатого движения

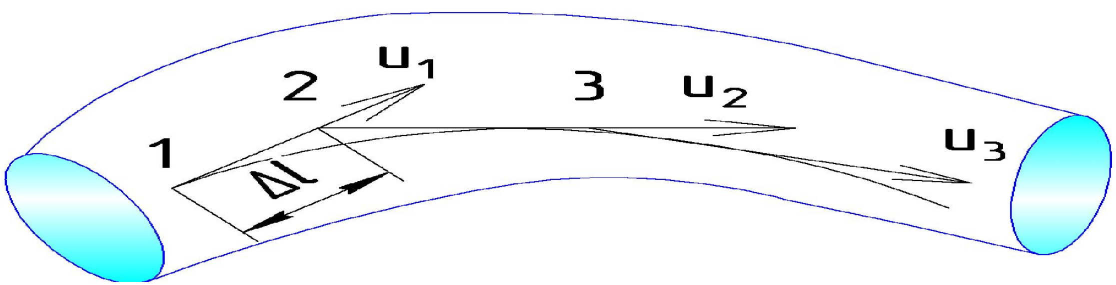
- *Траекторией* жидкой частицы называют кривую линию, которую она описывает при движении.



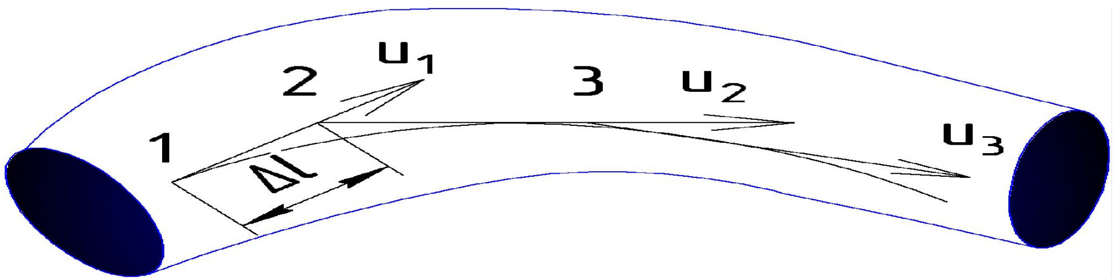
Струйчатая модель жидкости

- При этом *жидкой частицей* называют такой малый объем жидкости, для которого можно пренебречь изменением его формы

- Касательная кривая, проведенная к векторам движения частиц жидкости и характеризующая направление движения ряда последовательно расположенных частиц в жидкости в данный момент времени, называется *линией тока.*



Малый замкнутый контур образованный линиями тока ⟹ трубка тока.



- Масса жидкости, движущаяся внутри трубки тока, образует *элементарную струйку.*

- 1) скорости и площади поперечных сечений струек в одном живом сечении не меняются вследствие их малости;
- 2) скорости и площади поперечных сечений струек в различных живых сечениях могут меняться, однако произведение скорости **v** отдельных частиц струйки на площади их поперечного сечения **s** остаются постоянными → (уравнение неразрывности элементарной струйки).

Методы изучения движения жидкости

- В гидромеханике существуют два метода изучения движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера.
- 1. Метод Лагранжа заключается в изучении движения каждой отдельной частицы жидкости. Движение определяется положением частицы жидкости в функции от времени *t*. Движение частицы будет определено, если точно определить координаты *x, y,* и *z* в заданный момент времени *t*, что дает возможность построить траекторию движения частицы жидкости.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \qquad Ux = \frac{dx}{dt} \qquad Uy = \frac{dy}{dt} \qquad Uz = \frac{dz}{dt}$$

- Местная скорость $U = \sqrt{Ux^2 + Uy^2 + Uz^2}$

Метод Эйлера

Метод Эйлера основан на изучении поля скоростей, под которым понимается значение величины и скоростей во всех точках пространства, занятого движущейся жидкостью.

- Переменными Эйлера являются значения скоростей Ux, Uy, Uz , которые определяются в зависимости от координат точек пространства и времени, т. е.

$$Ux = f(x, y, z, t)$$

$$Uy = f(x, y, z, t)$$

$$Uz = f(x, y, z, t)$$

Расход жидкости

- Объем жидкости *V*, проходящей через живое сечение трубопровода в единицу времени t, называют расходом $Q = V/t$.

$$dQ = Ud\omega \qquad Q = \int_{\omega} Ud\omega \qquad [\frac{м^3}{с}];[\frac{л}{мин}].$$

- Средняя скорость движения потока через сечение ω

$$U = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int_{\omega} Ud\omega}{\omega} \qquad [\frac{м}{с}].$$

Уравнение неразрывности для элементарной струйки

$$u_1 \cdot s_1 = s_2 \cdot u_2 = s_i \cdot u_i = const$$

- Поток жидкости есть совокупность элементарных струек. Эта масса непрерывная (неразрывна) и движется в лювся в одном направлении

Закон неразрывности потока

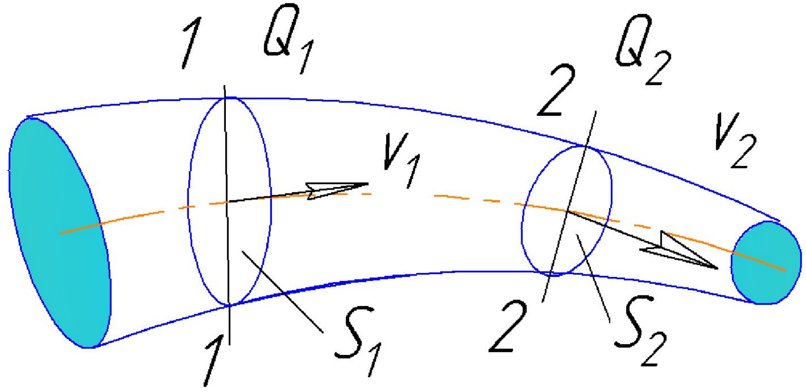


Схема потока

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 = \rho_i S_i v_i = const$$

где v_1, v_2, v_i – скорости жидкости в сечениях 1, 2 и i;
S_1, S_2, S_i – площади двух поперечных сечений трубопровода;
ρ_1, ρ_2, ρ_i – плотности жидкости.

Дифференциальная форма уравнения неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0.$$

- или

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\mathrm{div}\ v=0.$$

Уравнение неразрывности при постоянной плотности

- При ρ=const

$$\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right)=0,$$

- или в краткой форме

$$div v = 0$$

Уравнения движения идеальной жидкости

- Проекциями отнесенной к массе объема жидкости силы инерции на оси x, y, z являются: $\frac{dv_x}{dt}; \frac{dv_y}{dt}; \frac{dv_z}{dt}.$
- Система дифуравнений Эйлера движения идеальной жидкости

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt}; \qquad Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt}; \qquad Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt}.$$

Уравнение Эйлера в развернутом виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};
\end{aligned}\right\}$$

- В векторной форме вышезаписанные уравнения запишутся в следующем виде:

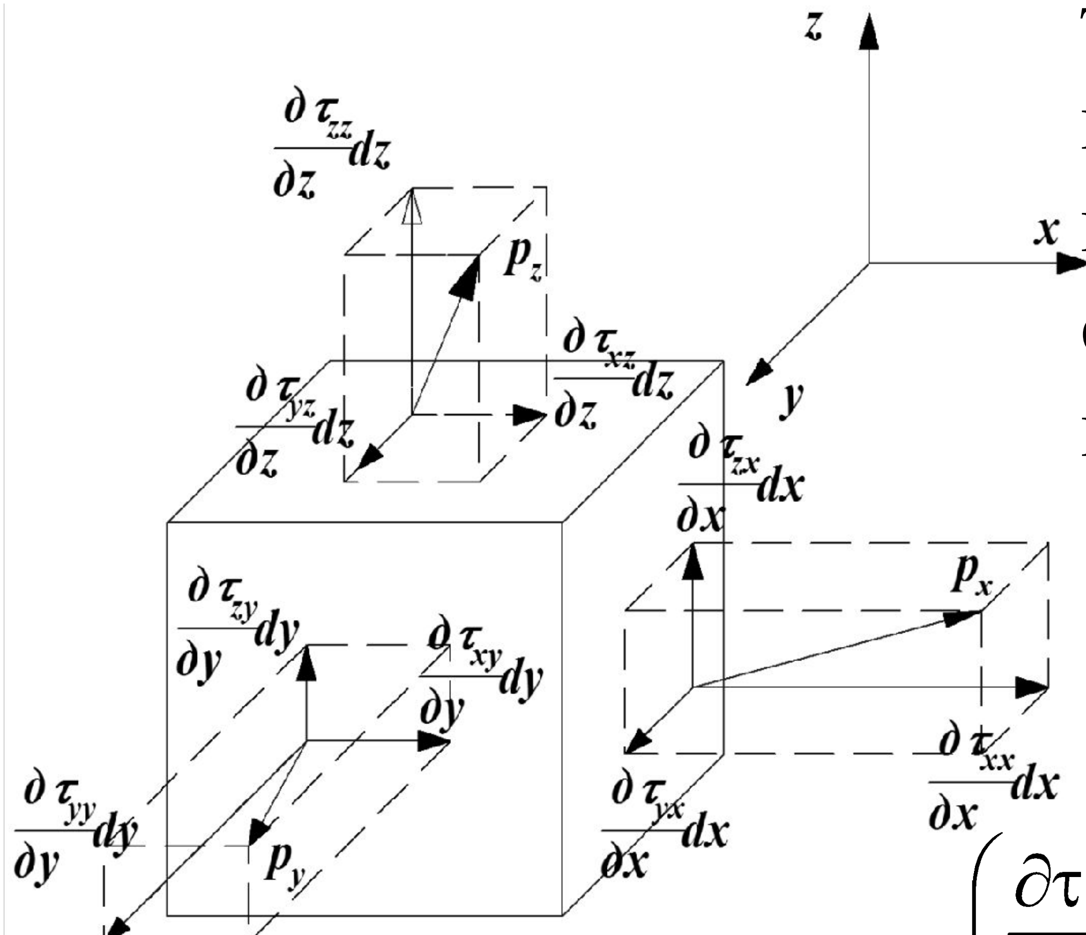
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p.$$

- Для несжимаемой невязкой жидкости (ρ=const) данная система уравнений имеет четыре неизвестных $v_x, v_y, v_z,$ p. Чтобы система стала замкнутой → уравнение неразрывности

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0,$$

Уравнения Навье–Стокса

- Проекции на ось x сил трения действующих на прямоугольный параллелепипед дает следующее выражение:



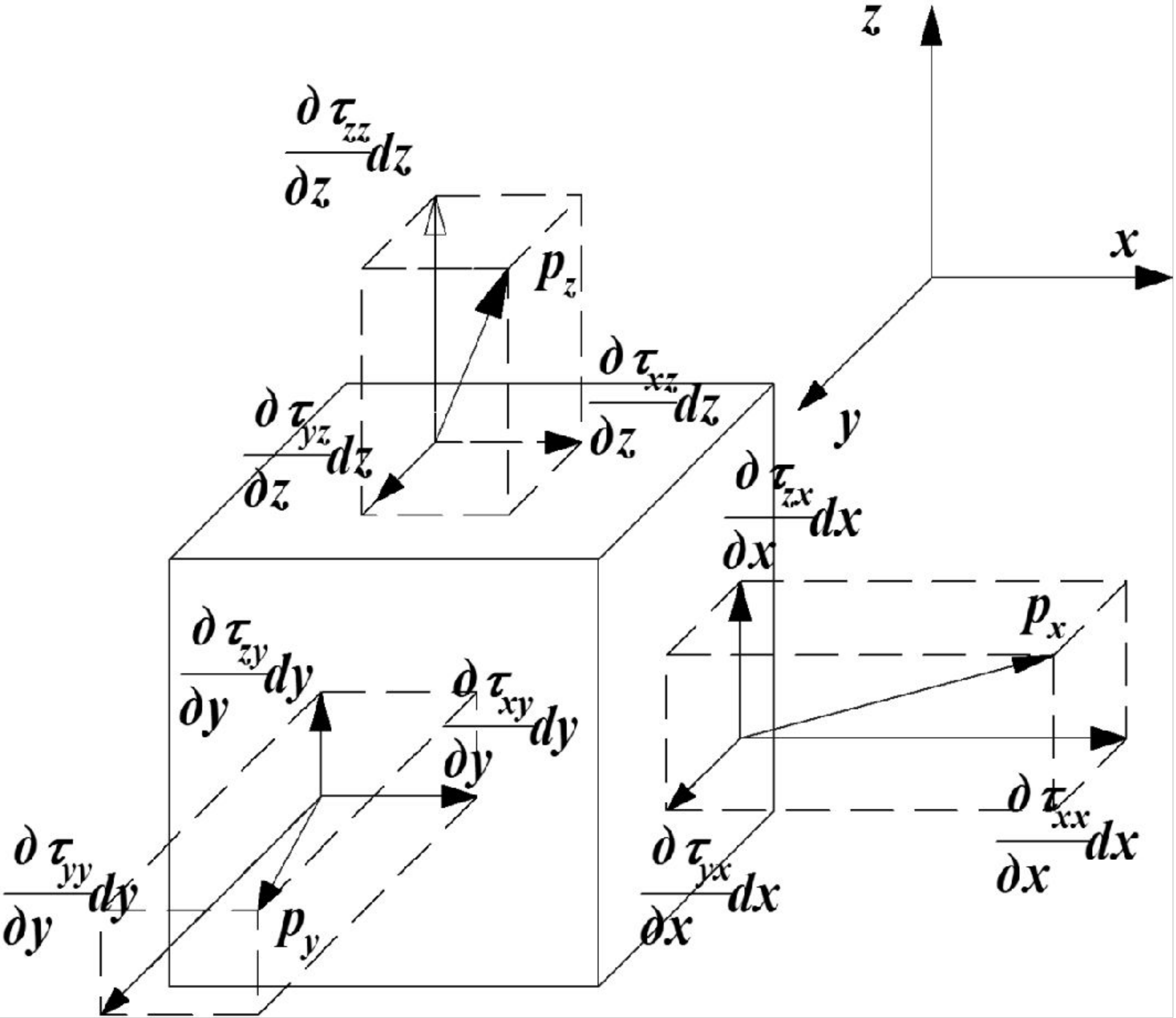
$$\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right)dxdydz,$$

- *Используя закон Ньютона* $\tau=\mu\cdot\Delta v/\Delta l$, *проекции сил трения можно записать в компонентах скорости v на оси x, y и z так*:

$$\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)dxdydz=\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)dxdydz;$$

$$\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)dxdydz=\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)dxdydz;$$

$$\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right)dxdydz=\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)dxdydz.$$


z
x
y
$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}dz$
p_z
$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}dz$
$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}dz$
$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}dx$
p_x
$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}dy$
$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}dy$
$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx$
$\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}dy$
$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}dx$
p_y

Уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right).$$

В векторной форме

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\nabla^2\vec{v},$$

- где

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k};$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\vec{k};$$

$$\mathrm{grad}\,p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k};$$

$$\nabla^2\vec{v} = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)\vec{j} +$$

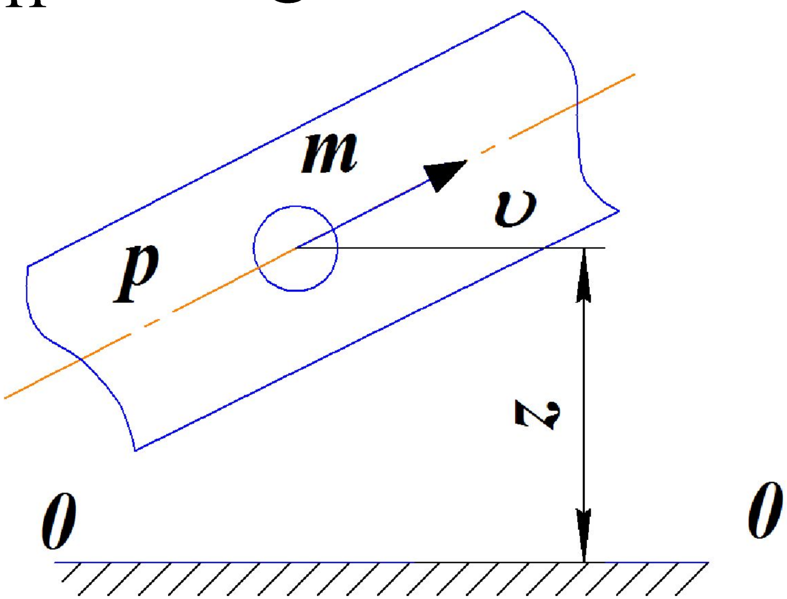
$$+\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\vec{k};$$

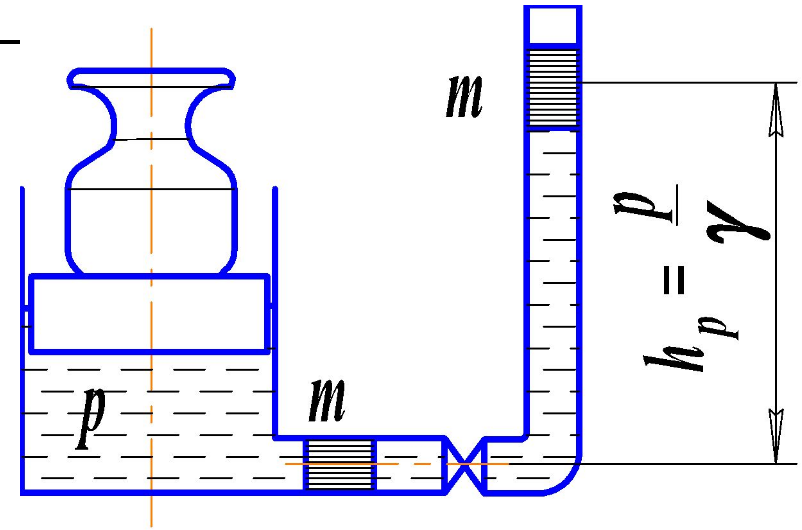
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты осей

Энергия элементарной струйки

- Кинетическая $E_k = \frac{mv^2}{2}$
- Потенциальная

$$E_П = m \cdot g \cdot z.$$





Энергия давления

$$E_D = p \cdot V.$$

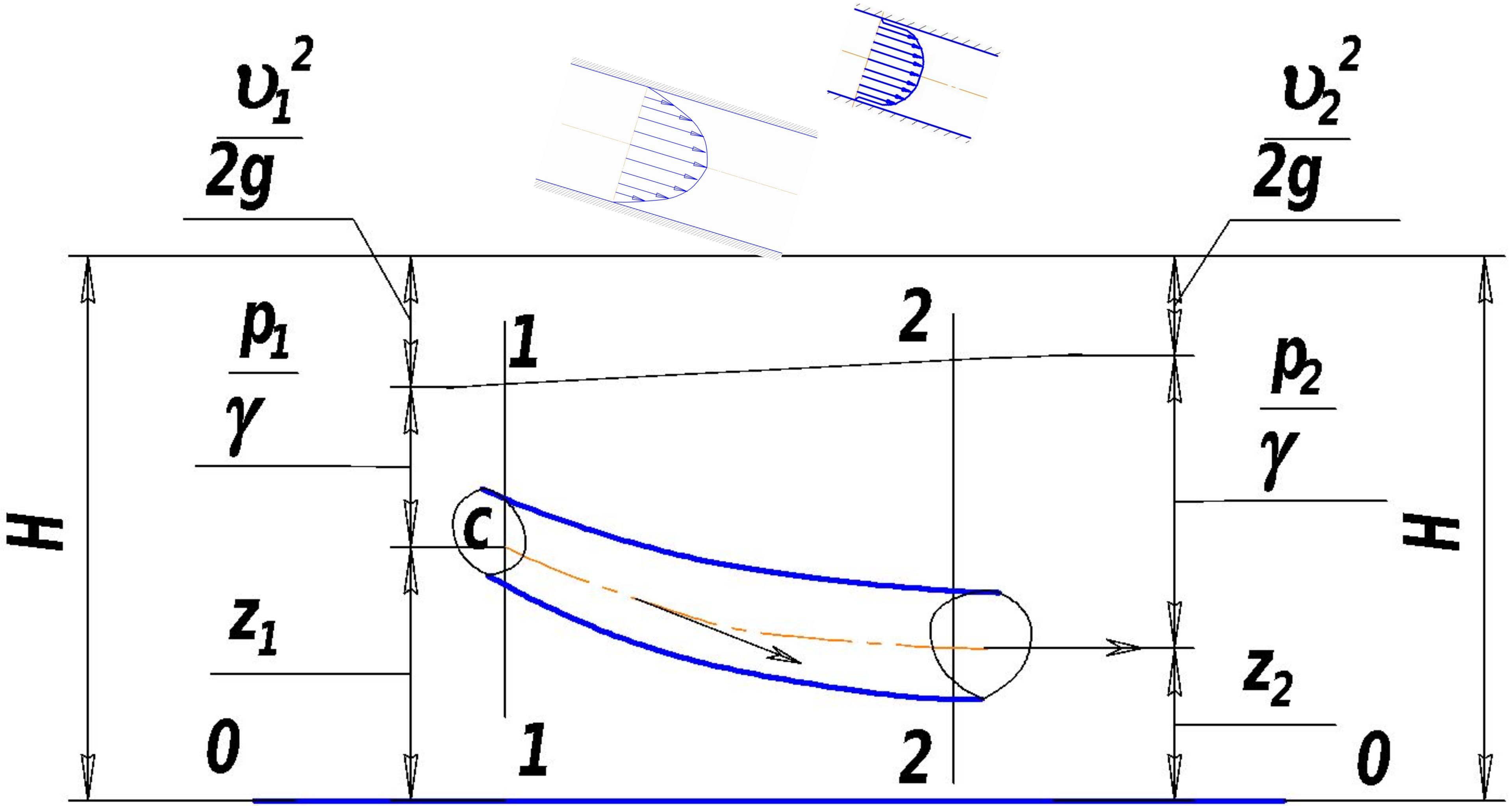
Полная механическая энергия

$$E = \frac{m \cdot u^2}{2} + m \cdot g \cdot z + p \cdot V.$$

- Так как $V = \frac{m}{\rho}$, то $E = \frac{m \cdot u^2}{2} + m \cdot g \cdot z + p\frac{m}{\rho}.$
- Удельная энергия струйки

$$Э_{уд} = \frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g}.$$

Энергия потока жидкости



Полная удельная энергия потока

$$Э_{уд} = Э_к + Э_п,$$

Определим слагаемые правой части:

кинетическая энергия

$$Э_К = \frac{\sum \frac{u^2}{2g}}{n} = \alpha \frac{v^2}{2g},$$

где n – число элементарных струек;

u – скорости элементарных струек.

Коэффициент Кориолиса

- α – коэффициент Кориолиса, учитывающего неравномерность распределения скорости по сечению
- α=1,0 – 1,13 – для турбулентных потоков и α=2,0 – для ламинарных потоков.
- Таким образом,

$$Э_К = \alpha \frac{v^2}{2g},$$

- где v – средняя скорость потока;

Потенциальная энергия

$$Э_{п} = z + p / \rho g.$$

- и полная удельная энергия

$$Э_{уд} = \alpha \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g}.$$

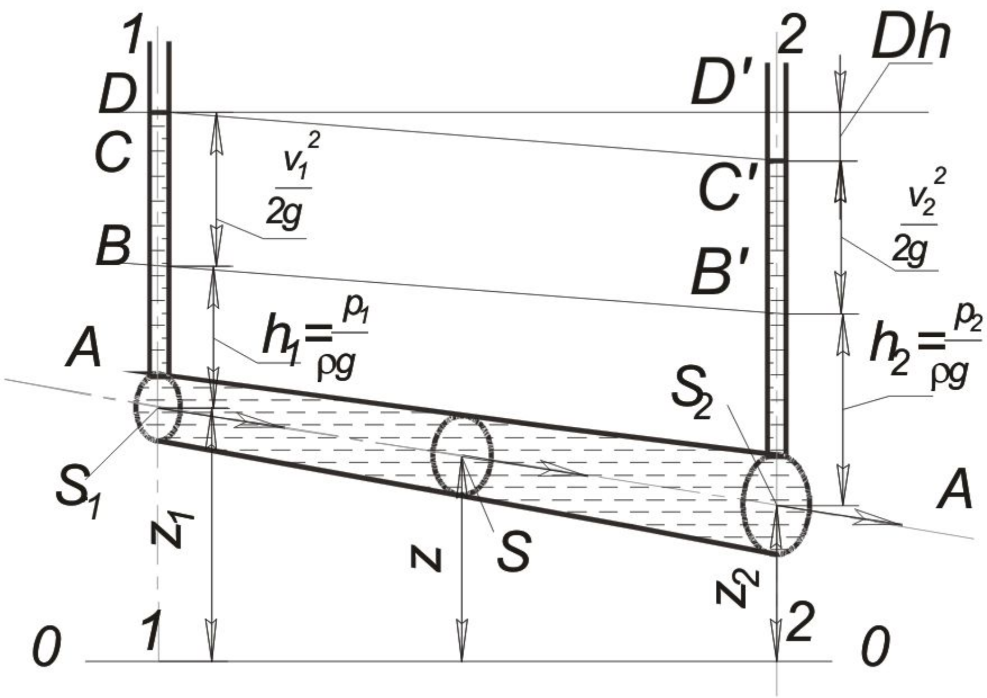
- Если использовать зависимость то

$$Э_{уд} = \alpha \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma}.$$

Баланс энергии

$$Э^{1}_{уд} = \alpha_1 \frac{v_1^{\ 2}}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g};$$

$$Э^{2}_{уд} = \alpha_2 \frac{v_2^{\ 2}}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}.$$



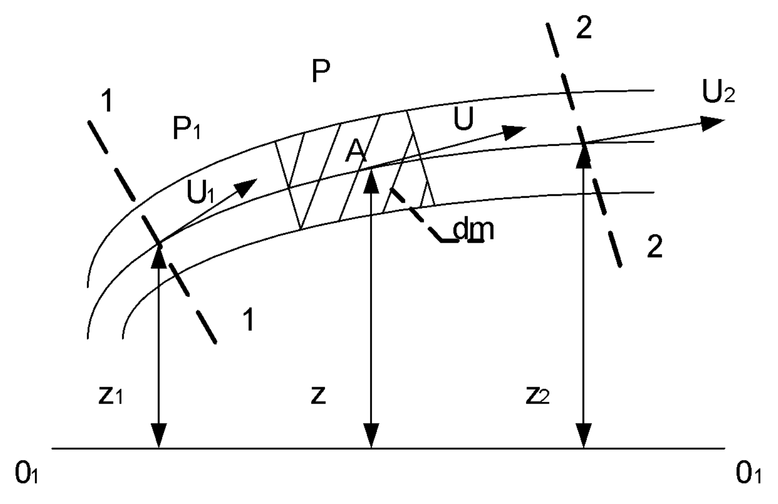
Уравнение Бернулли для реального потока жидкости

$$\alpha_1 \frac{v_1^{\,2}}{2g} + z_1 + p_1 / \rho g = \alpha_2 \frac{v_2^{\,2}}{2g} + z_2 + p_2 / \rho g + \Delta h.$$

Здесь Δh величина потерь энергии на преодоление сил трения между 1 и 2 участком

Физический смысл уравнения

- Физический (энергетический) смысл уравнения Бернулли состоит в том, что <u>при установившемся движении жидкости сумма трех удельных энергий (положения, давления и кинетической) остается неизменной.</u>



Гидродинамический напор

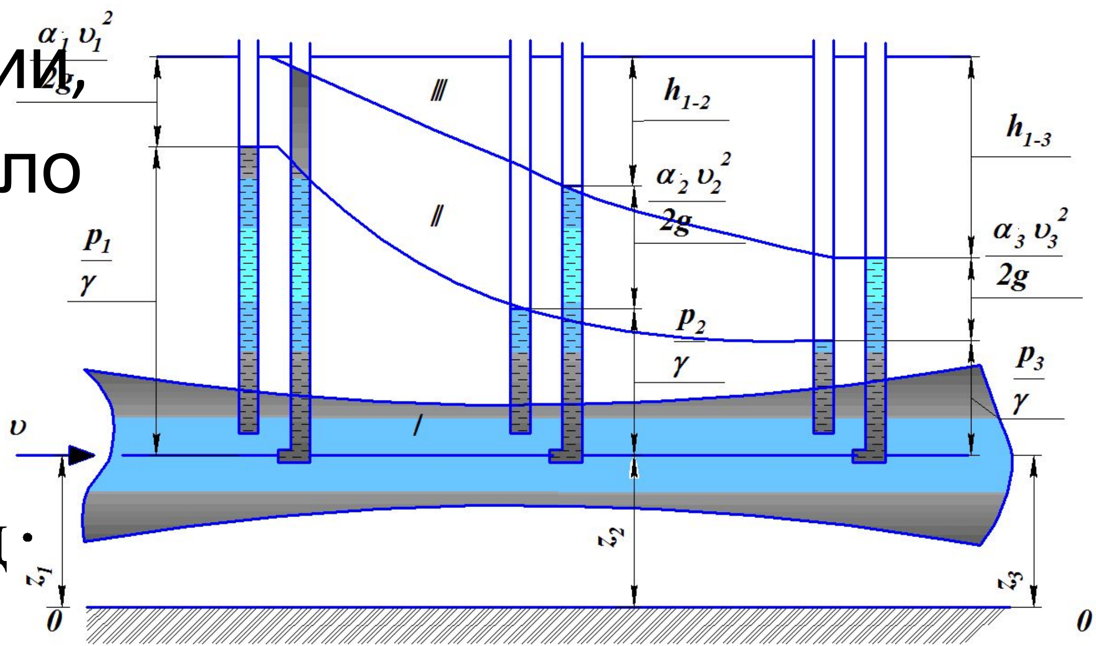
$\alpha \dfrac{v^2}{2g}$ - высота скоростного напора;

$\dfrac{p}{\rho g}$ - пьезометрическая высота, отсчитываемая в каждом сечении по пьезометру

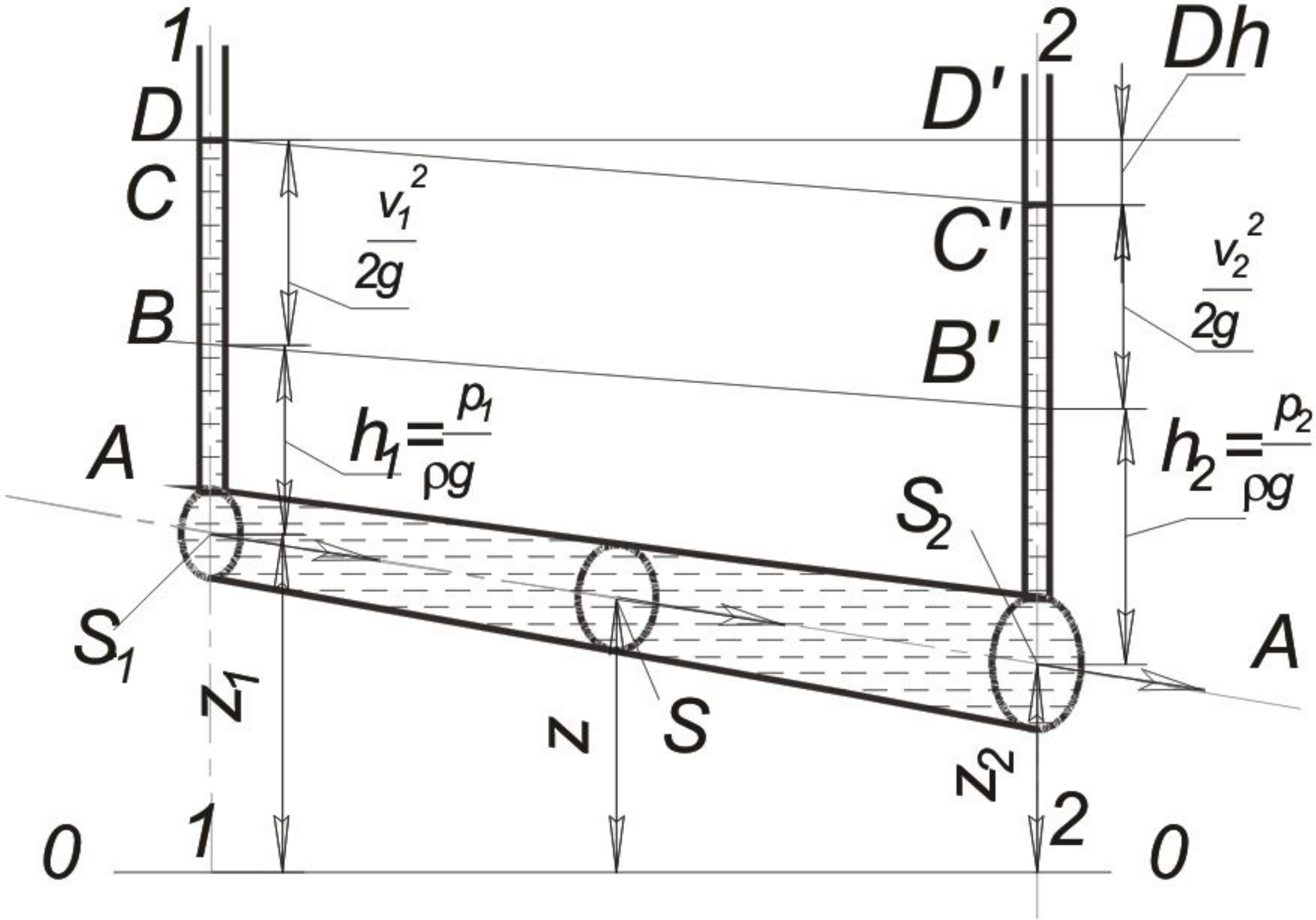
Z – геометрическая высота положения

Δh – потерянный напор, равный части энергии, превращенной в тепло

$$\alpha \frac{v^2}{2g} + z + p/\rho g = H_{ГД}.$$

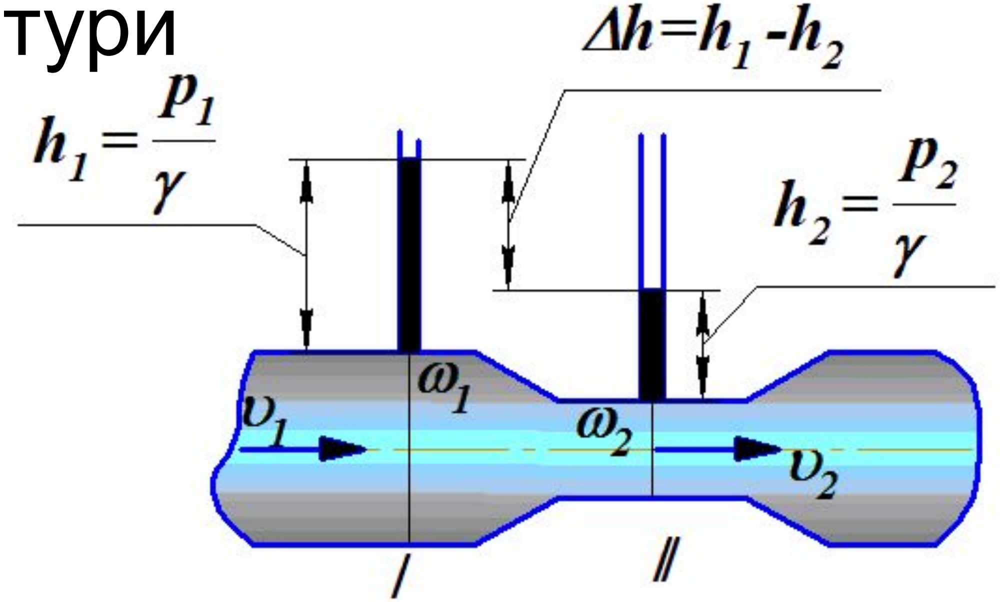


Графическое представление уравнения Бернулли



Применение уравнения Бернулли

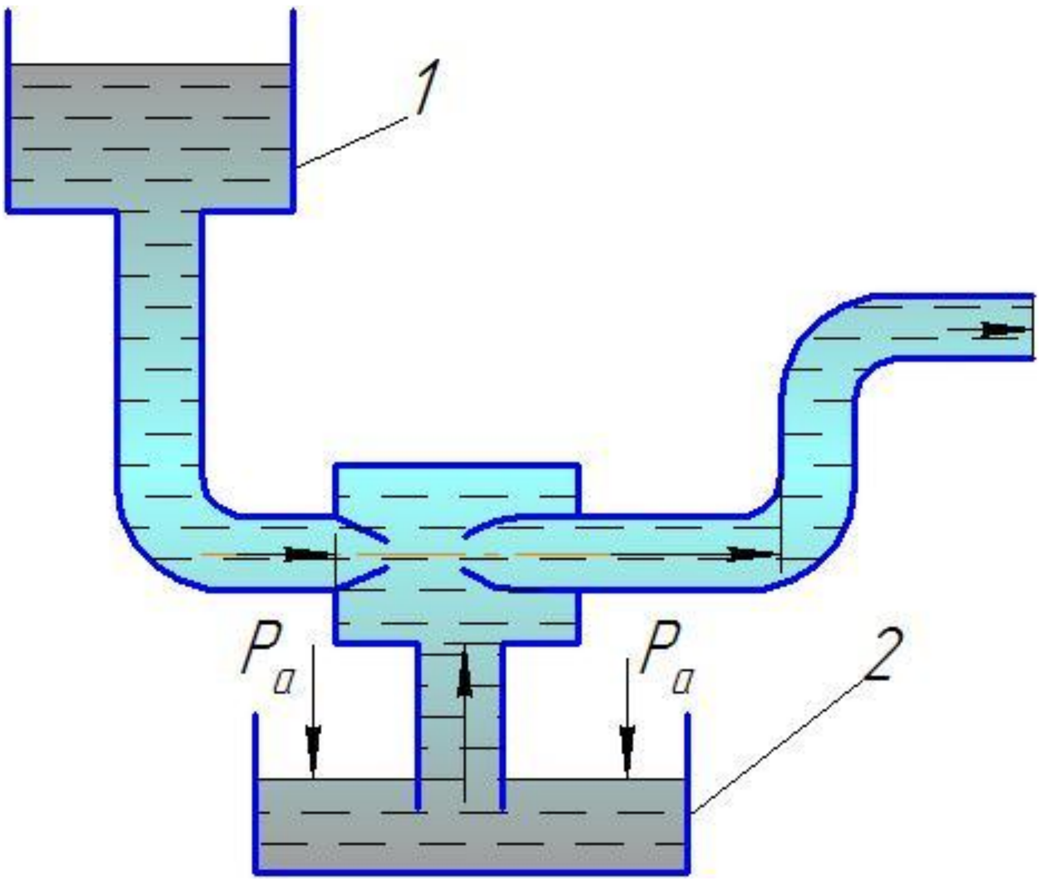
- Водомер Вентури



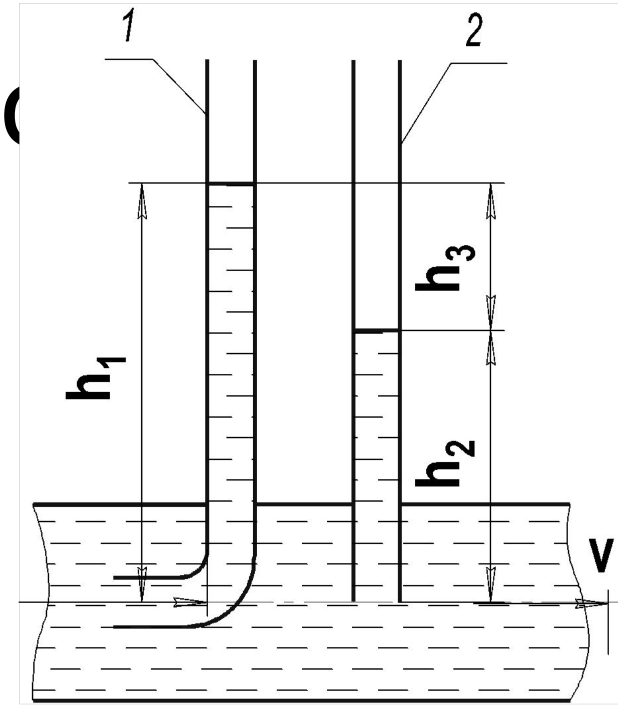
$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

$$Q = v_1 S_1 = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{S_1}{S_2} - 1}}.$$

Водоструйный насос



Трубка Пито



- Полный напор трубки

Пито, $h_1=(p/\rho g)+v^2/(2g)$

- пьезометрический напор

определяющей $h_2=p/\rho g$

Скорость потока в точке расположения нижнего отверстия трубки Пито определяется высотой подъема жидкости $h_3= v^2/(2g)$.

$$v = \sqrt{\frac{h_3}{2g}}.$$

Формула Торричелли

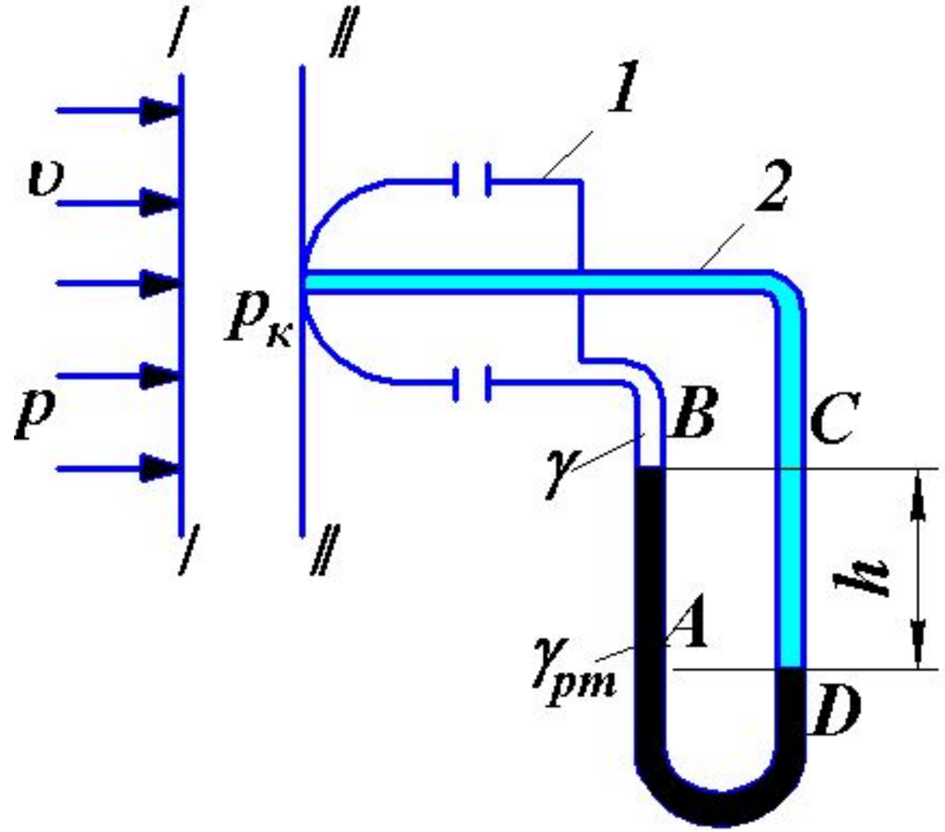
$$Q = \mu S\sqrt{2g\Delta h}, \qquad Q = \mu S\sqrt{2\Delta p/\rho}$$

где μ – коэффициент расхода (истечения), который определяется экспериментально и зависит от вида (формы) отверстия;

S – площадь поперечного сечения отверстия;

$\Delta h = \Delta p/(\rho g)$ – напор.

Трубка Прандтля



Рекомендации по использованию уравнения Бернулли