

# МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Методом фазовой плоскости можно исследовать только системы второго порядка. Для исследования систем более высокого используются методы приближённого исследования. Наиболее распространённым методом является **метод гармонической линеаризации** (метод гармонической линеаризации) используется для исследования колебательных режимов нелинейных систем.

## Суть метода гармонической линеаризации

Предположим, на вход нелинейного звена со статической характеристикой  $y = F(x)$  (рисунок 1) подан гармонический сигнал  $x = a \cdot \sin \omega t$ , (1)

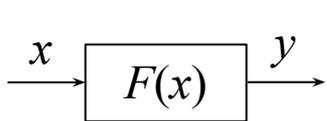


Рисунок 1

где  $a$  – амплитуда сигнала;  
 $\omega$  – круговая частота.

На выходе получим сигнал  $y = F(x) = F(a \cdot \sin \omega t)$  (см. рис. 2).

Так как выходной сигнал нелинейного звена периодический, его можно разложить в ряд Фурье:

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad (2)$$

где  $n$  – номер гармоники.

Коэффициенты ряда Фурье:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \omega t) \cdot d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cdot d(\omega t), \quad (3)$$

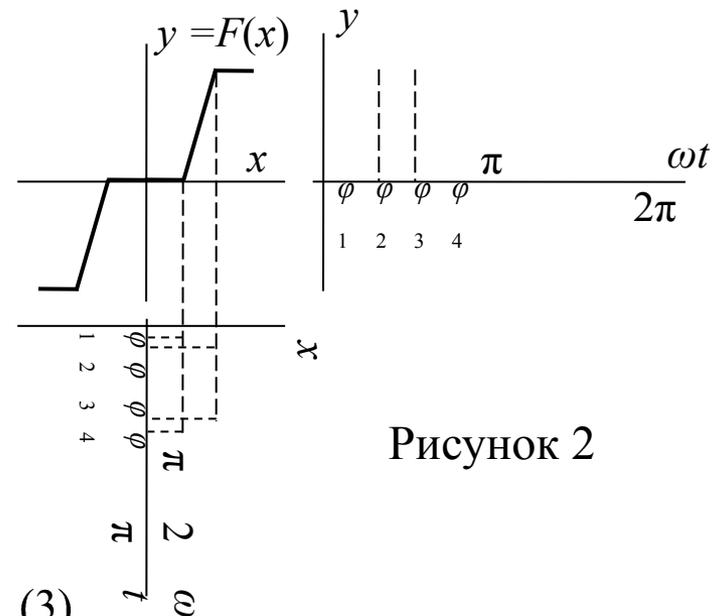


Рисунок 2

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cdot \cos n\omega t \cdot d(\omega t); \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cdot \sin n\omega t \cdot d(\omega t). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$A_0$  – постоянная составляющая выходного сигнала. При симметричных колебаниях  $A_0 = 0$ .

Как правило, амплитуда первой гармоники больше амплитуд более высоких гармоник. В нелинейных системах выделяют нелинейное звено и линейную часть (рисунок 3):

Степень полинома знаменателя передаточной функции линейной части обычно выше степени полинома числителя. При этом АЧХ линейной части имеет вид, как на рисунке 4 (с пропорциональным 1 или интегральным 2 регуляторами).

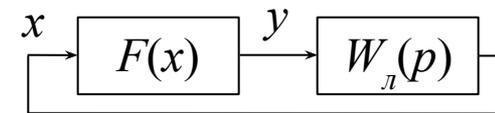


Рисунок 3

По АЧХ видно, что линейная часть выполняет роль фильтра – первая гармоника пропускается с большим усилением, чем более высокие гармоники.

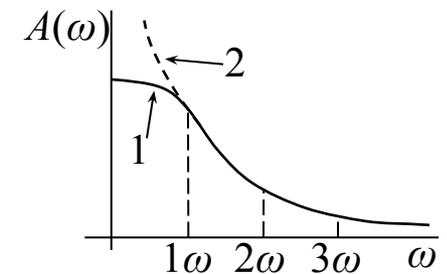


Рисунок 4

Первая гармоника на выходе нелинейности имеет самую большую амплитуду и легче всего проходит через линейную часть.

Следовательно, можно считать, что в колебательном режиме на входе нелинейности будет воздействующий сигнал. В этом режиме можно рассматривать как линейную (точнее – *гармонически линеаризованную*).

**Обязательное условие: 1-я гармоника наибольшая, линейная часть выполняет роль фильтра!**

Уравнение (2) при выполнении указанных условий для случая симметричных колебаний ( $A_0 = 0$ ) запишется как  $y = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t$ . (5)

Введём обозначения

где  $q(a)$  и  $q'(a)$  – коэффициенты гармонической линеаризации.

Уравнение (5) запишется как  $y = F(x) = q(a) \cdot a \cdot \sin \omega t + q'(a) \cdot a \cdot \cos \omega t$ . (7)

Но, согласно (1),  $a \cdot \sin \omega t = x$ . Тогда

Подставив в (7), получим уравнение гармонически линеаризованной нелинейности:

$$y = F(x) = \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \cdot x. \quad (8)$$

Правая часть (8) линейна при постоянной амплитуде  $a$  (иногда и частоте  $\omega$ ) колебаний. Следовательно, в колебательном процессе (например, в режиме автоколебаний) нелинейность можно рассматривать как линейное звено. Но коэффициенты этого линейного звена будут зависеть от амплитуды колебаний.

Гармонически линеаризованная передаточная функция нелинейного звена из (8)

$$W_n(a, p) = \frac{Y(p)}{X(p)} =$$

а АФЧХ (подставим в (9)  $p = j\omega$ )

АФЧХ нелинейности зависит только от амплитуды и не зависит от частоты.

## Коэффициенты гармонической линеаризации

Коэффициенты ряда Фурье (4) для первой гармоники

Тогда коэффициенты гармонической линеаризации (6):

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{B_1}{a} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x) \cdot \sin \omega t \cdot d(\omega t); \\ q' &= \frac{A_1}{a} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x) \cdot \cos \omega t \cdot d(\omega t). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Интегрируя выходной сигнал нелинейного звена  $y = F(x) = F(a \cdot \sin \omega t)$  по формулам (10), получим выражения для коэффициентов гармонической линеаризации для любого вида нелинейности.

### Примеры определения коэффициентов гармонической линеаризации

Пример 1. Предположим, что нелинейное звено имеет идеальную релейную характеристику (рисунок 5, а). При подаче на вход звена синусоидального сигнала, выходной сигнал будет иметь вид, показанный на рисунке 5, б).

Для удобства обозначим  $\omega t = \psi$ .

Проинтегрируем на половине периода:

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x) \cdot \sin \psi d\psi = \frac{2c}{\pi a} \int_0^{\pi} \sin \psi d\psi,$$

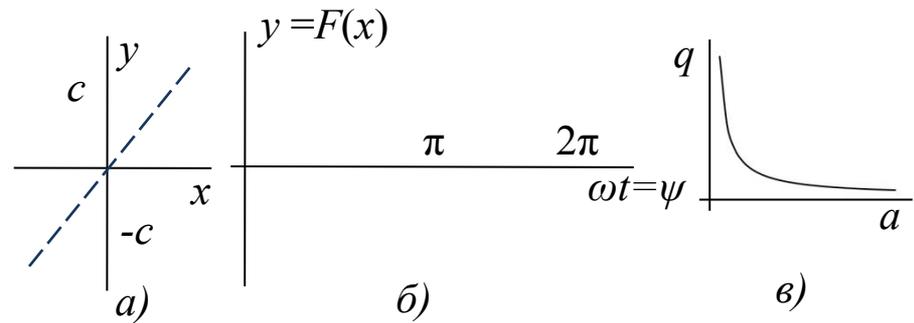


Рисунок 5.

откуда  $q =$

$$\text{Для коэффициента } q': \quad q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x) \cdot \cos \psi d\psi = \frac{2c}{\pi a} \int_0^{\pi} \cos \psi d\psi = \frac{2c}{\pi a} \sin \Big|_{0^{\circ}}^{180^{\circ}} = 0.$$

Следовательно, при исследовании колебательных режимов такое нелинейное звено может быть представлено как идеальное линейное с передаточным коэффициентом  $q$ . Характеристика гармонически линейризованного звена показана на рисунке 5,а штриховой линией. Наклон характеристики (коэффициент  $q$ ) зависит от амплитуды колебаний. Зависимость  $q(a)$  показана на рисунке 5,в.

Пример 2. Характеристика однозначная релейная с зоной нечувствительности (рисунок 6).

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x) \cdot \sin \psi d\psi = \frac{4c}{\pi a} \int_{\psi_1}^{\pi/2} \sin \psi d\psi = -\frac{4c}{\pi a} \cos \Big|_{\psi_1}^{90^{\circ}},$$

или  $q =$

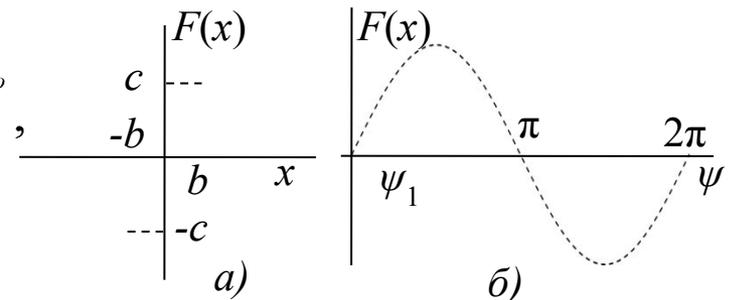


Рисунок 6.

Переключение происходит при  $x = b$ , то есть  $a \cdot \sin \psi_1 = b$ . Отсюда  $\sin \psi_1 = \frac{b}{a}$ .

Следовательно  $q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$  при  $a > b$ . Так как характеристика нелинейности однозначная (без петель),  $q' = 0$ .

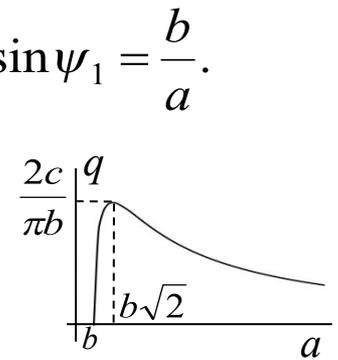


Рисунок 7

Зависимость  $q(a)$  для такой нелинейности приведена на рисунке 7.

Пример 3. Релейная петлевая характеристика (рисунок 8).

Проведя аналогичные вычисления, получим

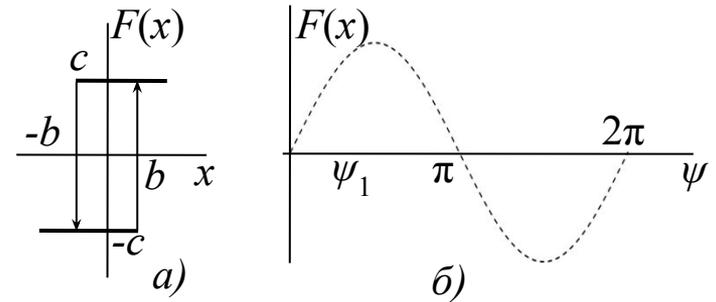


Рисунок 8

и

Учтя, что  $\sin \psi_1 = \frac{b}{a}$ , получим

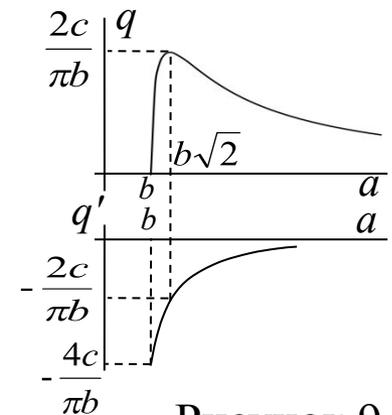


Рисунок 9

Зависимости  $q(a)$  и  $q'(a)$  приведены на рисунке 9.

Из рассмотренных примеров видно, что:

1. Если нечётно-симметричная нелинейность однозначна (например, как в примерах 1 и 2), то коэффициент  $q'(a) = 0$ .

Гармонически линейризованная передаточная функция нелинейности при этом

$$\text{а АФЧХ } W_n(a) =$$

Усиление амплитуды и фаза первой гармоники на выходе нелинейности

$$A = |W_n(a)| = q(a), \quad \varphi = -\arctg \frac{|q'(a)|}{q(a)} = 0.$$

2. Для прочих видов нелинейностей, в том числе нечётно-симметричных петлевых (пример 3) коэффициент  $q'(a) \neq 0$ . Передаточная функция и АФЧХ нелинейности:

$$W_n(a) =$$

Усиление амплитуды и фаза первой гармоники на выходе нелинейности

$$A = |W_n(a)| = \sqrt{q^2(a) + |q'(a)|^2}, \quad \varphi = -\arctg \frac{|q'(a)|}{q(a)}.$$

**Для типовых нелинейностей коэффициенты  $q(a)$  и  $q'(a)$  приведены в литературе.**

Гармоническая линейризация широко используется для исследования режимов автоколебаний в нелинейных системах, так как позволяет использовать математический аппарат, применяемый для исследования линейных систем.